УДК 517.9

Ю. В. Теплинский, В. А. Недокис (Камен.-Подол. пед. ун-т)

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ В ТЕОРИИ МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

We present the reduction of a countable system of differential equations with countably-point boundary conditions to the case of finite-dimensional multipoint boundary-value problem. We separately consider the case of a linear system.

Наведено редукцію зліченної системи диференціальних рівнянь із зліченноточковими крайовими умовами до випадку скінченновимірної багатоточкової крайової задачі. Окремо розглянуто випадок лінійної системи.

В последние годы решению многоточечных краевых задач посвящено достаточно много исследований, большинство из которых касается конечномерных систем дифференциальных уравнений в пространстве $\mathbb{R}^n$ (см., например, [1 – 6]). Естественный интерес представляет изучение поведения решений краевых задач при $n \to \infty$, что приводит к рассмотрению исходной системы и краевых условий в пространствах числовых последовательностей. Из немногих работ, затрагивающих эту тематику, отметим [7, 8]. В настоящей работе мы ограничимся пространством $\mathfrak{M}$ числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ с нормой $\|x\| = \sup_n |x_n|$, в котором рассмотрим краевую задачу для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{1}$$

со счетноточечным краевым условием

$$A_0 x(0) + \sum_{i=1}^{\infty} A_i x(t_i) + Cx(T) = d. \tag{2}$$

Здесь $A_i = \left[a_{jk}^{(i)}\right]_{j,k=1}^{\infty}$, $i = 0, 1, 2, \dots$, и $C = \left[c_{jk}\right]_{j,k=1}^{\infty}$ — бесконечные матрицы; $x, d \in \mathfrak{M}$; $f = (f_1, f_2, f_3 \dots)$, $t \in [0; T] \subset \mathbb{R}^1$.

Обозначим

$$\overset{(n)}{x} = (x_1, \dots, x_n), \qquad \overset{(n)}{d} = (d_1, \dots, d_n), \qquad \overset{(n)}{f} = (f_1, \dots, f_n),$$

$$f(t, \overset{(n)}{x}) = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots), \qquad \overset{(n)}{A_i} = \left[a_{jk}^{(i)}\right]_{j,k=1}^{n}, \qquad \overset{(n)}{C} = \left[c_{jk}\right]_{j,k=1}^{n},$$

и наряду с краевой задачей (1), (2) рассмотрим краевые задачи для уравнения (1) с многоточечным краевым условием

$$A_0 x(0) + \sum_{i=1}^{p} A_i x(t_i) + Cx(T) = d, \tag{3}$$

и для уравнения

$$\frac{d\overset{(n)}{x}}{dt} = \overset{(n)}{f}(t, \overset{(n)}{x}) \tag{4}$$

с краевым условием вида

$$\overset{(n)}{A_0}\,\overset{(n)}{x}(0) + \sum_{i=1}^{p} \overset{(n)}{A_i}\,\overset{(n)}{x}(t_i) + \overset{(n)}{C}\,\overset{(n)}{x}(T) = \overset{(n)}{d}. \tag{5}$$

Последняя краевая задача является конечномерной и детально изучена в работах [2, 4 – 6].

Допустим, что функция $f(t, x)$ определена и непрерывна в области $D_0 = [0; T] \times D$, где D — замкнутое ограниченное множество в пространстве $\mathfrak{M}$, и в этой области выполняются неравенства

$$\|f(t, x)\| \le M = \text{const} > 0, \tag{6}$$

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \le K\|x_1 - x_2\|, \quad K = \text{const} > 0, \quad x_1, x_2 \in D.$$

Норму матрицы $A = \left[a_{ij}\right]_{i, j=1}^{\infty}$, согласованную с векторной нормой пространства $\mathfrak{M}$, зададим формулой

$$\|A\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} \left|a_{ij}\right|$$

и предположим, что матрицы A_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, и C ограничены по норме, причем:

а) ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \|A_i\|$ сходится;

б) для матрицы $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{T} A_i + C$ существует обратная матрица H;

в) $\frac{KT}{2}\left[1 + \|H\| \sum_{i=1}^{\infty} \|A_i\|\right] < 1.$

Положим

$$\beta_1(x) = \left\| H\left[d - \left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i + C\right)x\right]\right\| + \sum_{i=1}^{\infty} \|HA_i\| \alpha_1(t_i) M,$$

$$\alpha_1(t) = 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right), \qquad \beta = \frac{T}{2}M + \beta_1(x).$$

Используя линейные операторы

$$Sf(t) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt, \qquad Lf(t) = \int_0^t (f(s) - Sf(t))\,ds,$$

сформулируем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* а) – в) *и неравенства* (6). *Тогда для любой точки* x_0, *принадлежащей области* D *вместе со своей* β-*окрестностью, существует единственное управление* $\Delta(x_0) \in \mathfrak{M}$, *при котором решение* $x = x^*(t, x_0)$ *уравнения*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \Delta(x_0)$$

такое, что $x^*(0, x_0) = x_0$, *удовлетворяет также краевому условию* (2). *Для того чтобы функция* $x^*(t, x_0)$ *была решением краевой задачи* (1), (2), *необходимо и достаточно, чтобы* $\Delta(x_0) = 0$. *При этом*

$$\Delta(x_0) = \frac{1}{T}H\left\{d - \left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i + C\right)x_0 - \sum_{i=1}^{\infty} A_i Lf\left(t_i, x^*(t, x_0)\right)\right\} - Sf\left(t, x^*(t, x_0)\right),$$

а $x^*(t, x_0)$ *является предельной функцией последовательности*

$$x_m(t, x_0) = x_0 + Lf(t, x_{m-1}(t, x_0)) +$$
$$+ \frac{t}{T} H \left\{ d - \left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i + C \right) x_0 - \sum_{i=1}^{\infty} A_i Lf(t_i, x_{m-1}(t, x_0)) \right\}.$$

Доказательство аналогично доказательству теорем 1 – 3 из [5], поэтому мы его здесь не приводим.

Предположим теперь, что:

г) для матрицы $\sum_{i=1}^{p} \frac{t_i}{T} A_i + C$ существует обратная матрица H_p;

д) $\frac{KT}{2}\left[1 + \| H_p \| \sum_{i=1}^{\infty} \| A_i \| \right] < 1$,

и введем обозначения

$$\beta_{1p}(x) = \left\| H_p \left[d - \left(\sum_{i=0}^{p} A_i + C \right) x \right] \right\| + \sum_{i=1}^{p} \| H_p A_i \| \alpha_1(t_i) M,$$
$$\beta_p = \frac{T}{2} M + \beta_{1p}(x).$$

Легко видеть, что из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

***Следствие* 1.** *Пусть выполняются условия* г), д) *и неравенства* (6). *Тогда для любой точки* x_0, *принадлежащей области* D *вместе со своей* β_p-*окрестностью, существует единственное управление* $\Delta_p(x_0) \in \mathfrak{M}$, *при котором решение* $x = x_p(t, x_0)$ *уравнения*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \Delta_p(x_0)$$

такое, что $x_p(0, x_0) = x_0$, *удовлетворяет также краевому условию* (3). *Для того чтобы функция* $x_p(0, x_0)$ *была решением краевой задачи* (1), (3), *необходимо и достаточно, чтобы* $\Delta_p(x_0) = 0$. *При этом*

$$\Delta_p(x_0) = \frac{1}{T} H_p \left\{ d - \left(\sum_{i=0}^{p} A_i + C \right) x_0 - \sum_{i=1}^{p} A_i Lf\big(t_i, x_p(t, x_0)\big) \right\} - Sf\big(t, x_p(t, x_0)\big), \quad (7)$$

а $x_p(t, x_0)$ *является предельной функцией последовательности*

$$x_{pm}(t, x_0) = x_0 + Lf\big(t, x_{pm-1}(t, x_0)\big) +$$
$$+ \frac{t}{T} H_p \left\{ d - \left(\sum_{i=0}^{p} A_i + C \right) x_0 - \sum_{i=1}^{p} A_i Lf\big(t_i, x_{pm-1}(t, x_0)\big) \right\}.$$

И, наконец, предположим, что:

е) для матрицы $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{T} \overset{(n)}{A}_i + \overset{(n)}{C}$ существует обратная матрица $\overset{(n)}{H}_p$;

ж) $\frac{KT}{2}\left[1 + \| \overset{(n)}{H}_p \| \sum_{i=1}^{\infty} \| A_i \| \right] < 1$.

Обозначив

$$\overset{(n)}{\beta}_{1p}(\overset{(n)}{x}) = \left\| \overset{(n)}{H}_p \left[\overset{(n)}{d} - \left(\sum_{i=0}^{p} \overset{(n)}{A}_i + \overset{(n)}{C} \right) \overset{(n)}{x} \right] \right\| + \sum_{i=1}^{p} \left\| \overset{(n)}{H}_p \overset{(n)}{A}_i \right\| \alpha_1(t_i) M,$$

$$\overset{(n)}{\beta}_p = \frac{T}{2} M + \overset{(n)}{\beta}_{1p}(\overset{(n)}{x}),$$

сформулируем еще одно утверждение, вытекающее из теоремы 1 (или из следствия 1).

Следствие 2. *Пусть выполняются условия* е), ж) *и неравенства* (6). *Тогда для любой точки* $\overset{(n)}{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ *такой, что точка* $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}, 0, 0, \ldots)$ *принадлежит области* D *вместе со своей* β_p*-окрестностью, существует единственное управление* $\overset{(n)}{\Delta}_p(\overset{(n)}{x}_0) \in \mathbb{R}^n$, *при котором решение* $\overset{(n)}{x}_p = \overset{(n)}{x}_p(t, \overset{(n)}{x}_0)$ *уравнения*

$$\frac{d\overset{(n)}{x}}{dt} = f(t, \overset{(n)}{x}) + \overset{(n)}{\Delta}_p(\overset{(n)}{x}_0) \tag{8}$$

такое, что $\overset{(n)}{x}_p(0, \overset{(n)}{x}_0) = \overset{(n)}{x}_0$, *удовлетворяет также краевому условию* (5). *Для того чтобы функция* $\overset{(n)}{x}_p(t, \overset{(n)}{x}_0)$ *была решением краевой задачи* (4), (5), *необходимо и достаточно, чтобы* $\overset{(n)}{\Delta}_p(\overset{(n)}{x}_0) = 0$. *При этом*

$$\overset{(n)}{\Delta}_p(\overset{(n)}{x}_0) =$$

$$= \frac{1}{T} \overset{(n)}{H}_p \left\{ \overset{(n)}{d} - \left(\sum_{i=0}^{p} \overset{(n)}{A}_i + \overset{(n)}{C} \right) \overset{(n)}{x}_0 - \sum_{i=1}^{p} \overset{(n)}{A}_i L \overset{(n)}{f}\left(t_i, x_p(t, \overset{(n)}{x}_0)\right) \right\} - S \overset{(n)}{f}\left(t, \overset{(n)}{x}_p(t, \overset{(n)}{x}_0)\right), \tag{9}$$

а $\overset{(n)}{x}_p(0, \overset{(n)}{x}_0)$ *является предельной функцией последовательности*

$$\overset{(n)}{x}_{pm}(t, \overset{(n)}{x}_0) = \overset{(n)}{x}_0 + L \overset{(n)}{f}\left(t, \overset{(n)}{x}_{p\,m-1}(t, \overset{(n)}{x}_0)\right) +$$

$$+ \frac{t}{T} \overset{(n)}{H}_p \left\{ \overset{(n)}{d} - \left(\sum_{i=0}^{p} \overset{(n)}{A}_i + \overset{(n)}{C} \right) \overset{(n)}{x}_0 - \sum_{i=1}^{p} \overset{(n)}{A}_i L \overset{(n)}{f}\left(t_i, \overset{(n)}{x}_{p\,m-1}(t, \overset{(n)}{x}_0)\right) \right\}. \tag{10}$$

Говорят, что функция $f(t, x)$ принадлежит пространству $\hat{C}_{\mathrm{Lip}}(x)$ в области D_0, если в этой области

$$\| f(t, x') - f(t, x'') \| \leq \alpha(t) \varepsilon(m) \| x' - x'' \|, \tag{11}$$

где

$$x' = \left(x_1, \ldots, x_m, x'_{m+1}, x'_{m+2}, \ldots\right), \qquad x'' = \left(x_1, \ldots, x_m, x''_{m+1}, x''_{m+2}, \ldots\right)$$

— две произвольные точки данной области D, первые m координат которых совпадают, $\alpha(t)$ — непрерывная функция от t, $\varepsilon(m) \to 0$ при $m \to \infty$.

Обозначим через D_β множество точек $x \in \mathfrak{M}$, принадлежащих области D вместе со своей β-окрестностью.

Введем обозначение

$$\beta^*(x) = \frac{2/KT-1}{\sum_{i=1}^{\infty}\|A_i\|}\left(\|d\|+\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|A_i\|+\|C\|\right)\|x\|\right)+\frac{M}{K}.$$

Поскольку $\beta(x) \leq \beta^*(x)$, $\beta_p(x) \leq \beta^*(x)$, $\overset{(n)}{\beta}_p(\overset{(n)}{x}) \leq \beta^*(x)$ при произвольных натуральных значениях p и n, из включения $x \in D_{\beta^*}$ сразу следуют включения $x \in D_\beta$ и $x \in D_{\beta_p}$. Включение $\overset{(n)}{x} \in D_{\overset{(n)}{\beta}_p}$ следует из неравенств

$$\left\|\overset{(n)}{x}\right\| \leq \|x\| \leq M-\beta^* \leq M-\overset{(n)}{\beta}_p.$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Предположим, что* $D_{\beta^*} \neq \varnothing$ *и* $f(t,x) \in \hat{C}_{\mathrm{Lip}}(x)$ *в области* D_0. *Пусть для некоторого натурального* p *и для всех натуральных* n *выполняются условия следствий* 1 *и* 2. *Тогда для любого* $x_0 \in D_{\beta^*}$

$$\lim_{n\to\infty}\overset{(n)}{x}_p(t,\overset{(n)}{x}_0) = x_p(t,x_0) \tag{12}$$

в слабом смысле (покоординатно).

Доказательство. В условиях сформулированной теоремы для произвольного натурального n существует единственное управление $\overset{(n)}{\Delta}_p(\overset{(n)}{x}_0)$, о котором шла речь в следствии 2. Обозначая выражение

$$\overset{(n)}{H}_p\left(\sum_{i=0}^{p}\overset{(n)}{A}_i+\overset{(n)}{C}\right)$$

через $\overset{(n)}{R}_p$, с учетом представления (9) и условия ж) получаем неравенства

$$\left\|\overset{(n)}{\Delta}_p(\overset{(n)}{x}_0)\right\| \leq \frac{1}{T}\left(\left\|\overset{(n)}{H}_p\overset{(n)}{d}\right\|+\left\|\overset{(n)}{R}_p\overset{(n)}{x}_0\right\|\right)+M\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\left\|\overset{(n)}{H}\overset{(n)}{A}_i\right\|+1\right) \leq$$

$$\leq \left\|\overset{(n)}{H}_p\right\|\left(\frac{1}{T}\|d\|+\frac{1}{T}\|x_0\|\left(\sum_{i=0}^{p}\|A_i\|+\|C\|\right)+\frac{M}{2}\sum_{i=1}^{p}\|A_i\|\right)+M <$$

$$< \frac{2/KT-1}{T\sum_{i=1}^{\infty}\|A_i\|}\left(\|d\|+\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|A_i\|+\|C\|\right)\|x_0\|+\frac{MT}{2}\sum_{i=1}^{p}\|A_i\|\right)+M = M' = \mathrm{const} < \infty.$$

В силу равномерной ограниченной последовательности $\left\{\overset{(n)}{\Delta}_p(\overset{(n)}{x}_0)\right\}$ из нее с помощью метода диагонализации можно выделить подпоследовательность $\left\{\overset{(k)}{\Delta}_p(\overset{(k)}{x}_0)\right\}$, сходящуюся при $k\to\infty$ к некоторой точке $\Delta_p^0(x_0) \in \mathfrak{M}$ по координатам. Запишем последовательность уравнений вида (8) при $n=k$:

$$\frac{d\overset{(k)}{x}}{dt} = \overset{(k)}{f}(t,\overset{(k)}{x})+\overset{(k)}{\Delta}_p(\overset{(k)}{x}_0), \qquad \overset{(k)}{x}_p(0) = \overset{(k)}{x}_0. \tag{13}$$

Решение $\overset{(k)}{x}_p(t,\overset{(k)}{x}_0)$ уравнения (13) запишем в виде

$$\overset{(k)}{x}_p(t, \overset{(k)}{x}_0) = \overset{(k)}{x}_0 + L\overset{(k)}{f}\left(t, \overset{(k)}{x}_p(t, \overset{(k)}{x}_0)\right) +$$

$$+ \frac{t}{T}\overset{(k)}{H}_p\left\{\overset{(k)}{d} - \left(\sum_{i=0}^{p}\overset{(k)}{A}_i + \overset{(k)}{C}\right)\overset{(k)}{x}_0 - \sum_{i=1}^{p}\overset{(k)}{A}_i L\overset{(k)}{f}\left(t_i, \overset{(k)}{x}_p(t, \overset{(k)}{x}_0)\right)\right\}.$$

Оценивая его по норме, получаем

$$\left\|\overset{(k)}{x}_p(t, \overset{(k)}{x}_0)\right\| \le \left\|\overset{(k)}{x}_0\right\| + M\alpha_1(t) + \left\|\overset{(k)}{H}_p\overset{(k)}{d} - \overset{(k)}{R}_p\overset{(k)}{x}_0\right\| + M\sum_{i=1}^{p}\left\|\overset{(k)}{H}_p\overset{(k)}{A}_i\right\|\alpha_1(t_i) \le$$

$$\le \left\|\overset{(k)}{x}_0\right\| + \left\|\overset{(k)}{H}_p\overset{(k)}{d}\right\| + \left\|\overset{(k)}{R}_p\overset{(k)}{x}_0\right\| + \frac{MT}{2}\left(1 + \sum_{i=1}^{p}\left\|\overset{(k)}{H}_p\overset{(k)}{A}_i\right\|\right) \le$$

$$\le \|x_0\| + \left\|\overset{(k)}{H}_p\right\|\left(\|d\| + \left(\sum_{i=0}^{p}\|A_i\| + \|C\|\right)\|x_0\|\right) + \frac{MT}{2}\left(1 + \overset{(k)}{H}_p\sum_{i=1}^{p}\|A_i\|\right). \quad (14)$$

Из (14) и условия ж) следует, что последовательность $\left\{\overset{(k)}{x}_p\right\}$ равномерно ограничена по норме $\|\cdot\|$ на отрезке $[0, T]$.

Пусть $\bar{t}$ и $\bar{\bar{t}}$ принадлежат отрезку $[0, T]$, $\bar{t} > \bar{\bar{t}}$. Тогда

$$\overset{(k)}{x}_p(\bar{t}) - \overset{(k)}{x}_p(\bar{\bar{t}}) = L\overset{(k)}{f}\left(\bar{t}, \overset{(k)}{x}_p\right) - L\overset{(k)}{f}\left(\bar{\bar{t}}, \overset{(k)}{x}_p\right) +$$

$$+ \frac{(\bar{t} - \bar{\bar{t}})}{T}\overset{(k)}{H}_p\left\{\overset{(k)}{d} - \left(\sum_{i=0}^{p}\overset{(k)}{A}_i + \overset{(k)}{C}\right)\overset{(k)}{x}_0 - \sum_{i=1}^{p}A_i L\overset{(k)}{f}\left(t_i, \overset{(k)}{x}_p\right)\right\}.$$

Учитывая, что

$$\left\|L\overset{(k)}{f}\left(\bar{t}, \overset{(k)}{x}_p\right) - L\overset{(k)}{f}\left(\bar{\bar{t}}, \overset{(k)}{x}_p\right)\right\| = \left\|\int_0^t\left(f(s) - \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt\right)ds\right\| \le 2M(\bar{t} - \bar{\bar{t}}),$$

из последнего соотношения получаем оценку

$$\left\|\overset{(k)}{x}_p(\bar{t}) - \overset{(k)}{x}_p(\bar{\bar{t}})\right\| \le$$

$$\le (\bar{t} - \bar{\bar{t}})\left(2M + \frac{2/KT - 1}{\sum_{i=1}^{\infty}\|A_i\|}\left(\|d\| + \left(\sum_{i=0}^{\infty}\|A_i\| + \|C\|\right)\|x_0\|\right) + \frac{MT}{2}\sum_{i=1}^{p}\|A_i\|\right) =$$

$$= (\bar{t} - \bar{\bar{t}})M, \quad M = \text{const} < \infty. \quad (15)$$

Из (15) вытекает, что $\left\{\overset{(k)}{x}_p\right\}$ на отрезке $[0, T]$ равностепенно непрерывна. Используя теорему Арцела и еще раз применяя метод диагонализации, из последовательности $\left\{\overset{(k)}{x}_p\right\}$ выбираем подпоследовательность $\left\{\overset{(s)}{x}_p\right\}$, сходящуюся равномерно по координатам на отрезке $[0, T]$ к некоторой функции $\bar{x}_p(t)$. Из (13) выделим подпоследовательность уравнений

$$\frac{d\overset{(s)}{x}}{dt} = \overset{(s)}{f}(t, \overset{(s)}{x}) + \overset{(s)}{\Delta}_p(\overset{(s)}{x}_0), \quad \overset{(s)}{x}_p(0) = \overset{(s)}{x}_0, \quad (16)$$

и докажем, что равномерно по координатам

$$x_p(t) = \lim_{s\to\infty} \overset{(s)}{x}_p(t, \overset{(s)}{x}_0) = \bar{x}_p(t, x_0).$$

Последовательность $\left\{\overset{(s)}{x}_p(t)\right\}$ запишем в виде

$$\begin{pmatrix} x_{1p}^{(1)}(t) \\ x_{2p}^{(1)}(t) \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{1p}^{(2)}(t) \\ x_{2p}^{(2)}(t) \\ \vdots \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_{1p}^{(n)}(t) \\ x_{2p}^{(n)}(t) \\ \vdots \end{pmatrix}, \ldots,$$

причем в каждом столбце, начиная с некоторого номера, зависящего от этого столбца, все элементы равны нулю тождественно по $t \in [0, T]$.

Зафиксируем число l и запишем неравенство

$$\left| f_l\left(t, \overset{(n)}{x}_{1p}(t), \overset{(n)}{x}_{2p}(t), \ldots\right) - f_l\left(t, \bar{x}_{1p}(t), \bar{x}_{2p}(t), \ldots\right)\right| \le$$

$$\le \left| f_l\left(t, \overset{(n)}{x}_{1p}(t), \overset{(n)}{x}_{2p}(t), \ldots\right) - f_l\left(t, \bar{x}_{1p}(t), \ldots, \bar{x}_{gp}(t), \overset{(n)}{x}_{(g+1)p}(t), \ldots\right)\right| +$$

$$+ \left| f_l\left(t, \bar{x}_{1p}(t), \ldots, \bar{x}_{gp}(t), \overset{(n)}{x}_{(g+1)p}(t), \ldots\right) - f_l\left(t, \bar{x}_{1p}(t), \bar{x}_{2p}(t), \ldots\right)\right|.$$

Разности, стоящие в правой части, обозначим через $A(l, g)$ и $B(l, g)$ соответственно. Поскольку $f \in \hat{C}_{\text{Lip}}(x)$, то

$$B(l, g) \le \alpha(t) \sup\left\{\left| x_{(g+1)p}(t) - \overset{(n)}{x}_{(g+1)p}(t)\right|, \ldots\right\}\varepsilon(g),$$

где $\varepsilon(g) \to 0$ при $g \to \infty$, а значит, для любого сколь угодно малого положительного числа ν существует такой номер g^0, что $\varepsilon(g^0) < \nu$. Учитывая, что все функции $\overset{(s)}{x}_p(t)$, а значит, и функция $x_p(t)$ равномерно ограничены по норме некоторой постоянной (обозначим ее через K^0), получаем неравенство

$$B(l, g^0) \le 2\alpha(t)K^0\varepsilon_l(g^0) < 2\alpha(t)K^0\nu.$$

Зафиксируем значение $g = g^0$. Тогда справедлива оценка

$$A(l, g^0) \le \alpha(t) \sup\left\{\left|\bar{x}_{1p}(t) - \overset{(n)}{x}_{1p}(t)\right|, \ldots, \left|\bar{x}_{gp}(t) - \overset{(n)}{x}_{gp}(t)\right|\right\}\varepsilon(g^0). \qquad (17)$$

Но $\overset{(s)}{x}_p(t)$ стремится в слабом смысле к $\bar{x}_p(t)$ равномерно по t. Это означает, что найдется такой номер $N(l, \nu)$, что при $n \ge N(l, \nu)$ имеет место соотношение

$$\sup\left\{\left|\bar{x}_{1p}(t) - \overset{(n)}{x}_{1p}(t)\right|, \ldots, \left|\bar{x}_{gp}(t) - \overset{(n)}{x}_{gp}(t)\right|\right\} < \nu,$$

откуда, учитывая оценку (17), получаем неравенство

$$A(l, g^0) + B(l, g^0) < \alpha(t)\left(2K^0 + \varepsilon_l(0)\right)\nu.$$

Пусть t — произвольное значение аргумента из сегмента $[0, T]$, а σ — сегмент такой, что $t \in \sigma \subset [0, T]$. Обозначим $\alpha = \max\limits_{\sigma} \alpha(t)$. Тогда равномерно относительно $t \in \sigma$

$$\left| f_l\left(t, \overset{(n)}{x}_{1p}(t), \overset{(n)}{x}_{2p}(t), \ldots\right) - f_l\left(t, \bar{x}_{1p}(t), \bar{x}_{2p}(t), \ldots\right) \right| < \alpha\left(2K^0 + \varepsilon_l(0)\right)\nu,$$

как только $n \geq N(l, \nu)$. Это свидетельствует о том, что равномерно по $t \in \sigma$ при $f_l\left(t, \overset{(s)}{x}_p(t)\right) \to f_l\left(t, \bar{x}_p(t)\right)$ при $s \to \infty$. Очевидно, что последнее утверждение справедливо для всех $l = 1, 2, 3, \ldots$.

Переходя покоординатно к пределу при $s \to \infty$ в (16), имеем

$$\lim_{s \to \infty} \frac{d\overset{(s)}{x}_p(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \lim_{s \to \infty} \overset{(s)}{x}_p(t) = f\left(t, \bar{x}_p(t)\right) + \Delta_p^0(x_0),$$

т. е. справедливы соотношения

$$\frac{d\bar{x}_p(t)}{dt} = f\left(t, \bar{x}_p(t)\right) + \Delta_p^0(x_0), \qquad \bar{x}_p(0) = x_0.$$

Учитывая равномерную относительно s ограниченность функций $\overset{(s)}{x}_p(t)$ и $\bar{x}_p(t)$ по норме и переходя в равенстве

$$\overset{(s)}{A}_0 \overset{(s)}{x}_p(t) + \sum_{i=1}^{p} \overset{(s)}{A}_i \overset{(s)}{x}_p(t_i) + \overset{(s)}{C} \overset{(s)}{x}_p(T) = \overset{(s)}{d}$$

покоординатно к пределу при $s \to \infty$, убеждаемся, что функция $\bar{x}_p(t)$ удовлетворяет краевому условию (3). В силу следствия 1 $\Delta_p^0(x_0) = \Delta_p(x_0)$, $\bar{x}_p(t) = x_p(t, x_0)$.

Теперь возвратимся к системе уравнений (13) и запишем произвольную ее подпоследовательность

$$\frac{d\overset{(r)}{x}(t)}{dt} = \overset{(r)}{f}(t, \overset{(r)}{x}) + \overset{(r)}{\Delta}_p(\overset{(r)}{x}_0), \qquad \overset{(r)}{x}_p(0) = \overset{(r)}{x}_0.$$

Для нее справедливы все рассуждения, приведенные выше. Это означает, что существует подпоследовательность $\left\{\overset{(l)}{x}_p(t, \overset{(l)}{x}_0)\right\}$ последовательности $\left\{\overset{(r)}{x}_p(t, \overset{(r)}{x}_0)\right\}$, которая слабо сходится опять же к функции $x_p(t, x_0)$, причем $\left\{\overset{(l)}{\Delta}_p(x_0)\right\} \to \Delta_p(x_0)$ при $l \to \infty$.

Докажем теперь, что и сама подпоследовательность $\left\{\overset{(n)}{x}_p(t, \overset{(n)}{x}_0)\right\}$ слабо сходится к $x_p(t, x_0)$, а последовательность $\left\{\overset{(n)}{\Delta}_p(\overset{(n)}{x}_0)\right\}$ — к $\Delta_p(x_0)$ при $n \to \infty$.

Предположим противное, т. е. что соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \overset{(n)}{x}_p(t, \overset{(n)}{x}_0) = x_p(t, x_0) \tag{18}$$

не справедливо для $\overset{(n)}{x}_{\rho p}(t, x_0)$, где $\overset{(n)}{x}_{\rho p}$ — ρ-я координата вектора $\left\{\overset{(n)}{x}_p\right\}$ в точке $t \in [0, T]$. Это означает, что существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для любого сколь угодно большого числа $p > 0$ найдется номер $m \geq p$, при котором

$$\left| x_{\rho p}(\bar{t}, x_0) - \overset{(m)}{x}_{\rho p}(\bar{t}, \overset{(m)}{x}_0) \right| \geq \varepsilon_0. \tag{19}$$

Выберем бесконечно возрастающую последовательность положительных чисел $N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots,$ и по ней определим последовательность натуральных чисел $m_k \geq N_k$, $k = 1, 2, \ldots,$ для которых выполняется неравенство (19), где вместо m стоит m_k. Но последовательность $\left\{\overset{(m_k)}{x}_{\rho p}\right\}$ является подпоследовательностью $\left\{\overset{(n)}{x}_{\rho p}\right\}$, а значит, содержит сходящуюся к $x_{\rho p}$ подпоследовательность $\left\{\overset{(m_l)}{x}_{\rho p}\right\}$. Это означает, что, начиная с некоторого N_0 при $m \geq N_0$ неравенство (19) для $\left\{\overset{(m_k)}{x}_{\rho p}\right\}$ выполняться не может. Пришли к противоречию, что и завершает доказательство теоремы.

Связь между функциями $x_p(t, x_0)$ и $x^*(t, x_0)$ устанавливается в следующем утверждении.

Теорема 3. *Пусть для всех натуральных* p *выполняются условия теоремы* 1 *и следствия* 1. *Если при этом*

$$\| H_p - H \| \leq \nu(p), \tag{20}$$

где $\nu(p) \to 0$ *при* $p \to \infty$, *то последовательность* $\{x_p(t, x_0)\}$ *сходится по норме при* $p \to \infty$ *к* $x^*(t, x_0)$ *при любом* $x_0 \in D_{\beta^*}$.

Доказательство. Функции $x_p(t, x_0), x^*(t, x_0)$ представим в виде

$$x_p(t, x_0) =$$

$$= x_0 + Lf\big(t, x_p(t, x_0)\big) + \frac{t}{T} H_p \left\{ d - \left(\sum_{i=0}^{p} A_i + C \right) x_0 - \sum_{i=1}^{p} A_i Lf\big(t_i, x_p(t, x_0)\big) \right\}, \tag{21}$$

$$x^*(t, x_0) =$$

$$= x_0 + Lf\big(t, x^*(t, x_0)\big) + \frac{t}{T} H \left\{ d - \left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i + C \right) x_0 - \sum_{i=1}^{\infty} A_i Lf\big(t_i, x^*(t, x_0)\big) \right\}. \tag{22}$$

Находя разность правых частей (21) и (22), имеем

$$\| x_p(t, x_0) - x^*(t, x_0) \| \leq K\alpha_1(t) \| x_p(t, x_0) - x^*(t, x_0) \| +$$

$$+ \|x_0\| \sum_{i=p+1}^{\infty} \|HA_i\| + \sum_{i=1}^{p} \|HA_i\| K\alpha_1(t_i) \| x_p(t, x_0) - x^*(t, x_0) | +$$

$$+ \sum_{i=p+1}^{\infty} \|HA_i\| M\alpha_1(t_i) + \|H_p - H\| \left\{ d + \left\| \left(\sum_{i=0}^{p} A_i + C \right) x_0 \right\| + \sum_{i=1}^{p} \|A_i\| M\alpha_1(t_i) \right\}. \tag{23}$$

Обозначая

$$\| x_p - x^* \|_0 = \sup_{t \in [0, T]} \| x_p(t, x_0) - x^*(t, x_0) \|,$$

из (23) получаем

$$\| x_p - x^* \|_0 \leq \| x_p - x^* \|_0 \frac{KT}{2} \left[1 + \sum_{i=1}^{p} \|HA_i\| \right] +$$

$$+\left(\|x_0\|+\frac{MT}{2}\right)\sum_{i=p+1}^{\infty}\|HA_i\|+\left\|H_p-H\right\|\left\{d+\left\|\left(\sum_{i=0}^{p}A_i+C\right)x_0\right\|+\sum_{i=1}^{p}\|A_i\|\frac{MT}{2}\right\}. \quad (24)$$

Обозначая

$$\frac{KT}{2}\left[1+\sum_{i=1}^{p}\|HA_i\|\right]$$

через Q и прибавляя к правой части (24) неотрицательное выражение

$$\|x_p-x^*\|_0\frac{KT}{2}\sum_{i=p+1}^{\infty}\|HA_i\|,$$

находим

$$\|x_p-x^*\|_0 \le Q\|x_p-x^*\|_0+\left(\|x_0\|+\frac{MT}{2}\right)\sum_{i=p+1}^{\infty}\|HA_i\|+$$

$$+\left\|H_p-H\right\|\left\{d+\left\|\left(\sum_{i=0}^{p}A_i+C\right)x_0\right\|+\sum_{i=1}^{p}\|A_i\|\frac{MT}{2}\right\}.$$

Отсюда

$$0<(1-Q)\|x_p-x^*\|_0\le$$

$$\le\left(\|x_0\|+\frac{MT}{2}\right)\sum_{i=p+1}^{\infty}\|HA_i\|+\left\|H_p-H\right\|\left\{d+\left\|\left(\sum_{i=0}^{p}A_i+C\right)x_0\right\|+\sum_{i=1}^{p}\|A_i\|\frac{MT}{2}\right\},$$

$$\|x_p-x^*\|_0\le\frac{1}{1-Q}\left(\|x_0\|+\frac{MT}{2}\right)\sum_{i=p+1}^{\infty}\|HA_i\|+$$

$$+\frac{1}{1-Q}\left\|H_p-H\right\|\left\{d+\left\|\left(\sum_{i=0}^{p}A_i+C\right)x_0\right\|+\sum_{i=1}^{p}\|A_i\|\frac{MT}{2}\right\}. \quad (24)$$

В силу сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty}\|HA_i\|$ и условия (20) для любого положительного ε найдется номер N такой, что для всех $p\ge N$ одновременно выполняются неравенства

$$\sum_{i=p+1}^{\infty}\|HA_i\|<\frac{1-Q}{2\|x_0\|+MT}\varepsilon,$$

$$\|H_p-H\|<\frac{1-Q}{2\left\{d+\left\|\left(\sum_{i=0}^{p}A_i+C\right)x_0\right\|+\sum_{i=1}^{p}\|A_i\|\frac{MT}{2}\right\}}\varepsilon. \quad (25)$$

Учитывая последние оценки и неравенства (25), завершаем доказательство теоремы.

Итогом приведенных выше рассуждений является следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теорем* 2 *и* 3. *Тогда для любого* $x_0\in D_{\beta^*}$

$$x^*(t,x_0)=\lim_{p\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\overset{(n)}{x}_p\left(t,\overset{(n)}{x}_0\right)\right), \quad (26)$$

где сходимость по n *осуществляется покоординатно, а сходимость по* p — *в смысле нормы.*

Незначительно перестроив доказательство, можно убедиться, что повторный предел в правой части последнего равенства имеет свойство коммутативности.

Отметим, что теорема 4 предполагает справедливость условий а) – ж). В некоторых случаях удается ограничиться условиями, налагаемыми лишь на исходное уравнение.

Предположим, что все элементы матриц A_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, неотрицательны, причем

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{T} A_i + C - E \right\| < 1 \tag{27}$$

и

$$\frac{KT}{2}\left(1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \| A_i \|}{1 - \left\| \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{T} A_i + C - E \right\|}\right) < 1. \tag{28}$$

Поскольку в этом случае

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{T} \overset{(n)}{A}_i + \overset{(n)}{C} - \overset{(n)}{E} \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{p} \frac{t_i}{T} A_i + C - E \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{T} A_i + C - E \right\| < 1 \tag{29}$$

при любых натуральных значениях n и p, то при любых натуральных значениях n и p существуют матрицы

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} \left(E - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{T} A_i - C \right)^k,$$

$$H_p = \sum_{k=0}^{\infty} \left(E - \sum_{i=1}^{p} \frac{t_i}{T} A_i - C \right)^k,$$

$$\overset{(n)}{H}_p = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\overset{(n)}{E} - \sum_{i=1}^{p} \frac{t_i}{T} \overset{(n)}{A}_i - \overset{(n)}{C} \right)^k.$$

При этом

$$\| H \| \leq \frac{1}{1 - \left\| \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{T} A_i + C - E \right\|} = H^*. \tag{30}$$

Неравенства (29) приводят к тому, что при любых $n, p \in N$

$$\| H_p \| \leq H^*, \qquad \left\| \overset{(n)}{H}_p \right\| \leq H^*. \tag{31}$$

Из оценок (29) – (31) следует справедливость условий в), д), ж).

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть* $f(t, x) \in \hat{C}_{\mathrm{Lip}}(x)$ *в области* D_0, *все элементы матриц* A_i, $i = 1, 2, \ldots$, *неотрицательны, ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \| A_i \|$ *сходится, выполняются оценки* (6), (20), (27), (28) *и множество* D_{β^*} *непусто. Тогда справедливы утверждения теорем* 1 – 4 *и следствий* 1, 2.

В заключение рассмотрим случай, когда уравнение (1) линейно относительно x. Обозначим через $P(t) = \left[p_{ik}(t)\right]_{i,k=1}^{\infty}$ ограниченную по норме бесконечную матрицу, элементы которой непрерывны по t на $[0, T]$, а через $\overset{(n)}{P}(t) = \left[p_{ik}(t)\right]_{i,k=1}^{n}$ конечномерную матрицу, полученную из $P(t)$ удалением элементов, для которых хотя бы один из номеров строки или столбца больше n. Положим теперь $f(t,x) = P(t)x$ и рассмотрим для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x \tag{32}$$

краевые задачи с краевыми условиями (2), (3), а для уравнения

$$\frac{d\overset{(n)}{x}}{dt} = \overset{(n)}{P}(t)\overset{(n)}{x} \tag{33}$$

краевую задачу с краевым условием (5).

Через M_0 обозначим константу, для которой

$$\max\left\{\|P(t)\|_{t\in[0,T]}, \|A_i\|_{i=0,1,2,\ldots}, \|C\|, \left\|H_p\right\|, \|d\|\right\} \le M_0 < \infty, \tag{34}$$

и предположим, что выполняется неравенство

$$\max\left\{\left\|P(t) - \overset{(n)}{P}(t)\right\|_{t\in[0,T]}, \left\|A_i - \overset{(n)}{A}_i\right\|_{i=0,1,2,\ldots}, \left\|C - \overset{(n)}{C}\right\|, \left\|H_p - \overset{(n)}{H}_p\right\|, \left\|d - \overset{(n)}{d}\right\|\right\} \le \le \beta(n), \tag{35}$$

где $\beta(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Легко убедиться, что в таком случае функция $f(t, x) = P(t)x$ при $x \in D$ удовлетворяет условиям (6), где можно взять, например, $K = M_0$, и при выполнении условий а) – ж) для задач (32), (2); (32), (3) и (33), (5) справедливы утверждения теоремы 1 и следствий 1, 2.

Сохряняя прежний смысл выражений $\overset{(n)}{x}_p\left(t, \overset{(n)}{x}_0\right)$, $x_p(t, x_0)$ и $x^*(t, x_0)$, сформулируем аналог теоремы 5 для рассматриваемой задачи.

Теорема 6. *Пусть матрица $P(t)$ ограничена и непрерывна на отрезке $[0, T]$, все элементы матриц A_i, $i = 1, 2, \ldots$, неотрицательны, ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\|A_i\|$ сходится, выполняются оценки* (27), (28), (35) *и множество D_{β^*} непусто. Тогда при любом $x_0 \in D_{\beta^*}$, удовлетворяющем неравенству*

$$\|x_0 - \overset{(n)}{x}_0\| \le \beta(n),$$

справедливо равенство (26), *где сходимость как по p, так и по n осуществляется в смысле нормы. При этом выполняется оценка*

$$\left\|\overset{(n)}{x}_p\left(t, \overset{(n)}{x}_0\right) - x_p(t, x_0)\right\| \le \beta(n)\frac{1 + 2M_0 + 3(p+2)M_0^2 + pM_0MT}{1 - Q}. \tag{36}$$

Доказательство. Легко видеть, что в обосновании нуждаются лишь справедливость предельного перехода (12) в смысле нормы и оценка (36). Напомним, что при $x_0 \in D_{\beta^*}$ как функция $x_p(t, x_0)$, так и функция $\overset{(n)}{x}_p\left(t, \overset{(n)}{x}_0\right)$ ограничены по норме $\|\cdot\|$ постоянной $\|x_0\| + \beta \le R$, $n = 1, 2, \ldots$. Записывая выражения для решения обеих систем и оценивая их разность, получаем

$$\left\| x_p - \overset{(n)}{x}_p \right\| \le \left\| x_0 - \overset{(n)}{x}_0 \right\| + \left\| L\left(f(t, x_p) - f\left(t, \overset{(n)}{x}_p\right)\right) \right\| + \left\| H_p d - \overset{(n)}{H}_p \overset{(n)}{d} \right\| +$$

$$+ \sum_{i=0}^{p} \left\| H_p A_i x_0 - \overset{(n)}{H}_p \overset{(n)}{A}_i \overset{(n)}{x}_0 \right\| + \left\| H_p C x_0 - \overset{(n)}{H}_p \overset{(n)}{C} \overset{(n)}{x}_0 \right\| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} \left\| H_p A_i L f(t_i, x_p) - \overset{(n)}{H}_p \overset{(n)}{A}_i L f\left(t_i, \overset{(n)}{x}_p\right) \right\|.$$

Из соотношений

$$\left\| H_p d - \overset{(n)}{H}_p \overset{(n)}{d} \right\| \le M\left(\left\| d - \overset{(n)}{d} \right\| + \left\| H_p - \overset{(n)}{H}_p \right\| \right),$$

$$\left\| H_p A_i x_0 - \overset{(n)}{H}_p \overset{(n)}{A}_i \overset{(n)}{x}_0 \right\| \le M_0^2 \left(\left\| x_0 - \overset{(n)}{x}_0 \right\| + \left\| A_i - \overset{(n)}{A}_i \right\| + \left\| H_p - \overset{(n)}{H}_p \right\| \right),$$

$$\left\| H_p C x_0 - \overset{(n)}{H}_p \overset{(n)}{C} \overset{(n)}{x}_0 \right\| \le M_0^2 \left(\left\| x_0 - \overset{(n)}{x}_0 \right\| + \left\| C_i - \overset{(n)}{C} \right\| + \left\| H_p - \overset{(n)}{H}_p \right\| \right),$$

$$\left\| H_p A_i L f(t_i, x_p) - \overset{(n)}{H}_p \overset{(n)}{A}_i L f\left(t_i, \overset{(n)}{x}_p\right) \right\| \le M_0^2 \left\| L\left(f(t_i, x_p) - f\left(t_i, \overset{(n)}{x}_p\right)\right) \right\| +$$

$$+ M_0 \left\| L f\left(t_i, \overset{(n)}{x}_p\right) \right\| \left(\left\| A_i - \overset{(n)}{A}_i \right\| + \left\| H_p - \overset{(n)}{H}_p \right\| \right), \qquad i = \overline{1, p},$$

оценок (34), (35), условия Липшица и леммы 1 следует оценка

$$\left\| x_p - \overset{(n)}{x}_p \right\| \le \left\{ 1 + 2M_0 + 3(p+2)M_0^2 + pM_0 MT \right\} \beta(n) + Q \left\| x_p - \overset{(n)}{x}_p \right\|,$$

которая с учетом (8) приводит к (36). Последнее неравенство в силу $\beta(n) \to 0$ при $n \to \infty$ доказывает утверждение теоремы.

Отметим, что изложенные здесь результаты открывают возможность применения численно-аналитических методов [1, 2] для приближенного построения периодических решений краевой задачи (1), (2).

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследований решений краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1986. – 224 с.
2. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
3. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы. – Киев: Наук. думка, 1993. – С. 115 – 119.
4. *Ронто Н. И., Савина Т. В.* Метод последовательных приближений для многоточечных краевых задач // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – С. 115 – 119.
5. *Ронто Н. И., Савина Т. В.* Численно-аналитический метод для трехточечных краевых задач // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 4. – С. 393 – 403.
6. *Савіна Т. В.* Дослідження розв'язків багатоточкових крайових задач чисельно-аналітичним методом: Дис. … канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 1995. – 114 с.
7. *Ронто Н. И., Мартынюк О. М.* Исследование периодических решений счетных систем второго порядка // Укр. мат. журн. – 1991. – **44**, № 1. – С. 83 – 93.
8. *Мартинюк О. М.* Дослідження розв'язків крайових задач для зліченних систем нелінійних диференціальних рівнянь: Дис. … канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 1993. – 115 с.

Получено 09.04.97