УДК 517.5

П. М. Тамразов (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ КОНТУРНО-ТЕЛЕСНАЯ ПРОБЛЕМА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ*

The paper gives a survey of results completely solving the differential contour-solid problem of analytic functions in an open subset G of the complex plane which was discussed as an open problem at the informal seminar held in Zurich by participants of the International Congress of Mathematicians. This problem, with a long prehistory, included unsolved then questions concerning validness conditions for differential contour-solid statements on continuous extensiability of the derivative to boundary points and differentiability of an analytic function at boundary points of G. In June of 1995 the author had established that these statements are always true: for arbitrary open set G and any boundary points. These and more general theorems are given in this paper.

Some other results are given as well. Among them, contour-solid theorems and representation formula for the generalized solution to the Dirichlet problem for the derivative of a function should be mentioned.

Наведено результати, які повністю розв'язують диференціальну контурно-тілесну проблему аналітичних функцій у відкритій підмножині G комплексної площини, що обговорювалась як відкрита проблема на неформальному семінарі, проведеному в 1994 р. в Цюріху учасниками Міжнародного конгресу математиків. Ця проблема з довгою передісторією включала нерозв'язані тоді питання щодо умов справедливості диференціальних контурно-тілесних тверджень про неперервну продовжуваність похідної в межові точки та диференційовність аналітичної функції в межових точках множини G.

У червні 1995 р. автором було встановлено, що ці твердження завжди вірні для довільних відкритих множин G і будь-яких межових точок. Ці та більш загальні теореми даються в цій статті.

Наведені деякі інші результати. Серед них слід згадати контурно-тілесні теореми та формулу представлення для узагальненого розв'язку задачі Діріхле для похідної від функції.

Пусть $\boldsymbol{C}$ — комплексная плоскость (отождествляемая с евклидовой плоскостью $\boldsymbol{R}^2$), E — множество в евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^n$, $n \geq 2$, $\operatorname{Ac} E$ — его производное множество (т. е. множество всех точек накопления для E). Обозначим через $\operatorname{Cap}_* E$ внутреннюю классическую емкость множества E (логарифмическую для $n = 2$, ньютонову для $n > 2$), а через $\operatorname{Cap} E$ соответствующую емкость, когда она существует.

Для точки $x \in \operatorname{Ac} E$ и функции $g\colon F \to \boldsymbol{C}$, чья область определения $F \subset \subset \boldsymbol{R}^n$ покрывает некоторую порцию множества $E \setminus \{x\}$ с центром в x, введем следующие понятия (когда они имеют смысл): предел

$$(g)_{[E]}(x) := g_{[E]}(x) := \lim_{y \to x,\ y \in E \setminus \{x\}} g(y),$$

в случае $\boldsymbol{R}^n = \boldsymbol{C}$ производную

$$(g)'_{[E]}(x) := g'_{[E]}(x) := \lim_{z \to x,\ z \in E \setminus \{x\}} \frac{g(z) - g_{[E]}(x)}{z - x},$$

и если $x \in F$, то и производную

$$(g)'_E(x) := g'_E(x) := \lim_{z \to x,\ z \in E \setminus \{x\}} \frac{g(z) - g(x)}{z - x}$$

(существование $g_{[E]}(x)$, $g'_{[E]}(x)$ или $g'_E(x)$ подразумевает, что $x \in \operatorname{Ac} E$).

* Выполнена при частичной финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий (проект № 11.3/12), Королевского Общества Великобритании, Международного научного фонда (грант № UB 4000).

Для множества $F \subset \boldsymbol{R}^n$ через $\overline{F}$ обозначим его замыкание в $\boldsymbol{R}^n$ (в частности, в $\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{C}$).

Пусть F — множество в C. Обозначим через $F(*)$ множество всех $x \in F$ таких, что всякая порция множества F с центром в x имеет положительную внешнюю емкость. Очевидно, $F(*) \subset F \bigcap \operatorname{Ac} F$.

Пусть G — произвольное открытое множество в $\boldsymbol{C}$, $\operatorname{Ac}(\partial G) =: M$, B — некоторое множество, подчиненное условиям $G \subset B \subset \overline{G}$, а $f\colon B \to \boldsymbol{C}$ — непрерывная функция, голоморфная в G. Для простоты будем считать, что функция f ограничена.

При этих обозначениях и предположениях хорошо известно следующее утверждение.

Предложение 1. *Функция f допускает (единственное) непрерывное продолжение на множество $(\partial G)\setminus(B \bigcup M(*))$ и продолженная функция голоморфна в окрестности множества $(\partial G)\setminus M(*)$.*

***Замечание* 1.** Аналогичное предложение верно и для гармонических функций.

Всюду ниже a обозначает фиксированную точку на ∂G, Q — фиксированное подмножество множества ∂G, и если a и Q заданы одновременно, то тогда предполагаем, что $a \in Q$.

В пп. 1 и 2 приведены частные случаи результатов, полученных в данной работе.

1. Пусть $B = \overline{G}$ и сужение функции f на ∂G есть липшицева функция.

Теорема 1. *Если производная $f'_{\partial G}(\zeta)$ существует в каждой точке $\zeta \in M$ и непрерывна на M, то для всякой точки $\zeta \in \partial G$ существует предел $(f')_{[G]}(\zeta)$ и*

$$(f')_{[G]}(\zeta) = \begin{cases} f'_{\partial G}(\zeta) & \forall\, \zeta \in M; \\ f'(\zeta) & \forall\, \zeta \in (\partial G)\setminus M. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть $S \subset \partial G$, $\operatorname{Cap} S = \operatorname{Cap}_* Q = 0$, $L := M(*)\setminus(Q \bigcup S)$ и производная $f'_{M(*)}(\zeta)$ существует в каждой точке $\zeta \in M(*)\setminus S$. Если $a \in$ $\in \operatorname{Ac} L$ и предел*

$$(f'_{M(*)})_{[L]}(a) =: \mu(a) \tag{1}$$

существует, то существует и предел

$$(f')_{[G]}(a) =: \nu(a) \tag{2}$$

и $\mu(a) = \nu(a)$. Если $a \notin \operatorname{Ac} L$, то функция f голоморфна в окрестности точки a.

***Замечание* 2.** Производная $f'_{\partial G}(a)$ не участвует в (1), независимо от того, существует она или нет. И даже если она существует, то не обязательно равна $\mu(a)$ и $\nu(a)$.

2. Теорема 3. *Пусть $B = \overline{G}$. Если $a \in M$ и существует конечная производная $f'_{\partial G}(a)$, то существует также производная $f'_{\overline{G}}(a)$ (равная $f'_{\partial G}(a)$).*

Теорема 4. *Пусть $B = \overline{G}\setminus\{a\}$. Если $a \in M(*)$ и существуют предел $f_{[M(*)]}(a)$ и конечная производная $f'_{[M(*)]}(a)$, то существуют также предел $f_{[\overline{G}]}(a)$ и производная $f'_{[\overline{G}]}(a)$ (равные соответственно $f_{[M(*)]}(a)$ и*

$f'_{[M(*)]}(a)$). *Если* $a \notin M(*)$, *то* f *допускает (единственное) голоморфное продолжение в окрестность точки* a.

Теорема 5. *Пусть* $B = G$, $\operatorname{Cap}_* Q = 0$, $(M(*))\setminus Q =: L$. *Если* b, c — *некоторые комплексные числа,* $a \in \operatorname{Ac} L$ *и*

$$\lim_{\zeta \to a,\ \zeta \in L} \ \varlimsup_{z \to \zeta,\ z \in G} \left| \frac{f(z) - b}{z - a} - c \right| = 0,$$

то существуют предел $f_{[G]}(a)$ *и производная* $f'_{[G]}(a)$, *и* $f_{[G]}(a) = b$, $f'_{[G]}(a) = c$. *Если* $a \notin \operatorname{Ac} L$, *то* f *допускает (единственное) голоморфное продолжение в окрестность точки* a.

3. Теоремы 1–5 дают ответы на вопросы, поставленные автором в качестве открытых проблем на неформальном проблемном семинаре по комплексному анализу и теории потенциала в Цюрихе 8 августа 1994 г., организованном и проведенном участниками Международного конгресса математиков. Ранее мы доказали сформулированные теоремы при дополнительном требовании, чтобы точки ζ в теореме 1 и a в теоремах 2–5 были регулярными граничными точками для G. Проблемы, поставленные в Цюрихе, формулировались следующим образом: „Верны ли эти теоремы без предположения о регулярности упомянутых выше точек?"

Легко видеть, что Т.2 $\Rightarrow$ Т.1 (т. е. теорема 2 содержит теорему 1), Т.5 $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ Т.4 $\Rightarrow$ Т.3. Предыстория этих результатов такова. Уолш и Сьюэлл [1, 2] установили теоремы 1 и 3 для произвольной жордановой области и показали, что без условия липшицевости теорема 1 теряет силу даже для жордановых областей. Для жордановых областей со спрямляемыми и гладкими границами Е. П. Долженко [3] исследовал аналогичные задачи для слабых производных (вдоль области и вдоль ее границы). В 1971 г. автор доказал теоремы 1 и 3 для произвольных односвязных областей и каких-угодно открытых множеств со связным дополнением [4, 5]. В [6] установлены теорема 1 для регулярных открытых множеств, а теорема 3 для открытых множеств с положительной нижней плотностью емкости (см. также [7, с. 101–111]). В 1983 г. автор доказал, что в предположениях теоремы 1 ее утверждение справедливо для всякой регулярной для G граничной точки ζ [8, 9]. В 1993 г. доказал теоремы 2–5 при дополнительном требовании, что a есть регулярная граничная точка для G. Указанные результаты докладывались автором на Симпозиуме по обобщениям комплексного анализа и их применениям в физике в Банаховом центре (Варшава, 24 июня 1994 г.), на упомянутом выше семинаре в Цюрихе, а также на Симпозиуме по теории распределения значений и комплексным дифференциальным уравнениям в Сиикасалме (Финляндия, 19 сентября 1994 г.).

4. В дополнение к теоремам 1–5 мы доказали также их обобщения в различных направлениях и некоторые связанные с ними или вспомогательные результаты. Сформулируем некоторые из них.

5. Пусть G, a, Q, B, f такие же, как введенные в начале статьи, U — открытая окрестность точки a, $\Gamma := U \cap \partial G$, $B = G \cup \Gamma$, и сужение функции f на $U \cap M(*)$ есть липшицева функция. Если задано некоторое множество $L \subset M(*)$ и $a \in \operatorname{Ac} L$, то будем считать, что $\mu(a)$ определено соотношением (1) с этим новым L, когда предел (1) существует.

Теорема 6. *Пусть* $\operatorname{Cap} Q = 0$ *и* $L := \Gamma \cap (M(*)\setminus Q)$. *Если* $a \in \operatorname{Ac} L$, *производная* $f'_{\partial G}(\zeta)$ *существует в каждой точке* $\zeta \in L$ *и предел* (1) *существует, то предел* (2) *также существует и* $\mu(a) = \nu(a)$. *Если* $a \notin \operatorname{Ac} L$, *то* f *допускает (единственное) голоморфное продолжение в окрестность точки* a.

Теорема 7. *Пусть* $S \subset \partial G$, $\operatorname{Cap} S = \operatorname{Cap}_* Q = 0$ *и* $L := \Gamma \bigcap (M(*) \setminus (Q \bigcup S))$. *Если* $a \in \operatorname{Ac} L$, *производная* $f'_{M(*)}(\zeta)$ *существует в каждой точке* $\zeta \in \Gamma \bigcap (M(*) \setminus S)$ *и предел* (1) *существует, то существует также предел* (2) *и* $\mu(a) = \nu(a)$. *Если* $a \notin \operatorname{Ac} L$, *то* f *допускает* (*единственное*) *голоморфное продолжение в окрестность точки* a.

***Замечание* 3.** Результаты этого пункта остаются справедливыми, если $B = \overline{G} \cap U$. В этом случае f может быть сужением функции, имеющей особенности в $G \setminus \overline{U}$.

6. Пусть $x \in \boldsymbol{R}^n$ и ε_x — мера Дирака в x. Для множества $E \subset \boldsymbol{R}^n$ пусть ε_x^E — заряд, полученный в результате выметания меры ε_x на E; CE обозначает дополнение $\boldsymbol{R}^n \setminus E$ множества E.

Пусть D — открытое множество в $\boldsymbol{R}^n$. Для компактного множества $K \subset \partial D$ обозначим

$$\varepsilon_x^{CD}(K) =: w(D, K, x);$$

для произвольного множества $F \subset \partial D$ —

$$w_*(D, F, x) := \sup_K \{ w(D, K, x) : K \text{ — компактные подмножества множества } F \},$$

$$w^*(D, F, x) := \inf_A \{ w(D, A \bigcap \partial G, x) : A \text{ — открытые окрестности множества } F \}.$$

Если $w_*(D, F, x) = w^*(D, F, x)$, то тогда обозначим

$$w(D, F, x) := w_*(D, F, x) = w^*(D, F, x).$$

Будем писать $w_*(D, F) = 0$, если для всякой связной компоненты D_j множества D и некоторой (или каждой, что равносильно) точки $x_j \in D_j$ выполняется $w_*(D, F, x_j) = 0$. Аналогично пишем $w(D, F) = 0 = w^*(D, F)$, если для каждой связной компоненты D_j множества D и некоторой (или всякой, что равносильно) точки $x_j \in D_j$ выполняется условие $w^*(D, F, x_j) = 0$.

При условиях на исключительные множества, выраженных в терминах таких гармонических мер (внутренних и внешних), мы получили аналоги сформулированных выше теорем. Некоторые из этих аналогов будут даны ниже.

Заметим, что если $\operatorname{Cap}_* F = 0$, то $w_*(D, F) = 0$, а если $\operatorname{Cap} F = 0$, то $w(D, F) = 0$.

7. В предположениях и обозначениях п. 5 справедлив следующий результат.

Теорема 8. *Пусть* $S \subset \partial G$, $L := \Gamma \bigcap (M(*) \setminus (Q \bigcup S))$ *и выполнено* $\operatorname{Cap} S = 0$, *или* $w(G, S) = 0$, $\operatorname{Cap}_* Q = 0$, *или* $w_*(G, Q) = 0$. *Если* $a \in \operatorname{Ac} L$, *производная* $f'_{M(*)}(\zeta)$ *существует в каждой точке* $\zeta \in \Gamma \bigcap (M(*) \setminus S)$ *и существует предел* (1), *то существует также предел* (2) *и* $\mu(a) = \nu(a)$. *Если* $a \notin \operatorname{Ac} L$, *то* f *допускает* (*единственное*) *голоморфное продолжение на окрестность точки* a.

8. Пусть U — открытая окрестность точки a и $\Gamma := U \bigcap \partial G$. Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 9. *Пусть* $B = G \bigcup \Gamma$. *Если* $a \in M(*)$ *и существует производная*

$f'_{M(*)}(a)$, *то существует также производная* $f'_{\overline{G}}(a) = f'_B(a)$ (*равная* $f'_{M(*)}(a)$). *Если* $a \notin M(*)$, *то функция* f *голоморфна в окрестности точки* a.

Теорема 10. *Пусть* $B = G \cup (\Gamma \setminus \{a\})$. *Если* $a \in M(*)$ *и существуют предел* $f_{[M(*)]}(a)$ *и производная* $f'_{[M(*)]}(a)$, *то существуют также предел* $f_{[B]}(a)$ *и производная* $f'_{[\overline{G}]}(a) = f'_{[B]}(a)$ (*равные соответственно* $f_{[M(*)]}(a)$ *и* $f'_{[M(*)]}(a)$). *Если* $a \notin M(*)$, *то* f *допускает* (*единственное*) *голоморфное продолжение на окрестность точки* a.

Теорема 11. *Теорема* 5 *остается справедливой, если в ней требование* $\mathrm{Cap}_* Q = 0$ *заменить условием* $w_*(G, Q) = 0$.

Пусть $\overline{\boldsymbol{C}}$ — сфера Римана. Для множества $E \subset \overline{\boldsymbol{C}}$ обозначим через $\mathrm{Clos}\, E$ замыкание множества E в $\overline{\boldsymbol{C}}$, а через $\mathrm{Con}\, E$ — выпуклую оболочку множества E, когда $E \subset \boldsymbol{C}$.

Пусть D — ограниченное открытое множество в $\boldsymbol{R}^n$, $T \subset \partial D$ — фиксированное множество с $\mathrm{Cap}_* T = 0$ или $w_*(D, T) = 0$.

Пусть $x_0 \in T$ есть фиксированная регулярная граничная точка для D. Для ограниченной сверху функции $f\colon \partial D \to [-\infty, +\infty)$ пусть $\overline{H}_{f,D}$ есть верхнее решение обобщенной задачи Дирихле для f в D. Справедливы следующие обобщения теоремы из [10, с. 114].

Лемма 1. *Пусть* f *есть ограниченная сверху вещественная функция на* ∂D. *Тогда*

$$\varlimsup_{x \to x_0,\ x \in D} \overline{H}_{f,D}(x) \le \varlimsup_{y \to x_0,\ y \in (\partial D) \setminus T} f(y).$$

Для множества $F \subset \boldsymbol{R}^n$, точки $y_0 \in \mathrm{Ac}\, F$ и функции $\varphi\colon F \to \overline{\boldsymbol{C}}$ обозначим

$$Z(\varphi, y_0) :=$$

$$:= \left\{ w \in \overline{\boldsymbol{C}} : \exists \{y_m\}_{m=1}^{\infty} \subset F \setminus \{y_0\},\ \lim_{m \to \infty} y_m = y_0,\ w = \lim_{m \to \infty} \varphi(y_m) \right\}.$$

Пусть комплекснозначная ограниченная функция $g\colon \partial D \to \boldsymbol{C}$ разрешима в обобщенной задаче Дирихле для D и $H_{g,D}$ — решение этой задачи. Это означает, что действительная и мнимая части функции g разрешимы (см. [10, с. 105]) и

$$H_{g,D} = H_{\mathrm{Re}\, g, D} + i H_{\mathrm{Im}\, g, D}.$$

При этих предположениях справедливы следующие результаты.

Теорема 12. *Верно соотношение*

$$Z(H_{g,D}, x_0) \subset \mathrm{Con}\, Z(g|_{(\partial D) \setminus T}, x_0).$$

В частности, если существует предел

$$\lim_{y \to x_0,\ y \in (\partial D) \setminus T} g(y) =: g_0,$$

то существует также предел

$$\lim_{x \to x_0,\ x \in D} H_{g,D}(x) = g_0.$$

10. Пусть G, a, Q, U, Γ, B и функция f такие же, как в п. 5. Пусть R — множество всех $\zeta \in \partial G$, являющихся регулярными граничными точками для G.

Теорема 13. *Пусть* $\Gamma\setminus R\subset Q$, $S\subset\partial G$, *причем выполнено* $\mathrm{Cap}\, S=0$, *или* $w(G,S)=0$, $\mathrm{Cap}_*Q=0$, *или* $w_*(G,Q)=0$. *Предположим, что производная* $f'_{M(*)}(\zeta)$ *существует в каждой точке* $\zeta\in\Gamma\bigcap(M(*)\setminus S)$. *Предположим, что каждой точке* $\zeta\in R\bigcap\Gamma$ *поставлено в соответствие произвольное множество* $T(\zeta)\subset\Gamma$, *содержащее как точку* ζ, *так и множество* $(\Gamma\setminus R)\bigcup S$, *с* $\mathrm{Cap}_*T(\zeta)=0$ *или* $w_*(G,T(\zeta))=0$. *Тогда*

$$Z(f',\zeta)\subset\mathrm{Con}\, Z(f'_{M(*)}|_{\Gamma\setminus T(\zeta)},\zeta)\quad\forall\,\zeta\in R\bigcap\Gamma,$$

и если $a\in\mathrm{Ac}\,(\Gamma\setminus Q)$, *то также*

$$\partial Z(f',a)\subset\partial\bigcap_{r>0}\mathrm{Clos}\bigcup_{\zeta\in\Gamma\setminus Q,|\zeta-a|<r}Z(f',\zeta)\subset$$

$$\subset\bigcap_{r>0}\mathrm{Clos}\bigcup_{\zeta\in\Gamma\setminus Q,|\zeta-a|<r}\mathrm{Con}\, Z(f'_{M(*)}|_{\Gamma\setminus T(\zeta)},\zeta).$$

В сочетании с другими соображениями доказательство этой теоремы использует следующий результат.

Теорема 14. *Пусть выполнены предположения предыдущей теоремы. Пусть, кроме того,* V *— ограниченная окрестность точки* a, *причем* $\overline{V}\subset\subset U$, $\partial(G\bigcap V)=:\Delta$. *Тогда функция* $g\colon\partial(G\bigcap V)\to\boldsymbol{C}$, *заданная формулой*

$$g(\zeta)=\begin{cases}f'(\zeta) & \forall\,\zeta\in\Delta\bigcap G;\\ f'_{\overline{G}}(\zeta) & \forall\,\zeta\in\Delta\setminus\Delta(*);\\ f'_{M(*)}(\zeta)\ (=f'_{\overline{G}}(\zeta)) & \forall\,\zeta\in\Delta(*)\setminus G,\end{cases}$$

имеет смысл и разрешима в обобщенной задаче Дирихле для $G\bigcap V$. *Более того,*

$$H_{g,G\bigcap V}(z)=f'(z)\quad\forall\,z\in G\bigcap V.$$

***Замечание* 4.** Конкретные значения $f'_{\overline{G}}$, приписанные функции g на $\Delta\setminus\Delta(*)$, не влияют на справедливость этого результата. В качестве $g\,|_{\Delta\setminus\Delta(*)}$ можно взять произвольную ограниченную функцию. Заметим также, что вследствие теоремы 10 на $\Delta(*)\setminus G$ производная $f'_{\overline{G}}$ существует и верно равенство $f'_{M(*)}=f'_{\overline{G}}$.

11. Справедлив также следующий результат.

Теорема 15. *Пусть* D *— ограниченное открытое множество в* $\boldsymbol{C}$, $h:\partial D\to\boldsymbol{C}$ *— ограниченная разрешимая функция,* $Q\subset\partial D$ *— множество с* $\mathrm{Cap}_*Q=0$ *или* $w_*(D,Q)=0$. *Пусть* $a\in Q$ *— фиксированная точка и* R *— множество всех регулярных граничных точек для* D. *Предположим, что каждой точке* $\zeta\in R$ *поставлено в соответствие произвольное множество* $T(\zeta)\subset\partial D$, *содержащее как* ζ, *так и* $(\partial D)\setminus R$, *причем выполнено* $\mathrm{Cap}_*T(\zeta)=0$ *или* $w_*(D,T(\zeta))=0$. *Тогда*

$$Z(H_{h,D},\zeta)\subset\mathrm{Con}\, Z(h|_{(\partial D)\setminus T(\zeta)},\zeta)\quad\forall\,\zeta\in R,$$

и если $a\in\mathrm{Ac}\,((\partial D)\setminus Q)$, *то также*

$$\partial Z(H_{h,D},a)\subset\partial\bigcap_{r>0}\mathrm{Clos}\bigcup_{\zeta\in(\partial D)\setminus Q,|\zeta-a|<r}Z(H_{h,D},\zeta)\subset$$

$$\subset \bigcap_{r>0} \operatorname{Clos} \bigcup_{\zeta \in (\partial D)\setminus Q,\, |\zeta - a| < r} \operatorname{Con} Z(h|_{(\partial D)\setminus T(\zeta)}, \zeta).$$

В частности, если существует предел

$$\lim_{\zeta \to a,\ \zeta \in (\partial D)\setminus Q} h(\zeta) =: h_a,$$

то существует и предел

$$\lim_{z \to a,\ z \in D} H_{h,D}(z) = h_a.$$

12. Для множества $E \subset \overline{C}$ обозначим через $\overline{\partial} E$ границу множества E в $\overline{C}$. Наряду с другими средствами в этой работе мы использовали также следующий результат.

Теорема 16. *Пусть* $E \subset \overline{C}$ *— произвольное открытое множество,* $Q \subset \subset \partial D$ *— произвольное множество с* $\operatorname{Cap}_* Q = 0$ *или* $w_*(D, Q) = 0$, $a \in Q \cap \cap \operatorname{Ac}((\partial D)\setminus Q)$ *— фиксированная точка. Пусть* φ *— мероморфная в* D *функция. Тогда*

$$\overline{\partial} Z(\varphi, a) \subset \overline{\partial} \bigcap_{r>0} \operatorname{Clos} \bigcup_{\zeta \in (\partial D)\setminus Q,\, |\zeta - a| < r} Z(\varphi, \zeta).$$

Этот результат является обобщением теоремы Иверсена–Цудзи, в которой предполагалось, что множество D связно, а Q есть компактное множество с $\operatorname{Cap} Q = 0$ (см. [11, с. 332–335; 12, с. 36–41]).

13. Пусть $D \subset \overline{C}$ — произвольная область, граница которой имеет ненулевую классическую емкость. Пусть универсальная накрывающая области D реализована в виде открытого единичного круга $U \subset C$ и $p: U \to D$ есть проектирование. При этих условиях справедлив следующий результат.

Лемма 2. I. *Если* α_0 *есть подмножество множества* ∂D *с* $w(D, \alpha_0) = 0$, *то существует подмножество* β_0 *множества* ∂U *линейной меры нуль такое, что для всякой точки* $\zeta_0 \in (\partial U)\setminus \beta_0$ *верны следующие утверждения*:

$i)_0$ в ζ_0 *функция* p *имеет угловое граничное значение* $p(\zeta_0)$;

$ii)_0$ $p(\zeta_0) \in (\partial D)\setminus \alpha_0$;

$iii)_0$ $p(\zeta_0)$ *есть регулярная граничная точка для* D.

II. *Обратно, если* β_1 *есть подмножество множества* ∂U *линейной меры нуль, то существует множество* $\alpha_1 \subset \partial D$ *с* $w(D, \alpha_1) = 0$ *такое, что для всякой точки* $z_1 \in (\partial D)\setminus \alpha_1$ *верны утверждения*:

$i)_1$ z_1 *является угловым граничным значением* $p(\zeta_1)$ *функции* p *для некоторой точки* $\zeta_1 \in \partial U$;

$ii)_1$ $\zeta_1 \in (\partial U)\setminus \beta_1$;

$iii)_1$ z_1 *является регулярной граничной точкой для* D.

Лемма 2 является уточнением нашей леммы из [8], и она использована в настоящей работе вместе с другими соображениями из наших более ранних работ (к упомянутым выше следует добавить [13, 14]).

14. Приведенные выше результаты обобщены на высшие производные. Пусть $k \geq 2$ — целое число.

При условиях, введенных в начале статьи, справедливы следующие утверждения.

Теорема 17. *Пусть* $S \subset \partial G$, $L := M(*)\setminus(Q \cup S))$. *Пусть выполнено* $\operatorname{Cap} S = 0$, *или* $w(G,S) = 0$, $\operatorname{Cap}_* Q = 0$, *или* $w_*(G,Q) = 0$. *Предположим, что в каждой точке* $\zeta \in M(*)$ *существуют производные* $f'_{M(*)}(\zeta)$, $(f'_{M(*)})'_{M(*)}(\zeta) =: f''_{M(*)}(\zeta), \ldots, \big(f^{(k-2)}_{M(*)}\big)'_{M(*)}(\zeta) =: f^{(k-1)}_{M(*)}(\zeta)$, *и* $f|_{M(*)}$, $f'_{M(*)}, \ldots, f^{(k-1)}_{M(*)}$ *являются липшицевыми функциями на* $M(*)$. *Предположим также, что в каждой точке* $\zeta \in M(*)\setminus S$ *существует производная* $\big(f^{(k-1)}_{M(*)}\big)'_{M(*)}(\zeta) =: f^{(k)}_{M(*)}(\zeta)$. *Если* $a \in \operatorname{Ac} L$ *и существует предел* $\big(f^{(k-1)}_{M(*)}\big)_{[L]}(a) =: \mu(a)$, *то существуют также пределы* $\big(f^{(j)}\big)_{[G]}(a) =: \nu_j(a)$, $j = 1, \ldots, k$, *и верны равенства* $\nu_j(a) = f^{(j)}_{M(*)}(a)$ $\forall j = 1, \ldots, k-1$, $\nu_k(a) = \mu(a)$. *Если* $a \notin \operatorname{Ac} L$, *то функция* f *голоморфна в окрестности точки* a.

Теорема 18. *Пусть* $B = \overline{G}$. *Если* $a \notin M(*)$, *то функция* f *голоморфна в окрестности точки* a. *Пусть теперь* $a \in M(*)$ *и существуют конечные производные* $f'_{M(*)}(\zeta), \ldots, f^{(k-1)}_{M(*)}(\zeta)$ *в каждой точке* $\zeta \in M(*)$ *и производная* $f^{(k)}_{M(*)}(a)$ *в точке* a. *Предположим также, что* $f|_{M(*)}$, $f'_{M(*)}, \ldots$ $\ldots, f^{(k-1)}_{M(*)}$ *являются липшицевыми функциями на* $M(*)$. *Тогда существуют также производные* $f'_{\overline{G}}(\zeta) = f'_{M(*)}(\zeta)$, $f''_{\overline{G}}(\zeta) := \big(f'_{\overline{G}}\big)'_{\overline{G}}(\zeta) := f''_{M(*)}(\zeta), \ldots$ $\ldots, f^{(k-1)}_{\overline{G}}(\zeta) := \big(f^{(k-2)}_{\overline{G}}\big)'_{\overline{G}}(\zeta) := f^{(k-1)}_{M(*)}(\zeta)$ *в каждой точке* $\zeta \in M(*)$ *и производная* $f^{(k)}_{\overline{G}}(a) := \big(f^{(k-1)}_{\overline{G}}\big)'_{\overline{G}}(a) = f^{(k)}_{M(*)}(a)$ *в* a.

Теорема 19. *Пусть* $B = \overline{G}\setminus\{a\}$. *Если* $a \notin M(*)$, *то* f *допускает (единственное) голоморфное продолжение на окрестность точки* a. *Пусть теперь* $a \in M(*)$ *и существуют окрестность* U *точки* a *и производные* $f'_{M(*)}(\zeta), \ldots, f^{(k-1)}_{M(*)}(\zeta)$ *в каждой точке* $\zeta \in (U \cap M(*))\setminus\{a\}$. *Предположим также, что в окрестности каждой точки* $\zeta \in (U \cap M(*))\setminus\{a\}$ *функции* $f|_{M(*)}$, $f'_{M(*)}, \ldots, f^{(k-1)}_{M(*)}$ *являются локально липшицевыми. Дополнительно предположим, что существуют конечный предел* $\big(f^{(k-1)}_{M(*)}\big)_{[M(*)]}(a) =: \mu(a)$ *и производная* $\big(f^{(k-1)}_{M(*)}\big)'_{[M(*)]}(a) =: \lambda(a)$. *Тогда существуют также предел* $\big(f^{(k-1)}\big)_{[G]}(a) = \mu(a)$ *и производная* $\big(f^{(k-1)}\big)'_{[G]}(a) = \lambda(a)$.

Аналогичные обобщения справедливы и для других результатов из пп. 5, 7, 8, 10.

Относительно теорем 5 и 11 заметим, что в их формулировках функция f может быть заменена k-й производной функции g, голоморфной в G.

15. Предположение о липшицевости, принятое в некоторых из приведенных выше результатов, может быть ослаблено на базе следующей теоремы (примененной к мажоранте $\mu\colon \sigma \mapsto b\sigma$, $b = \text{const} \geq 0$, $\sigma \geq 0$).

Теорема 20. *Пусть* $D \subset \mathbf{C}$ *— открытое множество,* $f\colon D \to \mathbf{C}$ *— ограниченная голоморфная функция,* $P \subset \partial D$, $p\colon P \to \mathbf{C}$ *— некоторая функция,* $\mu\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *— неубывающая функция, непрерывная справа, для которой* $\mu(0) = 0$ *и на множестве* $\{\, t \in (-\infty, +\infty)\colon\ \mu(e^t) > 0\}$ *функция*

$\log \mu(e^t)$ *вогнута. Предположим, что для каждой точки* $\zeta \in P$ *существует множество* $T(\zeta) \subset \partial D$ *с* $\mathrm{Cap}_* T(\zeta) = 0$ *или* $w_*(D, T(\zeta)) = 0$, *для которого*

$$\overline{\lim_{x \to z,\ x \in D}} |f(x) - p(\zeta)| \le \mu(|z - \zeta|) \quad \forall\, z \in (\partial D) \setminus T(\zeta).$$

Тогда f *допускает непрерывное продолжение на* $\overline{P}$ *до функции, обозначаемой тем же символом* $f(: D \cup \overline{P} \to \boldsymbol{C})$, *и*

$$f(\zeta) = p(\zeta) \quad \forall\, \zeta \in P,$$

$$|f(z) - f(\zeta)| \le \mu(|z - \zeta|) \quad \forall\, z \in D \cup \overline{P}, \quad \forall\, \zeta \in \overline{P}.$$

Если, к тому же, $\overline{P} = \partial D$ *и либо множество* ∂D *ограничено, либо функция* $f(z)$ *имеет предел при* $z \to \infty$, $z \in D$, *то*

$$|f(z) - f(\zeta)| \le \mu(|z - \zeta|) \quad \forall\, z, \zeta \in \overline{D}.$$

Замечание 5. Существенная часть этой теоремы относится к случаю, когда $\zeta \in T(\zeta)$ для некоторых из точек $\zeta \in P$.

Настоящая работа была опубликована в виде препринта [15] и ее результаты докладывались автором на Международной конференции по проекту INTAS, проведенной в Киеве (1995 г.).

1. *Walsh J. L., Sewell W. E.* Sufficient conditions for various degrees of approximation by polynomials // Duke Math. J. – 1940. – **6**, № 3. – P. 658–705.
2. *Sewell W. E.* Degree of approximation by polynomials in the complex domain. – Princeton, 1942. – 236 p.
3. *Долженко Е. П.* Гладкость гармонических и аналитических функций в граничных точках области // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1965. – **29**, № 5. – С. 1069–1084.
4. *Тамразов П. М.* Конструктивные и структурные свойства функций на компактах комплексной плоскости // Всесоюзн. конф. по теории функций комплексного переменного: Тез. докл. (Харьков, сент. 1971 г.). – Харьков, 1971. – С. 206–208.
5. *Тамразов П. М.* Контурные и телесные свойства голоморфных функций в комплексной плоскости // Докл. АН СССР. – 1972. – **204**, № 3. – С. 565–568.
6. *Тамразов П. М.* Контурные и телесные структурные свойства голоморфных функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1973. – **28**, № 1. – С. 131–161.
7. *Тамразов П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения. – Киев: Наук. думка, 1975. – 272 с.
8. *Тамразов П. М.* Усиленное контурно-телесное свойство для функций класса Липшица и продолжение производной на границу // Контурно-телесные теоремы и модули семейств кривых. – Киев, 1983. – С. 3–15. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 83.35).
9. *Tamrazov P. M.* A strengthened contour-and-solid property for Lipschitz functions and extension of the derivative to the boundary // Lect. Notes Math. – 1985. – № 1165. – P. 283–291.
10. *Брело М.* Основы классической теории потенциала. – М.: Мир, 1964. – 213 с.
11. *Tsuji M.* Potential theory in modern function theory. – Tokyo: Maruzen, 1959. – 590 p.
12. *Носиро К.* Предельные множества. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 253 с.
13. *Тамразов П. М.* Контурно-телесные задачи для голоморфных функций и отображений. – Киев, 1983. – 50 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 83.65).
14. *Тамразов П. М.* Контурно-телесные результаты для голоморфных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1986. – **50**, № 4. – С. 835–848.
15. *Tamrazov P. M.* Differential contour-solid properties of analytic functions. – Kiev, 1995. – 16 p. – (Preprint / Nat. Acad. Scie. Ukr. Inst. Math.; 95.06).

Получено 27.12.95