УДК 514.7

А. М. Баранович, Ю. Л. Далецкий (Киев. политехн. ин-т)

НЕКОТОРЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В КЛАССЕ ФОРМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ*

An example of formal construction of local differential geometry is considered. Instead of smooth functions as morfizms, we use formal operator power series.

Розглядається приклад формальної конструкції локальної диференціальної геометрії, що пов'язано із заміною гладких функцій як морфізмів на формальні операторні степеневі ряди.

1. Локальные соотношения дифференциальной геометрии формулируются в терминах гладких отображений линейных пространств (см. [1], гл. 2). Цель данной статьи — проследить тот факт, что эти соотношения не нарушаются при замене категории локальных многообразий ее модификацией с заменой гладких отображений в качестве морфизмов формальными операторными степенными рядами (см. [2, 3]). Такое расширение аппарата может быть полезно при исследовании некоторых задач теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, где, как известно, используются методы формальной дифференциальной геометрии (см. [4, 5]).

2. Введем в рассмотрение основные объекты и операции над ними.

Пусть X, Y — линейные топологические пространства (л. т. п.) над полем $\mathbb{K}$, $L_k(X, Y)$ — л. т. п. k-линейных отображений из X в Y, $L_{k,s}(X, Y)$ — его подпространство, состоящее из симметричных отображений, $L_{0,s}(X, Y) = Y$.

Рассмотрим л. т. п.

$$\mathcal{L}(X, Y) = \prod_{k=1}^{\infty} L_k(X, Y), \quad \mathcal{L}_s(X, Y) = \prod_{k=0}^{\infty} L_{k,s}(X, Y).$$

Их элементами являются бесконечные наборы вида

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots) \in \mathcal{L}(X, Y), \quad a_k \in L_k(X, Y),$$

$$f = (f_0, f_1, \ldots, f_k, \ldots) \in \mathcal{L}_s(X, Y), \quad f_k \in L_{k,s}(X, Y),$$

называемые формальными отображениями (ф. о.).

Пространства $\mathcal{L}(X, X)$ и $\mathcal{L}_s(X, X)$ будем кратко обозначать $\mathcal{L}(X)$ и $\mathcal{L}_s(X)$.

Обозначим значком $\smile$ проектирование $\mathcal{L}_s(X, Y)$ на $\mathcal{L}_s(X, Y) \cap \mathcal{L}(X, Y)$:

$$f = (f_0, f_1, \ldots, f_k, \ldots) \in \mathcal{L}_s(X, Y) \Rightarrow \breve{f} = (f_1, \ldots, f_k, \ldots).$$

Введем операцию композиции

$$\circ : \mathcal{L}(Y, Z) \times \mathcal{L}(X, Y) \to \mathcal{L}(X, Z),$$

$$(a \circ b)_k = \sum_{j=1}^{k} \sum_{k_1 + \ldots + k_j = k} a_j \circ \left(\bigotimes_{m=1}^{j} b_{k_m} \right),$$

где a_j рассматривается как линейное отображение из $Y^{\otimes j}$ в Z (соответственно b_{k_m} — линейное отображение из $X^{\otimes k_m}$ в Y).

---

* Выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований при Государственном комитете Украины по вопросам науки и технологий и Международного научного фонда (грант № U 44000).

Эта операция ассоциативна и линейна по левой составляющей. Обозначим символом $I_X \in L_1(X, X) = L_1(X)$ тождественное отображение пространства X. Ф. о. $\mathrm{id}_X = (I_X, 0, \ldots, 0, \ldots)$ — единичный элемент относительно операции композиции. Таким образом, мы получаем категорию формальных отображений X, объектами которой являются л. т. п., а $\mathrm{Hom}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$.

Элементы множества

$$G(X, Y) = \{ a \in \mathcal{L}(X, Y) \mid \exists\ a_1^{-1} \in L_1(Y, X) \}$$

(и только они) обратимы, т. е. для $a \in G(X, Y)$ существует $a^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ такой, что $a^{-1} \circ a = \mathrm{id}_X$, $a^{-1} \circ a = \mathrm{id}_Y$. Очевидно, множество $\mathcal{G}(X) = G(X, X)$ представляет собой группу относительно операции композиции.

Элемент $\varphi \in \mathcal{L}(X, Y)$ порождает морфизм объектов на X в объекты на Y, являющийся гомоморфизмом из $\mathcal{L}_s(Y, Z)$ в $\mathcal{L}_s(X, Z)$:

$$\overset{s}{\circ} : \mathcal{L}_s(Y, Z) \times \mathcal{L}(X, Y) \to \mathcal{L}_s(X, Z),$$

$$f \overset{s}{\circ} \varphi = f_0 \times S(\breve{f} \circ \varphi),$$

где S — операция симметризации набора полилинейных отображений. Нетрудно проверить, что $f \overset{s}{\circ} (\varphi \circ \psi) = (f \overset{s}{\circ} \varphi) \overset{s}{\circ} \psi$.

Для каждого элемента группы $\mathcal{G}(X)$ рассмотрим морфизм, порождаемый обратным к нему элементом. Такой морфизм называется заменой переменных (или координатным преобразованием). Все замены переменных в $\mathcal{L}_s(X, Y)$ образуют представление группы $\mathcal{G}(X)$ в л. т. п. $\mathcal{L}_s(X, Y)$.

Пусть для элементов пространств Y, Z, V определена билинейная операция умножения: $Y \times Z \to V$. Распространим ее на элементы л. т. п. $\mathcal{L}_s(X, Y)$, $\mathcal{L}_s(X, Z)$:

$$\cdot : \mathcal{L}_s(X, Y) \times \mathcal{L}_s(X, Z) \to \mathcal{L}_s(X, V),$$
$$(f \cdot g)_k = S\left(\sum_{j+l=k} f_j \cdot g_l \right), \tag{1}$$

где $f \in \mathcal{L}_s(X, Y)$, $g \in \mathcal{L}_s(X, Z)$, а

$$(f_j \cdot g_l)(x_1, \ldots, x_k) = f_j(x_1, \ldots, x_j) \cdot g_l(x_{j+1}, \ldots, x_k).$$

Если $\varphi \in \mathcal{L}(X', X)$, то

$$(f \cdot g) \overset{s}{\circ} \varphi = (f \overset{s}{\circ} \varphi) \cdot (g \overset{s}{\circ} \varphi).$$

В частности, по формуле (1) умножение линейных операторов на л. т. п. E переносится на пространство $\mathcal{L}_s(X, L_1(E))$. Элементы подмножества

$$\mathcal{L}_s^0(X, L_1(E)) = \{ A = (A_0, A_1, \ldots) \mid \exists\ A_0^{-1} \}$$

образуют группу относительно умножения. Если $\Phi \in \mathcal{L}_s^0(X, L_1(E))$, то через $\Phi^{-1} \in \mathcal{L}_s^0(X, L_1(E))$ будем обозначать обратный к Φ элемент относительно этой операции.

3. Введем в $\mathcal{L}_s(X, Y)$ операцию $D_b : \mathcal{L}_s(X, Y) \to \mathcal{L}_s(X, Y)$ дифференцирования вдоль элемента $b \in \mathcal{L}_s(X)$, полагая

$$(D_b a)_k = S\left(\sum_{\substack{j+l=k+1 \\ j \neq 0}} \sum_{n=1}^{j} a_j \circ b_l^{nj} \right),$$

где $a \in \mathcal{L}_s(X, Y)$, $b_l^{nj} = \left(\left(\bigotimes_1^{n-1} I_X\right) \otimes b_l \otimes \left(\bigotimes_{n+1}^{j} I_X\right)\right)$.

Операция $a \# b := D_b a$, очевидно, билинейна, но не ассоциативна. Нетрудно проверить, что ассоциатор

$$a \# (b, c) := (a \# b) \# c - a \# (b \# c)$$

симметричен относительно перестановки b и c:

$$a \# (b, c) = a \# (c, b).$$

Из этого соотношения легко выводится следующее утверждение.

Предложение 1. *Пространство $\mathcal{L}_s(X)$ имеет структуру алгебры Ли $\mathfrak{A}_X$ со скобкой*

$$[b, c] = b \# c - c \# b.$$

Пространство $\mathcal{L}_s(X, Y)$ является $\mathfrak{A}_X$-модулем с действием $b \mapsto D_b$:

$$[D_b, D_c]a := (D_c D_b - D_b D_c)a = D_{[b,c]}a.$$

Замечание. Можно показать, что

$$a \# b = S\left(\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} a \circ (\mathrm{id}_X + \varepsilon b) \right). \tag{2}$$

Хотя операция $\circ$ и не имеет смысла для $b \in \mathcal{L}_s(X)$, выражение (2) приобретает смысл при отбрасывании членов порядка $o(\varepsilon)$.

4. Следуя идее И. М. Гельфанда, под формальным многообразием понимаем пару $(\mathfrak{A}, M)$, где $\mathfrak{A}$ — алгебра Ли, M — $\mathfrak{A}$-модуль.

Вследствие предложения 1 пара $\mathfrak{M}_X = (\mathfrak{A}_X, \mathcal{L}_s(X, \mathbb{K}))$ образует формальное многообразие. В рассматриваемом случае $M = \mathcal{L}_s(X, \mathbb{K})$ — коммутативная алгебра с введенной выше по формуле (1) операцией симметрического тензорного умножения $\cdot$. Элементы алгебры Ли $\mathfrak{A}_X$ действуют в ней как дифференцирования:

$$D_a(f \cdot g) = (D_a f) \cdot g + f \cdot (D_a g).$$

Совокупность таких формальных многообразий образует категорию $\mathfrak{M}$ с морфизмами

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{M}_X, \mathfrak{M}_Y) = \mathcal{L}(X, Y),$$

$$\mathcal{L}(X, Y) \ni \varphi : \mathcal{L}_s(Y, \mathbb{K}) \to \mathcal{L}_s(X, \mathbb{K}),$$

$$f \mapsto f \overset{s}{\circ} \varphi.$$

Элементы $g \in G(X, Y)$ — изоморфизмы этой категории с действием

$$S_g : (\mathfrak{A}_Y, \mathcal{L}_s(Y, \mathbb{K})) \to (\mathfrak{A}_X, \mathcal{L}_s(X, \mathbb{K})),$$

$$S_g : (a, f) \qquad \mapsto ((g \# a) \overset{s}{\circ} g^{-1} =: a_g,\ f \overset{s}{\circ} g^{-1} =: f_g).$$

Предложение 2. *Справедливо соотношение*

$$f_g \# a_g = D_{a_g} f_g = (D_a f) \overset{s}{\circ} g^{-1} = (f \# a) \overset{s}{\circ} g^{-1}.$$

Отображение $g \mapsto S_g$ *является гомоморфизмом*:

$$S_{g_2 \circ g_1} = S_{g_2} \circ S_{g_1}.$$

Группу $\mathcal{G}(X)$ будем называть группой координатных преобразований формального многообразия $\mathfrak{M}_X$.

5. Определим формальный аналог векторного расслоения с базой $\mathfrak{M}_X$ и типичным слоем — л. т. п. E.

Предложение 3. *Л. т. п.* $\mathfrak{A}_{X,E} = \mathfrak{A}_X \dot{+} \mathcal{L}_s(X, L_1(E))$ *наделяется структурой алгебры Ли со скобкой*

$$[(a, \alpha), (b, \beta)] = ([a, b], \alpha \# b - \beta \# a + [\alpha, \beta]),$$

где $[\alpha, \beta] = \alpha \cdot \beta - \beta \cdot \alpha$. *При этом* $\mathcal{L}_s(X, E^*)$ *оказывается* $\mathfrak{A}_{X,E}$*-модулем с действием*

$$(a, \alpha)\omega = \omega \# a + \alpha^* \cdot \omega.$$

Назовем формальное многообразие $V(X, E) = (\mathfrak{A}_{X,E}, \mathcal{L}_s(X, E^*))$ тотальным пространством векторного расслоения с базой X и слоем E. Естественное вложение $\pi: \mathcal{L}_s(X, \mathbb{K}) \to \mathcal{L}_s(X, \mathbb{K}) \dot{+} \mathcal{L}_s(X, E^*)$ назовем проекцией, пространство $\mathcal{L}_s(X, E)$ — пространством сечений расслоения.

Каждое сечение ξ определяет отображение

$$\tilde{\xi}: \mathcal{L}_s(X, E^*) \to \mathcal{L}_s(X, \mathbb{K}),$$

$$\tilde{\xi}: \omega \mapsto \omega \cdot \xi;$$

при этом $\tilde{\xi} \circ \pi = \mathrm{id}$ (если $\tilde{\xi}$ тождественным образом продолжить на $\mathcal{L}_s(X, \mathbb{K})$).

Координатные преобразования расслоения $V(X, E)$ определяются парами $(g, \Phi) \in \mathcal{G}(X) \dot{+} \mathcal{L}_s^0(X, L_1(E)) =: \mathcal{G}(X, E)$.

Действие элементов (g, Φ) задается следующим образом:

$$S_{(g, \Phi)}((a, \alpha), \omega) = \left(S_{(g, \Phi)}(a, \alpha), S_{(g, \Phi)}\omega\right),$$

где

$$S^1_{(g, \Phi)}(a, \alpha) = S_g a$$

и

$$S^2_{(g, \Phi)}(a, \alpha) = \left[\left(\Phi \# a + \alpha^* \cdot \Phi\right) \cdot \Phi^{-1}\right] \overset{s}{\circ} g^{-1} \tag{3}$$

— компоненты векторного поля $S_{(g, \Phi)}(a, \alpha)$, а

$$S_{(g, \Phi)}\omega = (\omega \cdot \Phi^{-1}) \overset{s}{\circ} g^{-1}.$$

$\mathcal{G}(X, E)$ образует группу с умножением

$$(g_1, \Phi_1) \cdot (g_2, \Phi_2) = (g_1 \circ g_2, (\Phi_1 \overset{s}{\circ} g_2) \cdot \Phi_2).$$

Единичным элементом в ней является пара $(\mathrm{id}_X, I_{X,E})$, где $I_{X,E} = (I_E, 0, \ldots \ldots, 0, \ldots) \in \mathcal{L}_s^0(X, L_1(E))$, а $(g, \Phi)^{-1} = (g^{-1}, (\Phi \overset{s}{\circ} g^{-1})^{-1})$.

Будем говорить, что в векторном расслоении $V(X, E)$ введен атлас замен переменных, если определена некоторая подгруппа группы $\mathcal{G}(X, E)$.

Предложение 4. $S_{(g,\Phi)}$ — *представление* $\mathcal{G}(X, E)$, *согласованное с* S_g, *т. е. действие* $(g, \Phi) \mapsto S_{(g,\Phi)}$ — *гомоморфизм и*

$$S_{(g,\Phi)}(f \cdot \omega) = S_g f \cdot S_{(g,\Phi)}\omega,$$

где $f \in \mathcal{L}_s(X, \mathbb{K})$.

По формуле

$$S^*_{(g,\Phi)}\xi = (\Phi \cdot \xi) \overset{s}{\circ} g^{-1}$$

определяются координатные преобразования в $\mathcal{L}_s(X, \mathbb{K})$-модуле $\mathcal{L}_s(X, E)$ сечений расслоения $V(X, E)$. S^* также является представлением, согласованным с S_g, и

$$S_g(\tilde{\xi} \cdot \omega) = \widetilde{S^*_{(g,\Phi)}\xi} \cdot S_{(g,\Phi)}\omega.$$

В частности, если $E = X$, мы получаем формальный аналог касательного расслоения над $\mathfrak{M}_X$, в котором группой замен переменных является подгруппа группы $\mathcal{G}(X, X)$, состоящая из элементов вида (g, g'), где

$$g'_k(x_1, \dots, x_k)h = \sum_{n=1}^{k+1} g_{k+1} \circ \left(\left(\bigotimes_1^{n-1} I_X \right) \otimes h \otimes \left(\bigotimes_{n+1}^{k+1} I_X \right) \right).$$

6. Пусть $A(E) = \bigotimes\limits_{r=0}^{\infty} A^r(E)$ — алгебра внешних форм на л. т. п. E. Пусть i_v — отображение внутреннего произведения для $v \in E$:

$$i_v \colon A^r(E) \to A^{r-1}(E),$$
$$i_v \colon \omega \to \omega(v, \dots).$$

Обозначим через $\Omega^r(X, E) := \mathcal{L}_s(X, A^r(E))$ л. т. п. формальных r-форм на $V(X, E)$. По формуле (1) умножение $\wedge \colon A^r(E) \times A^s(E) \to A^{r+s}(E)$ переносится на пространства $\Omega^r(X, E)$ и $\Omega^s(X, E)$. Положим $\Omega(X, E) := \bigotimes\limits_{r=0}^{\infty} \Omega^r(X, E)$ и распространим $\wedge$ по линейности на все $\Omega(X, E)$. Л. т. п. $\Omega(X, E)$ с умножением $\wedge$ называется алгеброй внешних форм на векторном расслоении $V(X, E)$.

Пространство формальных r-форм канонически отождествляется с пространством наборов линейных отображений из $X^{\otimes k} \otimes E^{\otimes r}$ в $\mathbb{K}$, симметричных по аргументам из X и кососимметричных по аргументам из E:

$$\Omega^r(X, E) = \prod_{k=0}^{\infty} L_{(k,s)(r,a)}(X, E; \mathbb{K}).$$

Симметричные и кососимметричные аргументы будем отделять чертой: если $\omega \in \Omega^r(X, E)$, то

$$\omega_k(x_1, \dots, x_k)(h_1, \dots, h_r) = \omega_k(x_1, \dots, x_k | h_1, \dots, h_r).$$

Таким образом, если $\omega \in \Omega^r(X, E)$, $\theta \in \Omega^r(X, E)$, то

$$(\omega \wedge \theta)_k(x_1, \dots, x_k | h_1, \dots, h_{r+s}) =$$

$$= \sum_{j+l=k} (\omega_j \otimes \theta_l) \circ \Big(\overbrace{x_1, \ldots, x_j} \,|\, \underbrace{h_1, \ldots, h_r} \Big) \otimes \Big(\overbrace{x_{j+1}, \ldots, x_k} \,|\, \underbrace{h_{r+1}, \ldots, h_{r+s}} \Big),$$

где скобки сверху обозначают симметризацию по совокупности соответствующих элементов, а скобки снизу — альтернирование.

По формуле (1) внутреннее произведение переносится на сечения и внешние формы:

$$(i_\xi \omega)_k = S\bigg(\sum_{j+l=k} \omega_j \circ \Big(\Big(\overset{j}{\underset{1}{\otimes}} I_X \Big) \Big| \, \xi_l \otimes \Big(\overset{r}{\underset{2}{\otimes}} I_E \Big) \Big) \bigg),$$

где $\xi \in \mathcal{L}_s(X, \mathbb{K})$, $\omega \in \Omega^r(X, E)$; при этом

$$i_\xi(\omega \wedge \theta) = (i_\xi \omega) \wedge \theta + (-1)^r \omega \wedge (i_\xi \theta),$$

где r — степень формы ω.

Обозначим замену переменных в $\Omega(X, E)$ также символом $S_{(g,\Phi)}$:

$$S_{(g,\Phi)}\omega = (\omega \cdot (\Phi^{-1})^{\otimes r}) \overset{s}{\circ} g^{-1},$$

r — степень ω. Выполняются соотношения

$$(S_{(g,\Phi)}\omega) \wedge (S_{(g,\Phi)}\theta) = S_{(g,\Phi)}(\omega \wedge \theta),$$
$$i_{S^*_{(g,\Phi)}\xi} S_{(g,\Phi)}\omega = S_{(g,\Phi)}(i_\xi \omega).$$

7. Рассмотрим $\Omega(X) := \Omega(X, X)$ — алгебру внешних форм на многообразии $\mathfrak{M}_X$. Определим отображение $d\colon \Omega^r(X) \to \Omega^{r+1}(X)$:

$$(d\omega)_k(x_1, \ldots, x_k | h_1, \ldots, h_{r+1}) = (k+1)\omega_{k+1}\Big(x_1, \ldots, x_k, \underbrace{h_1 | h_2, \ldots, h_{r+1}} \Big) =$$

$$= (k+1) \sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{j-1} \omega_{k+1}\Big(x_1, \ldots, x_k, h_j \,|\, h_2, \ldots, \hat{h}_j, \ldots, h_{r+1} \Big),$$

где знак $\wedge$ обозначает отсутствие символа.

Продолжим d по линейности на все $\Omega(X)$. Нетрудно проверить, что

$$d(\omega \wedge \theta) = (d\omega) \wedge \theta + (-1)^r \omega \wedge (d\theta),$$

где $\omega \in \Omega^r(X)$,

$$S_{(g,\Phi)}(d\omega) = d(S_{(g,\Phi)}\omega),$$
$$d \circ d = 0,$$

$$(d\omega)(A_1, \ldots, A_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} A_i \omega\big(A_1, \ldots, \hat{A}_i, \ldots, A_{r+1} \big) +$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+1} \omega\big([A_i, A_j], A_1, \ldots, \hat{A}_i, \ldots, \hat{A}_j, \ldots, A_{r+1} \big),$$

где $\omega \in \Omega^r(X)$, $A_j \in \mathfrak{A}_X$, $j = 1, \ldots, r+1$.

Обычным образом определяются точные и замкнутые формы. В частности, точные 1-формы выделяются среди всех 1-форм тем, что они симметричны по всем аргументам.

Определим линейное отображение $\delta\colon \Omega^{r+1}(X) \to \Omega^r(X)$:

$$(\delta\omega)_k(x_1,\ldots,x_k|h_1,\ldots,h_r) = \frac{1}{k}\omega_{k-1}\Big(\overbrace{x_1,\ldots,x_{k-1}|x_k}, h_1,\ldots,h_r\Big) =$$

$$= \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\omega_{k-1}\big(x_1,\ldots,\hat{x}_j,\ldots,x_k|x_j,h_1,\ldots,h_r\big)$$

и продолжим его по линейности на ΩX; δ удовлетворяет тем же свойствам, что и d, $\{\delta, d\} = \delta d + d\delta$ — дифференцирование степени 0 алгебры $\Omega(X)$ (см. [6], гл. IV). Если $\omega \in \Omega^r(X)$, то

$$(\{\delta, d\}\omega)_k = (r+k)\omega_k.$$

Определим дифференцирование Ли внешней формы ω вдоль векторного поля A по формуле $L_A\omega = \{i_A, d\}\omega$. Тогда

$$L_A(f\cdot\omega) = (f\#A)\cdot\omega + f\cdot L_A\omega,$$

$$L_{S_q A}S_{(g,\Phi)}\omega = S_{(g,\Phi)}L_A\omega,$$

$$(L_A\omega)_k\Big(\overset{k}{\underset{1}{\otimes}}I_X\Big|h_1,\ldots,h_r\Big) = S_k\Big[\sum_{j+l=k+1}\omega_j\circ\Big(\Big(\overset{j-1}{\underset{1}{\otimes}}I_X\Big)\otimes a_l\Big|h_1,\ldots,h_r\Big) +$$

$$+ \sum_{j+l=k+1}\sum_{p=1}^{r}(-1)^{p-1}\omega_j\circ\Big(\Big(\overset{j}{\underset{1}{\otimes}}I_X\Big)\Big|a_l\circ\Big(\Big(\overset{l-1}{\underset{1}{\otimes}}I_X\Big)\otimes h_p\Big), h_1,\ldots,\hat{h}_p,\ldots,h_r\Big)\Big].$$

8. Определим связность на в. р. $V(X, E)$ с помощью формального отображения $\Gamma \in \mathcal{L}_s(X, L_1(X, L_1(E)))$, называемого коэффициентом связности или символом Кристоффеля.

Коэффициент связности определяет ковариантную производную сечения ξ расслоения $V(X, E)$ вдоль векторного поля η:

$$\nabla^\Gamma : \mathfrak{A}_X \dotplus \mathcal{L}_s(X, E) \to \mathcal{L}_s(X, E),$$

$$\nabla^\Gamma_\eta\xi = \xi\#\eta + (\Gamma\cdot\eta)\cdot\xi.$$

Координатному преобразованию (g, Φ) расслоения отвечает преобразование коэффициента связности

$$S_{(g,\Phi)}\colon \Gamma \mapsto \Gamma_{(g,\Phi)} = \Big[\Big((\Phi\cdot\Gamma - \Phi')\cdot(g')^{-1}\Big)\cdot\Phi^{-1}\Big]\overset{s}{\circ} g^{-1}.$$

Предложение 5. *Справедливы соотношения*

а) $\nabla^\Gamma_{f\cdot\eta}\xi = f\cdot\nabla^\Gamma_\eta\xi$,

б) $\nabla^\Gamma_\eta f\cdot\xi = \xi\#\eta + f\cdot\nabla^\Gamma_\eta\xi$,

в) $S^*_{(g,\Phi)}\nabla^\Gamma_\eta\xi = \nabla^{\Gamma_{(g,\Phi)}}_{\eta_g}\xi_{(g,\Phi)}$,

г) $-\Gamma_{(g,\Phi)}\cdot\eta_g = S^2_{(g,\Phi)}(\eta, -\Gamma\cdot\eta)$,

где $S^2_{(g,\Phi)}$ *действует по формуле* (3).

Назовем сечение ξ в. р. $V(X, E)$ параллельным вдоль траекторий векторного поля η, если выполнено соотношение

$$\nabla^\Gamma_\eta\xi = 0.$$

Векторное поле η без нулевой компоненты порождает эволюционное семейство $u(t, \tau) \in \mathcal{L}_s(X)$ (см. [5]) сдвигов вдоль траекторий η, удовлетворяющее соотношениям

$$\frac{du}{dt} = \eta \overset{s}{\circ} u: \; u(\tau, \tau) = \mathrm{id},$$
$$u(t, \tau) = u(t, s) \overset{s}{\circ} u(s, \tau). \tag{4}$$

Предложение 6. *Линейное дифференциальное уравнение*

$$\frac{dU(t, \tau)}{dt} = -[(\Gamma \cdot \eta) \overset{s}{\circ} u(t, \tau)] \cdot U(t, \tau): \; U(\tau, \tau) = I_{X, E}$$

определяет вместе с (4) *эволюционную пару* $(u, U) \in \mathcal{L}_s(X) \times \mathcal{L}_s(X, L_1(E))$ *параллельного переноса вдоль траекторий* η, *имеющую свойство*

$$[U(t, s) \overset{s}{\circ} u(s, \tau)] \cdot U(s, \tau) = U(t, \tau), \quad t \geq s \geq \tau.$$

Сечение $\xi \in \mathcal{L}_s(X, E)$, удовлетворяющее условию

$$\xi \overset{s}{\circ} u(t, \tau) = U(t, \tau) \cdot \xi,$$

параллельно вдоль η.

Заметим, что при координатном преобразовании (g, Φ) паре (u, U) сопоставляется пара $(u_g, U_{(g, \Phi)})$, где

$$u_g(t, \tau) = g \overset{s}{\circ} u(t, \tau) \overset{s}{\circ} g^{-1},$$

$$U_{(g, \Phi)}(t, \tau) = \left[\left(\Phi \overset{s}{\circ} u(t, \tau) \right) \cdot U(t, \tau) \cdot \Phi^{-1} \right] \overset{s}{\circ} g^{-1},$$

причем $(u_g, U_{(g, \Phi)})$ определяет параллельный перенос вдоль η_g в связности $\Gamma_{(g, \Phi)}$.

1. *Далецкий Ю. Л., Белопольская Я. И.* Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия. – Киев: Выща шк., 1989. – 295 с.
2. *Арасланов М. Н., Далецкий Ю. Л.* Композиционный логарифм в классе формальных операторных степенных рядов // Функцион. анализ и его прил. – 1992. – **26**, № 2. – С. 57–60.
3. *Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
4. *Гельфанд И. М., Далецкий Ю. Л., Цыган Б. Л.* Об одном варианте некоммутативной дифференциальной геометрии // Докл. АН СССР. – 1989. – **308**, № 6. – С. 1293–1299.
5. *Daletskii Yu. L.* Algebra of compositions and non-linear equations // Algebraic and geometric methods in mathematical physics. – Netherlands: Kluwer Acad. Publ., 1996. – P. 277–291.
6. *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. – М.: Мир, 1973. – 188 с.

Получено 13.03.95