УДК 519.6: 511.7

М. С. Сявавко (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

J-ДРОБОВА РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ ЛІНІЙНИХ НЕКОРЕКТНИХ РІВНЯНЬ

We present a method for solution of linear ill-posed equations in functional spaces based on the use of continuous *J*-fractions. We obtain a meromorphic solution of regularized equations and indicate some cases where the solution can be represented in terms of rational functions.

На основі апарату неперервних *J*-дробів викладено метод розв'язання лінійних некоректних рівнянь у функціональних просторах. Знайдено мероморфний розв'язок регуляризованих рівнянь. Відмічено випадки зображення розв'язку раціональними функціями.

1. Вступ. Незважаючи на численність публікацій, присвячених проблемі дослідження і наближеного розв'язку лінійних некоректних задач [1 – 6], автору невідома робота, в якій би для вирішення даного питання використовувався метод апроксимацій Паде, або їх частковий випадок — апарат неперервних дробів, підхідні дроби яких утворюють діагональні або парадіагональні апроксиманти Паде.

У даній роботі розв'язок системи лінійних рівнянь у функціональних просторах покоординатно зображено у вигляді *J*-дробів [7 – 9]. Доцільність такого зображення пояснюється хоча б тим, що у багатьох випадках розв'язок лінійних інтегральних рівнянь другого роду є мероморфною функцією параметра λ цього рівняння [8]. Показано, як мероморфний розв'язок регуляризуючого рівняння Ейлера дає можливість здійснити асимптотику при прямуванні параметра цього рівняння до нуля, тобто знайти розв'язок Мура – Пенроуза [6, 10, 11] рівнянь першого роду. Використовуючи методику регуляризації Бакушинського [12], знайдено мероморфний розв'язок некоректних задач у комплексному гільбертовому просторі. З метою забезпечення стійкості проекційні методи застосовуються у поєднанні з дробово-раціональними методами знаходження квазірозв'язку.

Застосування ланцюгових дробів в обчислювальному процесі у більшості випадків розширює область збіжності класичних ітераційних методів, особливо для тих задач, для яких поліноміальна апроксимація є неефективною. Крім того, умови збіжності дробово-аналітичних методів суттєво відрізняються від умов збіжності лінійних ітерацій. Слід відзначити і ту обставину, що перші підхідні дроби *J*-дробів дають хороші початкові наближення, оскільки основна інформація про значення досліджуваної функції зосереджена на перших поверхах дробу. Це дозволяє на основі апарату неперервних дробів робити деякі висновки, використовуючи обмежену кількість коефіцієнтів степеневого ряду. Але це вимагає і дуже точного обчислення цих коефіцієнтів.

Розглянемо дійсні функціональні гільбертові простори H, H_s, G_j, де $H = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n$, $s = \overline{1, n}$, і лінійні оператори

$$L_j \colon H \to G_j, \quad j = \overline{1, p}.$$

Нехай задані $g_j \in G_j$ і потрібно знайти $f \in H$, для якого

$$Lf = g, \tag{1}$$

де $L = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_p \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_p \end{pmatrix}$.

Ціле число n може бути як скінченним, так і нескінченним.

Вкажемо на деякі часткові випадки системи (1):

i) $L_j: E_n \to E_1$, де E_k — евклідовий простір виміру k. Тоді система (1) є системою p лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} f_k = g_j, \quad j = \overline{1, p}; \tag{2}$$

ii) $L_j: L_2(c_1, d_1) \times L_2(c_2, d_2) \times \ldots \times L_2(c_n, d_n) \to L_2(c, d)$, або $H = W_2^1(c_1, d_1) \times W_2^1(c_2, d_2) \times \ldots \times W_2^1(c_n, d_n)$, $G_j = L_2(c, d)$, де W_2^1 — один з просторів Соболєва. Тоді система (1) стає системою p лінійних інтегральних рівнянь з n невідомими:

$$\sum_{s=1}^{n} \int_{c_s}^{d_s} K_{js}(x, t) f_s(t)\, dt = g_j(x). \tag{3}$$

При $n = 1$ маємо одне лінійне інтегральне рівняння Фредгольма першого роду:

$$\int_{c}^{d} K(x, t) f(t)\, dt = g(x); \tag{4}$$

iii) головна задача комп'ютерної томографії [6] полягає у числовому відтворенні функції за скінченним числом її лінійних або плоских інтегралів. Нехай потрібно розв'язати систему

$$R_{\theta_j} f = g_j, \quad j = \overline{1, p}, \tag{5}$$

де напрям $\theta_j \in S^{n-1}$ задовольняє умову $\theta_j \neq \pm\theta_1$ при $i \neq j$, а f — функція, задана на множині Ω^n, де $\Omega^n \subseteq E_n$, $Rf(\theta, s) = R_\theta f(s)$ — n-вимірне перетворення Радона [6]. Оператор $R_\theta: L_2(\Omega^n) \to L_2([-1, 1], \omega^{1-n})$, де $\omega(s) = (1 - s^2)^{1/2}$, є обмеженим. Тому, поклавши

$$H = L_2(\Omega^n), \quad G_j = L_2([-1, 1], \omega^{1-n}),$$

задачу (5) зводимо до задачі (1) при $L_j = R_{\theta_j}$.

2. Мероморфний розв'язок регуляризованих рівнянь. В цьому пункті вивчаються три методи α-регуляризації. Це, по-перше, метод α-регуляризації Лаврентьєва, коли в (1) $L: H \to H$ є лінійним цілком неперервним самоспряженим додатно визначеним оператором; $f, g \in H$, де $H = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n$, а H і H_s, $s = \overline{1, n}$, — дійсні функціональні гільбертові простори. Тоді замість некоректної задачі (1) будемо розв'язувати задачу другого роду [4]

$$\alpha u^\alpha = g - L u^\alpha, \tag{6}$$

де $\alpha \geq 0$.

По-друге, це випадок, коли в (1) L є лінійним цілком неперервним самоспряженим (не обов'язково додатним) оператором, що відображає H в H, де $H = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n$ і H_s, $s = \overline{1, n}$, вважаються комплексними функціональними просторами. Тоді замість регуляризуючого рівняння (6) пропонується розв'язувати рівняння Бакушинського [12]

$$i\alpha v^\alpha = g - L v^\alpha, \tag{7}$$

де i — уявна одиниця.

І, по-третє, в методі регуляризації Тіхонова [1, 10, 13] регуляризуючим є рівняння Ейлера

$$\alpha w^{\alpha} = L^{*} g - L^{*} L w^{\alpha}, \tag{8}$$

де L^{*} — спряжений оператор до оператора $L\colon H^{(n)} \to H^{(m)}$, $H^{(n)} = H_1 \times \ldots$ $\ldots \times H_n$, $H^{(m)} = H_1 \times \ldots \times H_m$, а всі H_s є дійсними функціональними просторами; $\alpha \geq 0$.

Запишемо будь-яку із систем (6), (7), або (8) в традиційній формі

$$y_k^{\lambda} = b_k + \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{kj} y_j^{\lambda}, \tag{9}$$

де у випадках (6) і (8) $\lambda = -1/\alpha$, $y^{\lambda} = \alpha u^{\alpha}$ і αw^{α} відповідно, а для (7) $\lambda = -1/i\alpha$, $y^{\lambda} = i\alpha v^{\alpha}$, $k = \overline{1, n}$. В системі (9) ціле додатне число n може бути і безмежним. Ця система не обов'язково є системою лінійних алгебраїчних рівнянь. Наприклад, у випадку (3) вона матиме вигляд

$$y_k^{\lambda}(x) = b_k(x) + \lambda \sum_{s=1}^{n} \int_{c_s}^{d_s} a_{ks}(x, s) y_s^{\lambda}(t)\, dt, \quad k = \overline{1, n}, \tag{10}$$

тобто буде системою лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду.

Рівнянню (9) відповідає формальний степеневий по λ ряд

$$b_k + \lambda \sum_{j_1=1}^{n} a_{kj_1} b_{j_1} + \lambda^2 \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} a_{kj_1} a_{j_1 j_2} b_{j_2} + \ldots, \tag{11}$$

який у випадку системи (10) матиме вигляд

$$b_k(x) + \lambda \sum_{j_1=1}^{n} \int_{c_{j_1}}^{d_{j_1}} a_{kj_1}(x, t_1) b_{j_1}(t_1)\, dt_1 +$$

$$+ \lambda^2 \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \int_{c_{j_1}}^{d_{j_1}} \int_{c_{j_2}}^{d_{j_2}} a_{kj_1}(x, t_1) a_{j_1 j_2}(t_1, t_2) b_{j_2}(t_2)\, dt_1\, dt_2 + \ldots .$$

В (11) коефіцієнти

$$\sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \ldots \sum_{j_m=1}^{n} a_{kj_1} a_{j_1 j_2} \ldots a_{j_{m-1} j_m} b_{j_m} = A_k^m \tag{12}$$

є дійсними числами. Тому для цього ряду є доцільною покоординатна побудова відповідних неперервних дробів [7]. Ці дроби шукатимемо у вигляді правильних C-дробів [7, 8] (таке зображення розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду частково досліджувалось у роботах [14 – 17])

$$y_k^{\lambda} = \frac{\beta_1^{(k)}}{1} + \frac{\beta_2^{(k)}\lambda}{1} + \cdots + \frac{\beta_m^{(k)}\lambda}{1} + \cdots, \tag{13}$$

так що

$$y_k^{\lambda} = \frac{\beta_1^{(k)}}{1 + \varphi_1^{(k)}}, \quad \varphi_s^{(k)} = \frac{\lambda \beta_{s+1}^{(k)}}{1 + \varphi_{s+1}^{(k)}}, \quad s = \overline{1, \infty},$$

причому для всіх $k = \overline{1, n}$

$$\frac{P_m^{(k)}}{Q_m^{(k)}} - \left(b_k + \lambda \sum_{j_1=1}^{n} a_{kj_1} b_{j_1} + \lambda^2 \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} a_{kj_1} a_{kj_2} b_{j_2} + \ldots \right) = O(\lambda^m), \tag{14}$$

де $\dfrac{P_m^{(k)}}{Q_m^{(k)}} = \dfrac{\beta_1^{(k)}}{1} + \dfrac{\beta_2^{(k)}\lambda}{1} + \dots + \dfrac{\beta_m^{(k)}\lambda}{1}$ є m-м підхідним дробом дробу (13). Тоді

$$y_k^{\lambda} = \frac{P_m^{(k)} + \varphi_m^{(k)} P_{m-1}^{(k)}}{Q_m^{(k)} + \varphi_m^{(k)} Q_{m-1}^{(k)}} = \frac{P_m^{(k)}}{Q_m^{(k)}} - (-\lambda)^{m-1}\varphi_m^{(k)} G_m^{(k)}, \tag{15}$$

де

$$G_m^{(k)} = \frac{\beta_1^{(k)} \dots \beta_m^{(k)}}{Q_m^{(k)}\left(Q_m^{(k)} + \varphi_m^{(k)} Q_{m-1}^{(k)}\right)}.$$

Відомо [7], що необхідною і достатньою умовою існування для рядів (11) відповідних правильних C-дробів (13) є виконання для всіх $k=\overline{1, n}$ і $s=\overline{1, \infty}$ умов

$$H_{s,k}^{(1)} \neq 0, \quad H_{s,k}^{(2)} \neq 0, \tag{16}$$

де

$$H_{s,k}^{(r)} = \begin{vmatrix} C_k^r & C_k^{r+1} & \dots & C_k^{r+s-1} \\ C_k^{r+1} & C_k^{r+2} & \dots & C_k^{r+s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_k^{r+s-1} & C_k^{r+s} & \dots & C_k^{r+2s-2} \end{vmatrix},$$

а для скороченого позначення введені символи $C_k^m = A_k^m / b_k$.

В подальших дослідженнях вважатимемо, що умова (16) завжди виконується.

Коефіцієнти $\{\beta_m^{(k)}\}$ розкладу (13) шукатимемо, підставляючи (15) в рівняння системи (9) та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях λ. Отже,

$$\frac{P_m^{(k)}}{Q_m^{(k)}} - (-\lambda)^{m-1}\varphi_m^{(k)} G_m^{(k)} - b_k - \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \frac{P_m^{(j)}}{Q_m^{(j)}} - (-\lambda) \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\varphi_m^{(j)} G_m^{(j)} = 0. \tag{17}$$

Перш за все зауважимо, що

$$\frac{P_m^{(k)}}{Q_m^{(k)}} = \frac{\sum_{j=0}^{[(m-1)/2]} P_{m,j}^{(k)}\lambda^j}{\sum_{j=0}^{[m/2]} Q_{m,j}^{(k)}\lambda^j}, \tag{18}$$

де $[x]$ — ціла частина числа x. Чисельник $P_m^{(k)}$ і знаменник $Q_m^{(k)}$ підхідного дробу $P_m^{(k)} / Q_m^{(k)}$ можна визначити з різницевих рівнянь

$$P_m^{(k)} = P_m^{(k)} + \lambda\beta_m P_{m-2}^{(k)}, \quad P_0^{(k)} = 0, \quad P_1^{(k)} = \beta_1^{(k)},$$

$$Q_m^{(k)} = Q_{m-1}^{(k)} + \lambda\beta_m Q_{m-2}^{(k)}, \quad Q_0^{(k)} = Q_1^{(k)} = 1, \quad m = 2, 3, \dots,$$

з яких безпосередньо випливає, що

$$P_{m,j} = P_{m-1,j} + \beta_m P_{m-2,j-1} \quad \text{і} \quad Q_{m,j} = Q_{m-1,j} + \beta_m Q_{m-2,j-2}. \tag{19}$$

Використовуючи початкові значення

$$P_{m,0}^{(k)} = \beta_1^{(k)} = b_k, \quad P_{3,1}^{(k)} = \beta_1^{(k)}\beta_3^{(k)}, \quad Q_{m,0}^{(k)} = 1, \quad Q_{2,1}^{(k)} = \beta_2^{(k)},$$

легко знаходимо

$$P_{2m,m-1}^{(k)} = \beta_1^{(k)}(\beta_4^{(k)}\beta_6^{(k)}\dots\beta_{2m}^{(k)} + \beta_3^{(k)}\beta_5^{(k)}\dots\beta_{2m-1}^{(k)} + \beta_3^{(k)}\beta_6^{(k)}\dots\beta_{2m}^{(k)} + \\ + \beta_3^{(k)}\beta_5^{(k)}\beta_8^{(k)}\dots\beta_{2m}^{(k)} + \dots + \beta_3^{(k)}\beta_5^{(k)}\dots\beta_{2m-3}^{(k)}\beta_{2m}^{(k)}),$$

$$Q_{2m,m}^{(k)} = \beta_2^{(k)}\beta_4^{(k)}\dots\beta_{2m}^{(k)}. \tag{20}$$

Згідно з умовою $Q_{m,0}^{(k)} = 1$ функція $P_m^{(k)}/Q_m^{(k)}$ відносно λ є аналітичною функцією в точці $\lambda = 0$, тобто ряд Тейлора

$$\frac{P_m^{(k)}}{Q_m^{(k)}} = \gamma_k^{(0,m)} + \gamma_k^{(1,m)}\lambda + \dots + \gamma_k^{(m-1,m)}\lambda^{m-1} + \dots$$

збігається для достатньо малих значень $|\lambda|$.

Виявляється [7], що коефіцієнти $\gamma_k^{(s,m)}$ мають однакові значення для всіх цілих додатних значень s, для яких $m > s$, тобто $\gamma_k^{(0,m)} = \gamma_k^{(0)}$, $\gamma_k^{(1,m)} = \gamma_k^{(1)}, \dots, \gamma_k^{(m-1,m)} = \gamma_k^{(m-1)}$, а при відповідності дробу (13) рядові (11) $\gamma_k^{(0)} = b_k$, $\gamma_k^{(1)} = A_k^2, \dots, \gamma_k^{(m-1)} = A_k^{m-1}$.

Теорема 1. *При виконанні умов* (16) *дріб* (13) *буде відповідним ряду* (11), *якщо в ньому компоненти* $\beta_s^{(k)}$ *знаходяться згідно з рекурентними співвідношеннями*

$$\beta_{m+1}^{(k)} = -\frac{(-1)^m}{\beta_1^{(k)}\dots\beta_n^{(k)}}(A_k^m + Q_{m,1}^{(k)}A_k^{m-1} + \dots + Q_{m,[m/2]}^{(k)}A_k^{m-[m/2]}); \tag{21}$$

де A_k^s *визначаються згідно з* (12).

Доведення. Враховуючи викладене вище, прирівняємо до нуля коефіцієнти в (17) відповідно в степенях $\lambda^0, \lambda, \lambda^2, \dots$:

для $m = 1$ при λ^0

$$\beta_1^{(k)} - b_k = 0, \quad \beta_1^{(k)} = b_k;$$

для $m = 2$ при λ

$$-\beta_1^{(k)}\beta_2^{(k)} - A_k^1 = 0,$$

а отже,

$$\beta_2^{(k)} = -\frac{1}{\beta_1^{(k)}}A_k^1,$$

....

Нехай дріб $P_{m+1}^{(k)}/Q_{m+1}^{(k)}$ є відповідним до ряду (11). Отже,

$$\frac{P_{m+1}^{(k)}}{Q_{m+1}^{(k)}} = b_k + A_k^1\lambda + A_k^2\lambda^2 + \dots + A_k^{m-1}\lambda^{m-1} + \\ + A_k^m\lambda^m + \gamma_k^{(m+1,m+1)}\lambda^{m+1} + \dots .$$

Тоді

$$\sum_{j=0}^{[m/2]} P_{m+1,j}^{(k)}\lambda^j = \left(\sum_{j=0}^{[(m+1)/2]} Q_{m+1,j}^{(k)}\lambda^j\right)(b_k + A_k^1\lambda + A_k^2\lambda^2 + \dots$$

$$\ldots + A_k^{m-1}\lambda^{m-1} + A_k^m\lambda^m + \gamma_k^{(m+1,m+1)}\lambda^{m+1} + \ldots). \tag{22}$$

Розглянемо спочатку випадок, коли $m = 2s$. Тоді співвідношення (22) набуде вигляду

$$P_{2s+1,0}^{(k)} + P_{2s+1,1}^{(k)}\lambda + \ldots + P_{2s+1,s}^{(k)}\lambda^s = (1 + Q_{2s+1,1}^{(k)}\lambda + + Q_{2s+1,2}^{(k)}\lambda^2 + \ldots$$

$$\ldots + Q_{2s+1,s}^{(k)}\lambda^s)(b_k + A_k^1\lambda + A_k^2\lambda^2 + \ldots + A_k^{2s}\lambda^{2s} + \gamma_k^{(2s+1,2s+1)}\lambda^{2s+1} + \ldots).$$

В останньому співвідношенні прирівняємо до нуля коефіцієнт при λ^{2s}. Одержимо

$$A_k^{2s} + A_k^{2s-1}Q_{2s+1,1}^{(k)} + A_k^{2s-2}Q_{2s+1,2}^{(k)} + \ldots + A_k^s Q_{2s+1,s}^{(k)} = 0.$$

Оскільки

$$Q_{2s+1,l}^{(k)} = Q_{2s,l}^{(k)} + Q_{2s-1,l-1}^{(k)}\beta_{2s+1}^{(k)}, \quad l = \overline{1, s},$$

маємо

$$A_k^{2s} + A_k^{2s-1}Q_{2s,1}^{(k)} + A_k^{2s-2}Q_{2s,2}^{(k)} + \ldots + A_s^k Q_{2s,s}^{(k)} + \beta_{2s+1}^{(k)}(A_k^{2s-1}Q_{2s-1,0}^{(k)} +$$

$$+ A_k^{2s-2}Q_{2s-1,1}^{(k)} + \ldots + A_s^k Q_{2s-1,s}^{(k)}) = 0.$$

Отже, допустивши згідно з методом математичної індукції, що формула (21) вірна для $m = 2s - 1$, доводимо, що вона вірна і для $m = 2s$, бо

$$A_k^{2s-1}Q_{2s-1,0}^{(k)} + A_k^{2s-2}Q_{2s-1,1}^{(k)} + \ldots + A_k^s Q_{2s-1,s}^{(k)} = (-1)^{2s-1}\beta_{2s}^{(s)} \ldots \beta_1^{(k)}.$$

Аналогічні підрахунки проводяться і для $m = 2s + 1$. Теорема доведена.

Оскільки основна інформація про значення досліджуваної функції зосереджена на перших поверхах неперервного дробу, вкажемо ще декілька початкових значень $\beta_1^{(k)}$, а саме

$$\beta_3^{(k)} = \frac{(A_k^1)^2 - b_k A_k^2}{b_k A_k^1}, \quad \beta_4^{(k)} = \frac{b_k((A_k^2)^2 - A_k^1 A_k^3)}{A_k^1(b_k A_k^2 - (A_k^1)^2)}.$$

Проста алгебраїчна тотожність

$$1 + \frac{p\lambda}{1 + q\lambda / D} = 1 + p\lambda - \frac{pq\lambda^2}{D + q\lambda}$$

приводить до стиску неперервного дробу (13). Дійсно, поклавши $p_j^{(k)} = \beta_{2j}^{(k)}$, $q_j^{(k)} = \beta_{2j+1}^{(k)}$, можна для дробу (13) побудувати асоційований дріб

$$y_k^\lambda = \frac{\beta_1^{(k)}}{1 + \beta_2^{(k)}\lambda} - \frac{\beta_2^{(k)}\beta_3^{(k)}\lambda^2}{1 + (\beta_3^{(k)} + \beta_4^{(k)})\lambda} - \cdots - \frac{\beta_{2s-2}^{(k)}\beta_{2s-1}^{(k)}\lambda^2}{1 + (\beta_{2s-1}^{(k)} + \beta_{2s}^{(k)})\lambda} - \cdots. \tag{23}$$

Після заміни в цьому дробові λ на $(-1/\alpha)$, y^λ на αu^α або αw^α відповідно і скорочення на α одержимо

$$u_k^\alpha = \frac{\beta_1^{(k)}}{\alpha - \beta_2^{(k)}} - \frac{\beta_2^{(k)}\beta_3^{(k)}}{\alpha - (\beta_3^{(k)} + \beta_4^{(k)})} - \cdots - \frac{\beta_{2s-2}^{(k)}\beta_{2s-1}^{(k)}}{\alpha - (\beta_{2s-1}^{(k)} + \beta_{2s}^{(k)})} - \cdots. \tag{24}$$

Аналогічно, для випадку (7) маємо

$$v_k^\alpha = \frac{\beta_1^{(k)}}{i\alpha + \beta_2^{(k)}} - \frac{\beta_2^{(k)}\beta_3^{(k)}}{i\alpha - (\beta_3^{(k)} + \beta_4^{(k)})} - \cdots - \frac{\beta_{2s-2}^{(k)}\beta_{2s-1}^{(k)}}{i\alpha - (\beta_{2s-1}^{(k)} + \beta_{2s}^{(k)})} - \cdots. \tag{25}$$

Дроби (24) і (25) у випадку $\beta_l^{(k)} \neq 0$ для всіх цілих k, l називають J-дробами. Якщо всі $\beta_l^{(k)}$ одночасно дійсні додатні або від'ємні, то (24) і (25) називаються дійсними J-дробами.

Питання перетворення формальних рядів Лорана

$$\frac{c_1}{\omega} + \frac{c_2}{\omega^2} + \frac{c_3}{\omega^3} + \ldots + \frac{c_n}{\omega^n} + \ldots$$

у відповідні J-дроби вивчається у роботі [7], а найбільш грунтовною роботою, в якій детально вивчені ознаки збіжності J-дробів, є монографія Уолла [9].

3. Узагальнені розв'язки. Розглянемо випадок (8) ((6) і (7) вивчаються аналогічно). Відомо [6, 11], що коли в системі (1) $g \in \operatorname{Im} L + (\operatorname{Im} L)^{\perp}$, де $\operatorname{Im} L$ — область значень оператора L і $\operatorname{Im} L = \overline{\operatorname{Im} L}$, то існує

$$\lim_{\alpha \to 0+} (\alpha I + L^* L)^{-1} L^* g. \tag{26}$$

Ця границя належить $\overline{\operatorname{Im} L^*}$ і є нормальним розв'язком Мура – Пенроуза $f^+ = L^+ g$ системи (1). Елемент f^+ є єдиним розв'язком рівняння

$$L^* L f = L^* g.$$

Для дробово-аналітичного підходу ці результати реалізуються в наступне твердження.

Теорема 2. *Якщо в системі* (1) $H = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n$, H_s, $s = \overline{1, n}$, і G_j, $j = \overline{1, p}$, *— дійсні функціональні гільбертові простори і* $g \in \operatorname{Im} L + (\operatorname{Im} L)^{\perp}$, *а оператор* L *є нормально розв'язним* (*тобто* $\operatorname{Im} L = \overline{\operatorname{Im} L}$), *то для всіх* $k = \overline{1, n}$

$$f_k^+ = L_k^+ g = \lim_{\alpha \to 0+} w_k^{\alpha} = -\frac{\beta_1^{(k)}}{\beta_2^{(k)}} - \frac{\beta_2^{(k)}\beta_3^{(k)}}{\beta_3^{(k)} + \beta_4^{(k)}} - \cdots - \frac{\beta_{2s-2}^{(k)}\beta_{2s-1}^{(k)}}{\beta_{2s-1}^{(k)} + \beta_{2s}^{(k)}} - \cdots. \tag{27}$$

Закономірність граничного переходу у співвідношенні (24) може бути обгрунтована і з допомогою апарату правильних C-дробів (див. теореми 4.55 – 4.57, 4.59, 5.14 – 5.15, наслідок 4.59 у [7], а також результати більш ранньої роботи [18]).

Легко безпосередньо перевірити справедливість наступного твердження.

Теорема 3. *Дріб* (27) *еквівалентний ряду*

$$f_k^+ = -\lim_{s \to \infty} \frac{P_{2s,s-1}^{(k)}}{Q_{2s,s}^{(k)}} = -\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\beta_1^{(k)}\beta_3^{(k)}\beta_5^{(k)} \ldots \beta_{2s+1}^{(k)}}{\beta_2^{(k)}\beta_4^{(k)}\beta_6^{(k)} \ldots \beta_{2s+2}^{(k)}}. \tag{28}$$

Для дробів (24) і (25) при $\omega = \alpha$, $\omega = i\alpha$ або $\omega = 0$ введемо наступні позначення:

$$D_p^{(m,k)}(\omega) = \omega - (\beta_{2p-1}^{(k)} + \beta_{2p}^{(k)}) - \frac{\beta_{2p}^{(k)}\beta_{2p+1}^{(k)}}{D_{p+1}^{(m,k)}(\omega)} \quad \text{при} \quad p = \overline{m-1, 2},$$

$$D_m^{(m,k)}(\omega) = \omega - (\beta_{2m-1}^{(k)} + \beta_{2m}^{(k)}), \quad D_1^{(m,k)}(\omega) = \omega - \beta_2^{(k)} - \frac{\beta_2^{(k)}\beta_3^{(k)}}{D_2^{(m,k)}(\omega)}$$

$$-\lim_{m\to\infty}\frac{\beta_1^{(k)}}{D_1^{(m,k)}} = \begin{cases} u_k^{\alpha} \ (\text{або } w_k^{\alpha}), & \text{якщо } \omega = \alpha; \\ v_k^{\alpha}, & \text{якщо } \omega = i\alpha. \end{cases}$$

Теорема 4. *Якщо для всіх* $p = \overline{1, m}$ *і* $m = \overline{1, \infty}$ $D_p^{(m,k)}(0) \neq 0$, $D_p^{(m,k)}(\omega) \neq \neq 0$, *то справедлива формула*

$$\frac{P_m^{(k)}(0)}{Q_m^{(k)}(0)} - \frac{P_m^{(k)}(\omega)}{Q_m^{(k)}(\omega)} = \omega\sum_{s=1}^{m}\frac{\prod_{p=1}^{2s-1}\beta_p}{\prod_{p=1}^{s}D_p^{(m,k)}(0)D_p^{(m,k)}(\omega)}, \tag{29}$$

де при $\omega = \alpha$ *або* $\omega = i\alpha$ $P_m^{(k)}(\omega)/Q_m^{(k)}(\omega)$ *є* m*-м підхідним дробом J-дробів* (24) *або* (25) *відповідно,* $P_m^{(k)}(0)/Q_m^{(k)}(0)$ — m*-й підхідний дріб дробу* (27).

Оцінка (29) є результатом використання формули різниці між основним (27) і регуляризованим (24) або (25) скінченними дробами [19, 20].

У загальному випадку компонента L_k^+ псевдооберненого оператора L^+ не є неперервною. Для того щоб перейти до неперервної задачі, вводиться поняття регуляризації оператора L_k^+. Основними методами регуляризації некоректно поставлених задач, які дозволяють знайти розв'язок у деякому наближенні, є зрізаний сингулярний розклад, метод регуляризації Тіхонова – Філліпса, ітераційні методи [6]. Дробово-аналітичне зображення (24), (25) і (27) дає можливість побудови принаймні ще двох методів регуляризації некоректних задач у функціональному просторі. Так, регуляризатором $(T_\alpha)_k^1 g$ оператора f_k^+ може служити дріб (24), оскільки відомо [6], що оператор $T_\alpha^1 g = (\alpha I + L^* L)^{-1} L^* g$ є регуляризатором псевдооберненого розв'язку $f^+ = \lim\limits_{\alpha\to 0+}(\alpha I + L^* L)^{-1} L^* g$.

Крім того, вираз (28) вказує на те, що координата L_k^+ оператора L^+ є необмеженою за рахунок прямування до нуля виразу $\beta_2^{(k)}\beta_4^{(k)}\ldots\beta_{2m}^{(k)}\ldots$. Цей факт дає можливість побудувати зрізаний *J*-дробовий розклад як один з можливих методів регуляризації. З цією метою позначимо через $s^{(k)}(\alpha)$ найбільший індекс, що прямує до нескінченності при $\alpha \to 0$, для якого добуток

$$\beta_2^{(k)}\beta_4^{(k)}\ldots\beta_{2s^{(k)}(\alpha)}^{(k)} \neq 0.$$

Очевидно, k-та координата

$$(T_\alpha)_k^2 g = -\frac{\beta_1^{(k)}}{\beta_2^{(k)}} - \frac{\beta_2^{(k)}\beta_3^{(k)}}{\beta_3^{(k)}+\beta_4^{(k)}} - \cdots - \frac{\beta_{2s^{(k)}(\alpha)-2}^{(k)}\beta_{2s^{(k)}(\alpha)-1}^{(k)}}{\beta_{2s^{(k)}(\alpha)-1}^{(k)}+\beta_{2s^{(k)}(\alpha)}^{(k)}}$$

є регуляризатором k-ї координати оператора $L_k^+ g$. Останній регуляризатор нагадує ітераційний метод регуляризації з тією тільки різницею, що на відміну від ітераційного методу регуляризації, який зводиться до вибору відповідного числа кроків ітерації, в зрізаному *J*-дробовому методі розкладу регуляризація відбувається за рахунок вибору числа поверхів дробу (27).

4. Випадки зображення розв'язку раціональними функціями.

1. Розглянемо спочатку випадок, коли система (9) є системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). В зв'язку з тим, що при досить малих λ

$$(I-\lambda L)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(I-\lambda A)}{\det(I-\lambda A)},$$

де $\operatorname{adj} A$ — матриця, транспонована по відношенню до матриці алгебраїчних доповнень для A, розв'язок системи (9) зображується у вигляді раціональної відносно λ функції

$$y_k^\lambda = \frac{M_k(\lambda)}{N_k(\lambda)}, \quad k = \overline{1, n}, \tag{30}$$

де $M_k(\lambda)$ і $N_k(\lambda)$ — поліноми по λ степеня n.

Розкриємо співвідношення (30) детальніше.

Теорема 5. *Для невиродженої СЛАР* (9) *для всіх* $k = \overline{1, n}$ $\beta_{2n+1}^{(k)} = 0$ *і векторна координата розв'язку* w_k^α *зображується у вигляді скінченного J-дробу*

$$w_k^\alpha = \frac{\beta_1^{(k)}}{\alpha - \beta_2^{(k)}} - \frac{\beta_2^{(k)}\beta_3^{(k)}}{\alpha - (\beta_3^{(k)} + \beta_4^{(k)})} - \dots - \frac{\beta_{2n-2}^{(k)}\beta_{2n-1}^{(k)}}{\alpha - (\beta_{2n-1}^{(k)} + \beta_{2n}^{(k)})}. \tag{31}$$

Крім того, векторна координата псевдорозв'язку Мура – Пенроуза рівняння (2) *рівна*

$$f_k^+ = -\frac{\beta_1^{(k)}}{\beta_2^{(k)}} - \frac{\beta_2^{(k)}\beta_3^{(k)}}{\beta_3^{(k)} + \beta_4^{(k)}} - \dots - \frac{\beta_{2n-2}^{(k)}\beta_{2n-1}^{(k)}}{\beta_{2n-1}^{(k)} + \beta_{2n}^{(k)}} \tag{32}$$

і при $D_p^{(n,k)}(\alpha) \neq 0$, $D_p^{(n,k)}(0) \neq 0$ *вірна оцінка*

$$f_k^+ - w_k^\alpha = \alpha \sum_{l=1}^{n} \frac{\prod_{p=1}^{2l-1} \beta_p^{(k)}}{\prod_{p=1}^{l} D_p^{(n,k)}(0) D_p^{(n,k)}(\alpha)}. \tag{33}$$

Доведення формули (31) здійснюється методом математичної індукції. Формула (32) є результатом граничного переходу (26) у співвідношенні (31). Оцінка (33) випливає з теореми 4.

***Зауваження* 1.** Для невиродженої СЛАР (9) коефіцієнти $Q_{2n,s}^{(k)}$, $s = \overline{1, n}$, не залежать від k, а рівняння

$$\alpha^n - \alpha^{n-1} Q_{2n,1} + \alpha^{n-2} Q_{2n,2} - \dots + (-1)^n Q_{2n,n} = 0 \tag{34}$$

дає можливість знайти полюси розв'язку w^α.

2. Для випадку (7), коли матриця системи (2) є симетричною матрицею, у виразах (31), (33) і (34) α потрібно замінити на $i\alpha$. Тоді дійсна частина $\operatorname{Re} v_k^\alpha$ знаходиться за аналогією з розв'язком комплексної СЛАР, наприклад, її шукатимемо як розв'язок системи

$$A \operatorname{Re} v^\alpha - \alpha \operatorname{Im} v^\alpha = g,$$

$$-\alpha \operatorname{Re} v^\alpha - A \operatorname{Im} v^\alpha = 0,$$

або

$$(\alpha I + A^2) \operatorname{Re} v^\alpha = A g,$$

де $A^2 = A^* A = AA$, α — додатне число [10].

***Наслідок* 1.** *Дробовий розклад* s*-го стовбця* A_s^+ *псевдооберненої матриці Мура – Пенроуза* A^+ *може бути одержаний за допомогою границі*

$$A_s^+ = \lim_{\alpha \to 0+} (\alpha I + A^* A)^{-1} A^* e_s,$$

де

$$e_s = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} s.$$

Наслідок 2. *Аналогічно, дробово-раціональне зображення* (32) *дає можливість розкрити границю*

$$A^D = \lim_{\alpha \to 0+} (\alpha I + A^{k+1}) A^k,$$

де A^D *— псевдообернена матриця Дразіна* [11], k *— індекс квадратної матриці* A.

2. Предметом подальших досліджень є інтегральне рівняння першого роду (4). Тоді (3) набуде вигляду

$$\alpha w^\alpha(t) = b(t) - \int_{c_1}^{d_1} R(t, s) w^\alpha(s)\, ds, \tag{35}$$

де $t \in [c_1, d_1]$, α — додатне число, а

$$R(t, s) = \int_c^d K(x, s) K(x, t)\, dx, \quad b(t) = \int_c^d K(x, t) g(x)\, dx.$$

Поклавши в (35) $\lambda = -1/\alpha$, $\alpha w^\alpha(t) = y^\lambda(t)$, одержимо інтегральне рівняння другого роду

$$y^\lambda(t) = b(t) - \lambda \int_{c_1}^{d_1} R(t, s) y^\lambda(s)\, ds. \tag{36}$$

Нехай в цьому рівнянні ядро $R(t, s)$ — вироджене (скінченновимірне):

$$R(t, s) = \sum_{j=1}^{n} \chi_j(t) Y_j(s). \tag{37}$$

Тоді розв'язком рівняння (36) є функція

$$y^\lambda = b(t) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \chi_i(t) y_i^\lambda, \tag{38}$$

де вектор

$$y^\lambda = (y_1^\lambda, y_2^\lambda, \ldots, y_n^\lambda)$$

задовольняє СЛАР (9) з

$$y_i^\lambda = \int_{c_1}^{d_1} Y_i(s) y^\lambda(s)\, ds, \quad b_i = \int_{c_1}^{d_1} Y_i(x) b(x)\, dx.$$

$$a_{ij} = \int_{c_1}^{d_1} \chi_j(x) Y_i(x)\, dx.$$

Розв'язуючи систему (9) згідно з вказаним вище дробово-раціональним методом, маємо

$$y^{\lambda}(t) = b(t) +$$
$$+ \lambda \sum_{k=1}^{n} \chi_k(t) \left(\frac{\beta_1^{(k)}}{1+\beta_2^{(k)}\lambda} - \frac{\beta_2^{(k)}\beta_3^{(k)}\lambda^2}{1+(\beta_3^{(k)}+\beta_4^{(k)})\lambda} - \ldots - \frac{\beta_{2n-2}^{(k)}\beta_{2n-1}^{(k)}\lambda^2}{1+(\beta_{2n-1}^{(k)}+\beta_{2n}^{(k)})\lambda} \right). \quad (39)$$

Права частина (39) відносно λ утворює апроксимацію Паде порядку $[n/n]$.

Для розв'язності скінченновимірного інтегрального рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_{c_1}^{d_1} R(t,s) f(s)\, ds = b(t) \quad (40)$$

необхідно і достатньо, щоб функція $b(t)$ була лінійною комбінацією функцій $\{\chi_j(t)\}$, тобто

$$b(t) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \chi_j(t). \quad (41)$$

В цьому випадку згідно з (40) і (41)

$$y^{\lambda}(t) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \chi_k(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k + \lambda P_{2n,1}^{(k)} + \ldots + \lambda^{n-1} P_{2n,n-1}^{(k)}}{1 + \lambda Q_{2n,1} + \ldots + \lambda^n Q_{2n,n}} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k (1 + \lambda Q_{2n,1} + \ldots + \lambda^n Q_{2n,n}) + \lambda (b_k + \lambda P_{2n,1}^{(k)} + \ldots + \lambda^{n-1} P_{2n,n-1}^{(k)})}{1 + \lambda Q_{2n,1} + \ldots + \lambda^n Q_{2n,n}} \chi_k(t) =$$
$$= \frac{1}{1 + \lambda Q_{2n,1} + \ldots + \lambda^n Q_{2n,n}} \sum_{k=1}^{n} \chi_k(t) (\lambda^n (\gamma_k Q_{2n,n} + P_{2n,n-1}^{(k)}) +$$
$$+ \sum_{j=0}^{n-1} (\gamma_k Q_{2n,j} + P_{2n,j-1}^{(k)}) \lambda^j), \quad (42)$$

де $P_{2n,n-1}^{(k)} = 0$ для всіх n і k.

Оцевидно, що при $n = 1$

$$\gamma_1 \beta_2^{(1)} + \beta_1^{(1)} = 0.$$

Методом математичної індукції доводиться, що у виразі (42)

$$\sum_{k=1}^{n} \chi_k(t) (\gamma_k Q_{2n,n} + P_{2n,n-1}^{(k)}) \equiv 0.$$

Тоді апроксиманта Паде (39) рівняння (9) стає апроксимантою Паде порядку $[n-1/n]$, що дає можливість здійснити при $\alpha \to 0$ граничний перехід і одержати нормальний розв'язок задачі (4).

Теорема 6. *При виконанні умов* (37) *і* (41) *розв'язком регуляризованого рівняння* (35) *і псевдорозв'язком рівняння* (4) *є відповідно функції* (31) *і* (32), *де* $\beta_i(t)$ *визначаються за рекурентною формулою*

$$\beta_{n+1} = \frac{(-1)^n}{\beta_1 \ldots \beta_n} (R^n b + Q_{n,1} R^{n-1} b + \ldots + Q_{n,[n/2]} R^{n-[n/2]} b),$$
$$Q_{n,j} = Q_{n-1,j} + \beta_n Q_{n-1,j-1}, \quad Q_{n,0} = 1, \quad Q_{2,1} = \beta_2,$$

R^s — *s-ітероване ядро оператора* R *рівняння* (35).

Приклад. Розглянемо інтегральне рівняння першого роду [3]

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2}(x+t) + xt\right) u(t)\,dt = \frac{1}{4} + x,$$

ядро якого є симетричним і додатно визначеним. Крім того, виконуються умови (37) і (41) з $n=2$. Тому розв'язком рівняння буде функція

$$u^+(x) = \frac{\beta_1(x)}{-\beta_2(x) - \dfrac{\beta_2(x)\beta_3(x)}{-\beta_3(x)+\beta_4(x)}} = -\frac{\beta_1(x)(\beta_3(x)+\beta_4(x))}{\beta_2(x)\beta_4(x)} =$$

$$= -\frac{\beta_1(x)}{\beta_2(x)}\left(1 + \frac{\beta_3(x)}{\beta_4(x)}\right) = \frac{g^2}{Kg}\left(1 - \frac{((Kg)^2 - gK^2g)^2}{g^2((K^2g)^2 - KgK^3g)}\right) =$$

$$= \frac{2(Kg)gK^2g - g^2K^3g - (Kg)^3}{(K^2g)^2 - KgK^3g},$$

де

$$g(x) = \frac{1}{4}(1+4x), \quad Kg(x) = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{1}{2}(x+t) + xt\right)(1+4t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{4\cdot 12}(11+40x), \quad K^2g(x) = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{1}{2}(x+t_1) + xt_1\right)dt_1 \times$$

$$\times \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(t_1+t_2) + t_1t_2\right)(1+4t_2)\,dt_2 = \frac{1}{4\cdot 12^2}(113+412x),$$

$$K^3g = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{1}{2}(x+t_1) + xt_1\right)dt_1 \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(t_1+t_2) + t_1t_2\right)dt_2 \times$$

$$\times \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{1}{2}(t_2+t_3) + t_2t_3\right)(1+4t_3)\,dt_3 = \frac{1}{4\cdot 12^2}(1163+4240x).$$

Отже,

$$u^+(x) =$$

$$= 3\,\frac{2(11+40x)(1+4x)(113+412x) - (1+4x)^2(1163+4240x) - (11+40x)^3}{(113+412x)^2 - (11+40x)(1163+4240x)} =$$

$$= 3\,\frac{48x^2 - 16x - 8}{114x^2 - 48x - 24} = 1,$$

що співпадає з точним розв'язком заданого рівняння.

У роботі [8] показана мероморфність розв'язку інтегрального рівняння другого роду у випадку, коли функція $b(t)$ і ядро $R(t,s)$ — дійсні і неперервні функції або належать до просторів L_2 і $L_2 \times L_2$ відповідно. Справедливим є також твердження про те, що резольвента довільного компактного оператора — мероморфна функція параметра λ. Розглянемо, наприклад, один із цих випадків, а саме випадок, коли в (36) функції $b(t)$ і $R(t,s)$ неперервні в $[a_1, b_1]$ і $[a_1, b_1]^2$ відповідно. Тоді в силу теореми Вейєрштрасса для довільного $\varepsilon > 0$ існує поліном $S_n(t,s)$, степінь n якого залежить від ε, такий, що

$$|S_n(t,s) - R(t,s)| < \varepsilon.$$

Таким чином,

$$R(t,s) = S_n(t,s) + T(t,s),$$

де залишок $T(t,s)$ задовольняє умову $\|T\|_\infty < \varepsilon$. Цієї умови достатньо, щоб стверджувати існування для всіх $|\lambda| < \varepsilon^{-1}$ оберненого оператора $(I - \lambda T)^{-1}$. Тоді рівняння (36) еквівалентне рівнянню

$$y^\lambda = (I - \lambda T)^{-1} b + \lambda (I - \lambda T)^{-1} S_n y^\lambda,$$

ядро якого вироджене і, як було показано вище, в крузі $|\lambda| < \varepsilon^{-1}$ функція y^λ раціональна по λ і має не більше ніж n полюсів.

Теорема 7. *Якщо для всіх* $p = \overline{2n-1}$ *і* $t \in [a_1, b_1]$ $\overline{D}_p^{(2n+1)}$ *і* $D_p^{(2n+1)}$ *відмінні від нуля, то абсолютна похибка* $\Delta(t) = \overline{y}^\lambda(t) - y^\lambda(t)$ *між наближеним розв'язком рівняння*

$$\overline{y}^\lambda(t) = b(t) + \lambda \int_{a_1}^{b_1} S_n(t,s) \overline{y}^\lambda(s)\, ds$$

і точним розв'язком $y^\lambda(t)$ *рівняння* (34) *визначається формулою*

$$\Delta = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{\prod_{p=1}^{k} \overline{D}_k^{(2n+1)} D_k^{(2n+1)}} \left(\prod_{s=1}^{k-[k/2]} \overline{\beta}_{2s-1} \prod_{s=1}^{[k/2]} \beta_{2s} - \prod_{s=1}^{k-[k/2]} \beta_{2s-1} \prod_{s=1}^{[k/2]} \overline{\beta}_{2s} \right), \tag{43}$$

де

$$D_{2n+1}^{(2n+1)} = 1, \quad D_k^{(2n+1)} = 1 + \frac{\lambda \beta_{k+1}}{D_{k+1}^{(2n+1)}}, \quad k = \overline{2n, 1}, \tag{44}$$

а вираз $\overline{D}_k^{(2n+1)}$ *визначається за аналогією з* (44) *для дробу*

$$\frac{\overline{\beta}_1}{1} + \frac{\overline{\beta}_2 \lambda}{1} + \cdots + \frac{\overline{\beta}_{2n} \lambda}{1}.$$

Формула (43) випливає з формули різниці між двома дробами: з точними і „збуреними" компонентами [15].

3. Розглянемо також проекційну реалізацію методу регуляризації Тіхонова [13]. У цьому випадку наближений розв'язок рівняння (1) шукається у вигляді

$$f_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i, \tag{45}$$

де $\{\varphi_i\}_1^\infty$ — деякий ортонормований базис в H. Тоді задача Ейлера – Тіхонова зводиться до розв'язку СЛАР відносно $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$\sum_{i=1}^{n} (L\varphi_k, L\varphi_i) a_i + \alpha a_k = (L\varphi_k, g), \quad k = \overline{1, N}. \tag{46}$$

Якщо при цьому і права частина записується у вигляді

$$g = \sum_{j=1}^{m} b_j \psi_j,$$

де $\{\psi_j\}$ — ортонормований базис в $\begin{pmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_p \end{pmatrix}$, то СЛАР набуває вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} (L\varphi_k, L\varphi_i) a_i + \alpha a_k = \sum_{j=1}^{m} (L\varphi_k, \psi_j) b_j, \quad k = \overline{1, N}. \tag{47}$$

В цих двох випадках розв'язок систем (46) і (47) можна зобразити у вигляді скінченного *J*-дробу (31).

1. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 287 с.
2. *Бакушинский А. Б., Гончарский А. В.* Итерационные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1989. – 127 с.
3. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М.: Наука, 1979. – 207 с.
4. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980. – 288 с.
5. *Морозов Б. А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука, 1987. – 240 с.
6. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 217 с.
7. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби: Пер. с анг. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
8. *Бейкер Дж., Грейвс – Моррис У.* Аппроксимации Паде: Пер. с анг. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
9. *Wall H. S.* The analytic theory of continued fractions. – New York: Van Nostrand, Princeton, 1948. – 433 p.
10. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы: Справ. пос. – Киев: Наук. думка, 1986. – 543 с.
11. *Бояринцев Ю. Е.* Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1988. – 157 с.
12. *Бакушинский А. Б.* Один метод численного решения интегральных уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1965. – **5**, № 4. – С. 744 – 749.
13. *Васин В. В., Танана В. П.* Об устойчивости проекционных методов при решении некорректных задач // Там же. – 1975. – **15**, № 1. – С. 19–29.
14. *Frair W.* Continued fractions solution to Fredholm integral equations // Rocky Mountains J. Math. – 1974. – **4**, № 2. – P. 357–360.
15. *Сяваско М. С.* Інтегральні ланцюгові дроби. – Київ: Наук. думка, 1994. – 205 с.
16. *Рожанківська М. І., Сявавко М. С.* Операторні ланцюгові дроби та побудова коректних і стійких методів розв'язання тридіагональних систем операторних рівнянь // Допов. НАН України. – 1994. – № 9. – С. 24–29.
17. *Сявавко М. С., Пасечник Т. В., Рыбыцка О. М.* Псевдообратный оператор и рациональные алгоритмы нормального решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода // Электрон. моделирование. – 1995. – **17**, № 1. – С. 10–16.
18. *Слешинский И. В.* О сходимости непрерывных дробей // Зап. мат. отд-ния Новорос. о-ва естествоиспытателей. – 1888. – **8**. – С. 97–128.
19. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
20. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 147 с.

Одержано 09.03.95