УДК 517.5

С. Б. Гембарська (Волин. ун-т, Луцьк),
П. В. Задерей (Держ. акад. легкої пром-ті України, Київ)

ПРО АБСОЛЮТНУ ЗБІЖНІСТЬ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ

A two-dimensional analog of the Hardy–Littlewood result on the absolute convergence of power series is obtained for the case of multiple series on the boundary of unit polydisk.

Одержано двовимірний аналог результату Харді і Літтлвуда про абсолютну збіжність степеневих рядів на випадок кратних рядів на межі одиничного полікруга.

Нехай $U = \{z : |z| < 1\}$. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $z \in U$, має обмежену варіацію, якщо при $z = e^{it}$ дійсна і уявна частини цього ряду є рядами Фур'є від функцій з обмеженою варіацією. Через $H^1(U)$ позначимо клас функцій Харді, тобто множину аналітичних в U функцій $f(z)$ таких, що

$$\sup_{0 \le r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(re^{it}) \right| dt < \infty.$$

Харді та Літтлвудом [1] (див. також [2, с. 455; 3]) доведено, що якщо степеневий ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ має обмежену варіацію, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \le \frac{1}{2} V,$$

де V — варіація функції $F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ на $|z| = 1$.

Нехай функція $f(x, y)$ задана на $P = \{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$. Зафіксуємо x_0 і позначимо через $\psi_1(x_0)$ варіацію функції $f(x_0, y)$ на відрізку $[c, d]$, а через $\psi_2(y_0)$ — варіацію $f(x, y_0)$ на відрізку $[a, b]$ при фіксованому y_0. Будемо вважати $f(x, y)$ такою, що $\psi_1(x)$ і $\psi_2(y)$ вимірні за Лебегом функції відповідно на $[a, b]$ і $[c, d]$.

Означення 1 [4]. *Функція $f(x, y)$ називається функцією з обмеженою варіацією в розумінні Тонеллі, якщо*

$$\int_a^b \psi_1(x)\, dx + \int_c^d \psi_2(y)\, dy < \infty. \tag{1}$$

Відомо, що $\psi_1(x) = \int\limits_c^d \left| d_y f(x, y) \right|$, $\psi_2(y) = \int\limits_a^b \left| d_x f(x, y) \right|$, причому останні інтеграли слід розуміти як інтеграли Стільтьєса. Тоді співвідношення (1) можна переписати у вигляді

$$\int_a^b \int_c^d \left| d_y f(x, y) \right| dx + \int_a^b \int_c^d \left| d_x f(x, y) \right| dy < \infty.$$

Означення 2. *Ряд $\sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} a_{k_1,k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2}$ має обмежену варіацію в розумінні Тонеллі, якщо при $z_1 = e^{it_1}$, $z_2 = e^{it_2}$ дійсна і уявна частини цього ряду є рядами Фур'є від функцій з обмеженою варіацією в розумінні Тонеллі.*

Множину всіх аналітичних функцій $f(z_1, z_2)$ в $U^2 = \{(z_1, z_2): |z_1| \le 1, |z_2| \le 1\}$ таких, що

$$\sup_{\substack{0 \le r_1 < 1 \\ 0 \le r_2 < 1}} \int_{T^2} \left| f\left(r_1 e^{it_1}, r_2 e^{it_2}\right) \right| dt_1\, dt_2 < \infty,$$

де $T^2 := \{(t_1, t_2): t_1 \in [-\pi, \pi],\ t_2 \in [-\pi, \pi]\}$, будемо позначати, як загально прийнято, через $H^1(U^2)$.

Метою цієї роботи є доведення наступного твердження.

Теорема. *Нехай степеневий ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l_1+l_2=k} z_1^{l_1} z_2^{l_2}$ *має обмежену варіацію в розумінні Тонеллі, тобто дійсна і уявна частини цього ряду при* $z_1 = e^{it_1}$, $z_2 = e^{it_2}$ *є рядами Фур'є функцій* $\Phi(t_1, t_2)$ *і* $\overline{\Phi}(t_1, t_2)$ *таких, що*

$$V(\Phi) + V(\overline{\Phi}) = \int_{T^2} \left| d_{t_1} \Phi(t_1, t_2) \right| dt_2 + \int_{T^2} \left| d_{t_2} \Phi(t_1, t_2) \right| dt_1 +$$

$$+ \int_{T^2} \left| d_{t_1} \overline{\Phi}(t_1, t_2) \right| dt_2 + \int_{T^2} \left| d_{t_2} \overline{\Phi}(t_1, t_2) \right| dt_1 < \infty.$$

Тоді

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \|F_k(\omega)\|_1 \le C\left(V(\Phi) + V(\overline{\Phi})\right),$$

де $F_k(\omega) = F_k(\omega_1, \omega_2) = \sum_{l_1+l_2=k} e^{i(l_1\theta_1 + l_2\theta_2)}$, $\omega_1 = e^{i\theta_1}$, $\omega_2 = e^{i\theta_2}$, C *— довільна додатна стала.*

Для доведення теореми нам буде потрібне допоміжне твердження, яке має і самостійний інтерес.

Лема. *Якщо ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l_1+l_2=k} z_1^{l_1} z_2^{l_2}$ *має обмежену варіацію в розумінні Тонеллі і*

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l_1+l_2=k} z_1^{l_1} z_2^{l_2}, \quad z = (z_1, z_2) \in U^2,$$

то

$$G(z) := z_1 f'_{z_1}(z_1, z_2) + z_2 f'_{z_2}(z_1, z_2) \in H^1(U^2).$$

Доведення. Відокремимо дійсну і уявну частини в ряді $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l_1+l_2=k} z_1^{l_1} z_2^{l_2}$ при $z_1 = r_1 e^{it_1}$, $z_2 = r_2 e^{it_2}$, при цьому будемо вважати, що $a_k = \alpha_k - i\beta_k$. Тоді

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k - i\beta_k) \sum_{l_1+l_2=k} r_1^{l_1} e^{it_1 l_1} r_2^{l_2} e^{it_2 l_2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k - i\beta_k) \sum_{l_1+l_2=k} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \left(\cos(l_1 t_1 + l_2 t_2) + i \sin(l_1 t_1 + l_2 t_2)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\alpha_k \sum_{l_1+l_2=k} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \cos(l_1 t_1 + l_2 t_2) + \beta_k \sum_{l_1+l_2=k} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \sin(l_1 t_1 + l_2 t_2)\Big) +$$

$$+\ i\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\alpha_k\sum_{l_1+l_2=k} r_1^{l_1} r_2^{l_2}\sin(l_1t_1+l_2t_2)-\beta_k\sum_{l_1+l_2=k} r_1^{l_1} r_2^{l_2}\cos(l_1t_1+l_2t_2)\Big).$$

За умовою леми існують функції $\Phi(t_1, t_2)$, $\overline{\Phi}(t_1, t_2)$ з обмеженими варіаціями в розумінні Тонеллі, тобто

$$\int_{T^2}\left|d_{t_1} F(t_1,t_2)\right|dt_2 + \int_{T^2}\left|d_{t_2} F(t_1,t_2)\right|dt_1 < \infty,$$

де $F(t_1, t_2)=\Phi(t_1, t_2)$, $\overline{\Phi}(t_1, t_2)$, і такі, що їх ряди Фур'є мають вигляд

$$S[\Phi] = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\alpha_k\sum_{l_1+l_2=k}\cos(l_1t_1+l_2t_2)+\beta_k\sum_{l_1+l_2=k}\sin(l_1t_1+l_2t_2)\right], \tag{2}$$

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi^2}\int_{T^2}\Phi(t_1,t_2)\cos(l_1t_1+l_2t_2)\,dt_1\,dt_2,$$

$$\beta_k = \frac{1}{2\pi^2}\int_{T^2}\Phi(t_1,t_2)\sin(l_1t_1+l_2t_2)\,dt_1\,dt_2, \quad \forall\, l_1, l_2 \mid l_1+l_2=k; \tag{3}$$

$$S[\overline{\Phi}] = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\beta_k\sum_{l_1+l_2=k}\cos(l_1t_1+l_2t_2)+\alpha_k\sum_{l_1+l_2=k}\sin(l_1t_1+l_2t_2)\right), \tag{4}$$

$$\beta_k = -\frac{1}{2\pi^2}\int_{T^2}\overline{\Phi}(t_1,t_2)\cos(l_1t_1+l_2t_2)\,dt_1\,dt_2,$$

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi^2}\int_{T^2}\overline{\Phi}(t_1,t_2)\sin(l_1t_1+l_2t_2)\,dt_1\,dt_2, \quad \forall\, l_1, l_2 \mid l_1+l_2=k. \tag{5}$$

Розглянемо ряди, які одержуються із рядів (2) і (4) диференціюванням по t_1 та t_2:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\beta_k\sum_{l_1+l_2=k} l_i\cos(l_1t_1+l_2t_2)-\alpha_k\sum_{l_1+l_2=k} l_i\sin(l_1t_1+l_2t_2)\right); \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k\sum_{l_1+l_2=k} l_i\cos(l_1t_1+l_2t_2)+\beta_k\sum_{l_1+l_2=k} l_i\sin(l_1t_1+l_2t_2)\right). \tag{7}$$

Покажемо, що ці ряди є рядами Фур'є – Стільтьєса відповідно для функцій $d_{t_i}\Phi(t_1,t_2)$, $d_{t_i}\overline{\Phi}(t_1,t_2)$, $i=1,2$. Враховуючи (3) і покладаючи $M=\{1,2\}$, маємо

$$l_i\beta_k = \frac{1}{2\pi^2}\int_{T^2} d_{t_i}\Phi(t_1,t_2)\cos(l_1t_1+l_2t_2)\,dt_{M\setminus i},$$

$$-\,l_i\alpha_k = \frac{1}{2\pi^2}\int_{T^2} d_{t_i}\Phi(t_1,t_2)\sin(l_1t_1+l_2t_2)\,dt_{M\setminus i}. \tag{8}$$

Аналогічно, враховуючи (5), знаходимо

$$l_i\alpha_k = \frac{1}{2\pi^2}\int_{T^2} d_{t_i}\overline{\Phi}(t_1,t_2)\cos(l_1t_1+l_2t_2)\,dt_{M\setminus i},$$

$$l_i\beta_k = \frac{1}{2\pi^2}\int_{T^2} d_{t_i}\overline{\Phi}(t_1,t_2)\sin(l_1t_1+l_2t_2)\,dt_{M\setminus i}. \tag{9}$$

Виходячи з (6) і (7), покладемо

$$\begin{aligned}\varphi_i(r,x) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\beta_k \sum_{l_1+l_2=k} l_i r_1^{l_1} r_2^{l_2}\cos(l_1t_1+l_2t_2) - \right.\\ &\left. - \alpha_k \sum_{l_1+l_2=k} l_i r_1^{l_1} r_2^{l_2}\sin(l_1t_1+l_2t_2)\right), \qquad i=1,2,\\ \overline{\varphi}_i(r,x) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k \sum_{l_1+l_2=k} l_i r_1^{l_1} r_2^{l_2}\cos(l_1t_1+l_2t_2) + \right.\\ &\left. + \beta_k \sum_{l_1+l_2=k} l_i r_1^{l_1} r_2^{l_2}\sin(l_1t_1+l_2t_2)\right), \qquad i=1,2.\end{aligned} \tag{10}$$

На основі рівностей (8) – (10) можна записати

$$\varphi_i(r,x) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{T^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l_1+l_2=k} r_1^{l_1} r_2^{l_2}\cos(l_1x_1+l_2x_2)\cos(l_1t_1+l_2t_2)\,d_{t_i}\Phi(t_1,t_2)\,dt_{M\setminus i} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi^2}\int_{T^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l_1+l_2=k} r_1^{l_1} r_2^{l_2}\sin(l_1x_1+l_2x_2)\sin(l_1t_1+l_2t_2)\,d_{t_i}\Phi(t_1,t_2)\,dt_{M\setminus i} =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\int_{T^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l_1+l_2=k} r_1^{l_1} r_2^{l_2}\cos\big(l_1(t_1-x_1)+l_2(t_2-x_2)\big)\,d_{t_i}\Phi(t_1,t_2)\,dt_{M\setminus i}.$$

Аналогічно

$$\overline{\varphi}_i(r,x) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{T^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l_1+l_2=k} r_1^{l_1} r_2^{l_2}\cos\big(l_1(t_1-x_1)+l_2(t_2-x_2)\big)\,d_{t_i}\overline{\Phi}(t_1,t_2)\,dt_{M\setminus i}.$$

Справедлива рівність

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l_1+l_2=k} r_1^{l_1} r_2^{l_2}\cos\big(l_1(t_1-x_1)+l_2(t_2-x_2)\big) = \frac{1}{2}\Big(P_{r_1}(t_1-x_1)+P_{r_2}(t_2-x_2)\Big) +$$

$$+ P_{r_1}(t_1-x_1)\,P_{r_2}(t_2-x_2) - Q_{r_1}(t_1-x_1)\,Q_{r_2}(t_2-x_2) - \frac{3}{4},$$

де

$$P_{r_i}(t_i-x_i) = \frac{1}{2} + \sum_{l_i=1}^{\infty} r_i^{l_i}\cos l_i(t_i-x_i),$$

$$Q_{r_i}(t_i-x_i) = \sum_{l_i=1}^{\infty} r_i^{l_i}\sin l_i(t_i-x_i), \quad i=1,2.$$

Тоді

$$\psi_i(r,x) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{T^2}\left(\frac{1}{2}\Big(P_{r_1}(t_1-x_1)+P_{r_2}(t_2-x_2)\Big) + P_{r_1}(t_1-x_1)\,P_{r_2}(t_2-x_2) - \right.$$

$$\left. - Q_{r_1}(t_1-x_1)\,Q_{r_2}(t_2-x_2) - \frac{3}{4}\right) d_{t_i}F(t_1,t_2)\,dt_{M\setminus i},$$

де

$$\psi_i(r,x) = \varphi_i(r,x),\ \overline{\varphi}_i(r,x), \quad F(t_1,t_2) = \Phi(t_1,t_2),\ \overline{\Phi}(t_1,t_2).$$

Оскільки $\Phi(t_1,t_2)$ — функція обмеженої варіації, то функції

$$P(x_1,x_2) = -\frac{1}{\pi^2}\int_{T^2} Q_{r_1}(t_1-x_1)\,Q_{r_2}(t_2-x_2)\,d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\,dt_2,$$

$$R(x_1,x_2) = \frac{1}{\pi^2}\int_{T^2} P_{r_1}(t_1-x_1)\,P_{r_2}(t_2-x_2)\,d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\,dt_2 -$$

$$-\frac{1}{2\pi^2}\int_{T^2}\left(\frac{1}{2}\left(P_{r_1}(t_1-x_1)+P_{r_2}(t_2-x_2)\right)\right)d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\,dt_2$$

є неперервними і для них справедлива рівність

$$P(x_1,x_2) = R(x_1,x_2). \tag{11}$$

Для встановлення цієї рівності, використовуючи теорему Фубіні, знайдемо коефіцієнти Фур'є функцій $P(x_1,x_2)$ і $R(x_1,x_2)$. При $l_i = 1,2,\ldots,\infty$, $i=1,2$, маємо

$$a_{l_1,l_2}(P) = \frac{1}{\pi^2}\int_{T^2}\left(-\frac{1}{\pi^2}\int_{T^2} Q_{r_1}(t_1-x_1)Q_{r_2}(t_2-x_2)\,d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\,dt_2\right)\cos l_1x_1\cos l_2x_2\,dx_1\,dx_2 =$$

$$= -\frac{1}{\pi^2}\int_{T^2} d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\left(\frac{1}{\pi^2}\int_{T^2} Q_{r_1}(t_1-x_1)Q_{r_2}(t_2-x_2)\cos l_1x_1\cos l_2x_2\,dx_1\,dx_2\right)dt_2 =$$

$$= l_1\beta_{l_1+l_2}\,r_1^{l_1}r_2^{l_2}, \tag{12}$$

$$a_{l_1,l_2}(R) = a'_{l_1,l_2} - a''_{l_1,l_2},$$

$$a'_{l_1,l_2} = \frac{1}{\pi^2}\int_{T^2}\left(\frac{1}{\pi^2}\int_{T^2} P_{r_1}(t_1-x_1)\,P_{r_2}(t_2-x_2)\,d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\,dt_2\right)\cos l_1x_1\cos l_2x_2\,dx_1\,dx_2 =$$

$$= l_1\beta_{l_1+l_2}\,r_1^{l_1}r_2^{l_2},$$

$$a''_{l_1,l_2} = \frac{1}{\pi^2}\int_{T^2}\left(\frac{1}{\pi^2}\int_{T^2}\left(P_{r_1}(t_1-x_1)\right.\right. +$$

$$\left.\left. + P_{r_2}(t_2-x_2)\right)d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\,dt_2\right)\cos l_1x_1\cos l_2x_2\,dx_1\,dx_2 = 0,$$

$$a_{l_1,l_2}(R) = l_1\beta_{l_1+l_2}\,r_1^{l_1}r_2^{l_2}. \tag{13}$$

При $l_1 = \overline{1,\infty}$, $l_2 = 0$ маємо

$$a_{l_1,0}(P) = 0, \tag{14}$$

$$a_{l_1,0}(R) = a'_{l_1,0} - a''_{l_1,0}, \qquad a'_{l_1,0} = \frac{1}{2}l_1\beta_{l_1}r_1^{l_1},$$

$$a''_{l_1,0} = \frac{1}{\pi^2}\int_{T^2} d_{t_1}\Phi(t_1,t_2)\cos l_1t_1\,dt_2\,\frac{1}{4\pi^2}\int_{T^2}\left(P_{r_1}(u_1)+P_{r_2}(u_2)\right)\cos l_1u_1\,du_1\,du_2 =$$

$$= \frac{1}{2}r_1^{l_1}\beta_{l_1}\,l_1, \tag{15}$$

$$a_{l_1,0}(R) = 0.$$

З рівностей (12) – (15) випливає, що $a_{l_1,l_2}(P) = a_{l_1,l_2}(R)$. Аналогічно можна показати рівність відповідних інших коефіцієнтів Фур'є цих функцій, що й доводить рівність (11). Таким же чином встановлюються наступні рівності:

$$-\frac{1}{\pi^2}\int_{T^2} Q_{r_1}(t_1-x_1)\,Q_{r_2}(t_2-x_2)\,d_{t_i}F(t_1,t_2)dt_{M\setminus i} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{T^2} P_{r_1}(t_1-x_1)P_{r_2}(t_2-x_2)d_{t_i}F(t_1,t_2)dt_{M\setminus i} -$$

$$-\frac{1}{2\pi^2}\int_{T^2}\frac{1}{2}\Big(P_{r_1}(t_1-x_1)+P_{r_2}(t_2-x_2)\Big)d_{t_i}F(t_1,t_2)dt_{M\setminus i},$$

де $F(t_1,t_2) = \Phi(t_1,t_2)$, $\overline{\Phi}(t_1,t_2)$, $i = 1, 2$.

Тоді

$$\psi_i(r,x) = \frac{1}{\pi^2}\int_{T^2} P_{r_1}(t_1-x_1)P_{r_2}(t_2-x_2)d_{t_i}F(t_1,t_2)dt_{M\setminus i} +$$

$$+\frac{1}{8\pi^2}\int_{T^2}\Big(P_{r_1}(t_1-x_1)+P_{r_2}(t_2-x_2)\Big)d_{t_i}F(t_1,t_2)dt_{M\setminus i} - \frac{3}{8\pi^2}\int_{T^2} d_{t_i}F(t_1,t_2)dt_{M\setminus i},$$

де $\psi_i(r,x) = \varphi_i(r,x)$, $\overline{\varphi}_i(r,x)$, $i = 1, 2$.

Оцінимо модулі функцій $\varphi_i(r,x)$, $i = 1, 2$:

$$|\varphi_i(r,x)| \le \frac{1}{\pi^2}\int_{T^2} P_{r_1}(t_1-x_1)P_{r_2}(t_2-x_2)\left|d_{t_i}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_{M\setminus i} +$$

$$+\frac{1}{8\pi^2}\int_{T^2} P_{r_1}(t_1-x_1)\left|d_{t_i}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_{M\setminus i} + \frac{1}{8\pi^2}\int_{T^2} P_{r_2}(t_2-x_2)\left|d_{t_i}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_{M\setminus i} +$$

$$+\frac{3}{8\pi^2}\int_{T^2}\left|d_{t_i}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_{M\setminus i}, \quad i = 1, 2.$$

Проінтегрувавши цю нерівність по x_1, x_2, одержимо

$$\int_{T^2}|\varphi_i(r,x)|dx_1\,dx_2 \le$$

$$\le \frac{1}{\pi^2}\int_{T^2}\left|d_{t_i}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_{M\setminus i}\int_{T^2} P_{r_1}(t_1-x_1)P_{r_2}(t_2-x_2)dx_1\,dx_2 +$$

$$+\frac{1}{8\pi^2}\int_{T^2}\left|d_{t_i}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_{M\setminus i}\int_{T^2} P_{r_1}(t_1-x_1)dx_1\,dx_2 +$$

$$+\frac{1}{8\pi^2}\int_{T^2}\left|d_{t_i}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_{M\setminus i}\int_{T^2} P_{r_2}(t_2-x_2)dx_1\,dx_2 +$$

$$+\frac{3}{8\pi^2}\int_{T^2}\left|d_{t_i}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_{M\setminus i}\int_{T^2} dx_1\,dx_2 =$$

$$= \int_{T^2}\left|d_{t_i}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_{M\setminus i} + \frac{1}{2}\int_{T^2}\left|d_{t_i}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_{M\setminus i} + \frac{3}{2}\int_{T^2}\left|d_{t_i}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_{M\setminus i} =$$

$$= 3\int_{T^2}\left|d_{t_i}\Phi(t_1,t_2)\right|dt_{M\setminus i}.$$

Аналогічно одержимо таку ж оцінку для $\int\limits_{T^2} |\overline{\varphi}_i(r, x)| dx_1\, dx_2$ через функцію $\overline{\Phi}(t_1, t_2)$. Отже,

$$\int\limits_{T^2} (|\varphi_1(r, x)| + |\varphi_2(r, x)| + |\overline{\varphi}_1(r, x)| + |\overline{\varphi}_2(r, x)|)\, dx_1\, dx_2 \le$$

$$\le C\Big(\int\limits_{T^2} \Big| d_{t_1} \Phi(t_1, t_2) \Big| dt_2 + \int\limits_{T^2} \Big| d_{t_2} \Phi(t_1, t_2) \Big| dt_1 +$$

$$+ \int\limits_{T^2} \Big| d_{t_1} \overline{\Phi}(t_1, t_2) \Big| dt_2 + \int\limits_{T^2} \Big| d_{t_2} \overline{\Phi}(t_1, t_2) \Big| dt_1 =$$

$$= C\big(V(\Phi) + V(\overline{\Phi}) \big),$$

де $V(\Phi)$, $V(\overline{\Phi})$ — варіації функцій Φ, $\overline{\Phi}$ в розумінні Тонеллі.

З іншого боку,

$$f'_{z_1}(z_1, z_2) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{l_1 + l_2 = k} l_1 z_1^{l_1 - 1} z_2^{l_2},$$

$$f'_{z_2}(z_1, z_2) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{l_1 + l_2 = k} l_2 z_1^{l_1} z_2^{l_2 - 1}.$$

Тоді при $z = re^{ix}$ маємо

$$G(z) = z_1 f'_{z_1}(z_1, z_2) + z_2 f'_{z_2}(z_1, z_2) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{l_1 + l_2 = k} l_1 z_1^{l_1} z_2^{l_2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{l_1 + l_2 = k} l_2 z_1^{l_1} z_2^{l_2} =$$

$$= (\overline{\varphi}_1(r, x) + \overline{\varphi}_2(r, x)) - i(\varphi_1(r, x) + \varphi_2(r, x)).$$

Дійсна і уявна частини $G(re^{ix})$ відповідно рівні $\overline{\varphi}_1(r, x) + \overline{\varphi}_2(r, x)$ і $\varphi_1(r, x) + \varphi_2(r, x)$, а тому

$$\int\limits_{T^2} \Big| G(re^{ix}) \Big| dx_1\, dx_2 \le \int\limits_{T^2} (|\overline{\varphi}_1(r, x)| + |\overline{\varphi}_2(r, x)| + |\varphi_1(r, x)| + |\varphi_2(r, x)|)\, dx_1\, dx_2 \le$$

$$\le C\big(V(\Phi) + V(\overline{\Phi}) \big),$$

тобто інтеграл залишається обмеженим при $r_1 \to 1$, $r_2 \to 1$. Це означає, що функція $G(z) \in H^1(U^2)$. Лему доведено.

Доведення теореми. Покажемо, що для функції

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k(z_1, z_2) \in H^1(U^2),$$

де $F_k(z_1, z_2) = \sum\limits_{l_1 + l_2 = k} z_1^{l_1} z_2^{l_2}$, справедлива нерівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} \| F_k(\omega) \|_1 \le C \int\limits_{T^2} \Big| f(e^{it_1}, e^{it_2}) \Big| dt_1\, dt_2. \tag{16}$$

Відомо [2], що якщо $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k \in H^1(U)$, то $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{|b_k|}{k+1} \le \pi \int\limits_0^{2\pi} \Big| f(e^{it}) \Big| dt$.

Застосуємо цю нерівність до функції [5]

$$f_\omega(\lambda) = f(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k(\omega)\lambda^k,$$

де $\omega \in Q^2 = \{(z_1, z_2) : |z_1| = 1, \ |z_2| = 1\}$, $\lambda \in U$. Будемо мати

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k| \|F_k(\omega)\|_1}{k+1} \le \pi \int_0^{2\pi} \left| f_\omega(e^{it}) \right| dt = \pi \int_0^{2\pi} \left| f\left(e^{i(t+\theta_1)}, e^{i(t+\theta_2)}\right) \right| dt.$$

Проінтегрувавши цю нерівність по θ_1, θ_2, одержимо

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k| \|F_k(\omega)\|_1}{k+1} \le \frac{1}{2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| f\left(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}\right) \right| d\theta_1 \, d\theta_2,$$

де

$$\|F_k(\omega)\|_1 = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| F_k\left(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}\right) \right| d\theta_1 \, d\theta_2, \qquad F_k(\omega) = \sum_{l_1 + l_2 = k} e^{il_1\theta_1} e^{il_2\theta_2}.$$

За функцію $f(z_1, z_2)$ можна взяти $G(z)$. Згідно з лемою, $G(z) \in H^1(U^2)$. Оскільки

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{l_1 + l_2 = k} (l_1 + l_2) z_1^{l_1} z_2^{l_2} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \sum_{l_1 + l_2 = k} z_1^{l_1} z_2^{l_2},$$

то з (1б) випливає наступна нерівність:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|k a_k|}{k} \|F_k(\omega)\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \|F_k(\omega)\|_1 \le C \int_{T^2} \left| G\left(e^{it_1}, e^{it_2}\right) \right| dt_1 \, dt_2 \le$$

$$\le C\left(V(\Phi) + V(\overline{\Phi})\right) < +\infty.$$

Теорему доведено.

Наслідок. *Якщо степеневий ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l_1 + l_2 = k} z_1^{l_1} z_2^{l_2}$ *має обмежену варіацію в розумінні Тонеллі, то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \ln(k+2) < C\left(V(\Phi) + V(\overline{\Phi})\right).$$

Доведення. Перетворимо вираз $F_k(\omega) = \sum_{l_1 + l_2 = k} e^{il_1\theta_1} e^{il_2\theta_2}$:

$$F_k(\omega) = \sum_{l_1 + l_2 = k} e^{il_1\theta_1} e^{il_2\theta_2} = \frac{e^{ik\theta_2} - e^{ik\theta_1} e^{i\theta_1} e^{-i\theta_2}}{1 - e^{i\theta_1} e^{-i\theta_2}} =$$

$$= \frac{e^{i(k+1)\theta_2} - e^{i(k+1)\theta_1}}{e^{i\theta_2} - e^{i\theta_1}} = \frac{\sin \frac{k+1}{2}(\theta_1 - \theta_2)}{\sin \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)} e^{i\frac{k}{2}(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Оскільки $F_k\left(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}\right)$ — 2π-періодична функція за кожною змінною θ_1 і θ_2, то

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| F_k\left(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}\right) \right| d\theta_1 \, d\theta_2 = \iint_D \left| F_k\left(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}\right) \right| d\theta_1 \, d\theta_2,$$

де D обмежена прямими: $\theta_1 + \theta_2 = -\pi$, $\theta_1 + \theta_2 = 3\pi$, $\theta_1 - \theta_2 = -\pi$, $\theta_1 - \theta_2 = \pi$.

Таким чином,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|F_k\left(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2}\right)\right|d\theta_1\,d\theta_2 = \iint_D\left|\frac{\sin\frac{k+1}{2}(\theta_1-\theta_2)}{\sin\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)}e^{i\frac{k}{2}(\theta_1+\theta_2)}\right|d\theta_1\,d\theta_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{3\pi}\left|\frac{\sin\frac{k+1}{2}u}{\sin\frac{1}{2}u}e^{i\frac{k}{2}v}\right|du\,dv = 2\pi\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin\frac{k+1}{2}u}{\sin\frac{1}{2}u}\right|du =$$

$$= 8\pi\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin\frac{k+1}{2}u}{u}\right|du + O\left(\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{k+1}{2}u\right|\left|\frac{1}{\sin\frac{u}{2}}-\frac{2}{u}\right|du\right) =$$

$$= 8\pi\int_0^{\frac{k+1}{2}\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx + O(1) = 8\pi\sum_{l=1}^{k}\int_{l\pi}^{(l+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx + O(1) \geq$$

$$\geq 8\pi\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{(l+1)\pi}\int_{l\pi}^{(l+1)\pi}|\sin x|dx + O(1) =$$

$$= 16\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l+1} + O(1) = 16\ln(k+2)+O(1).$$

Звідси маємо

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\ln(k+2) \leq \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\,\|F_k(\omega)\|_1 \leq$$

$$\leq C\int_{T^2}\left|G\left(e^{it_1},e^{it_2}\right)\right|dt_1\,dt_2 \leq C\left(V(\Phi)+V(\overline{\Phi})\right) < +\infty.$$

Наслідок доведено.

1. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Some new properties of Fourier constants // Math. Ann. – 1926. – **97**. – P. 159 – 209.
2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. В 2-х т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.
3. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 936 с.
4. *Витушкин А. Г.* О многомерных вариациях. – М.: Гос. изд-во техн. лит., 1955. – 220 с.
5. *Рудин У.* Теория функций в поликруге. – М.: Мир, 1974. – 160 с.

Одержано 08.04.98,
після доопрацювання — 25.12.98