УДК 517. 9

В. Н. Бобочко (Кировоград. пед. ин-т)

# ВНУТРЕННЯЯ ТОЧКА ПОВОРОТА В ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

The uniform asymptotics of solution of singularly perturbed differential equation of Liouville type with the interior turning point is constructed.

Побудована рівномірна асимптотика розв'язку сингулярно збуреного диференціального рівняння Ліувілля з внутрішньою точкою звороту.

**1. Введение.** Рассмотрим следующую задачу:

$$L_\varepsilon U(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon^3 U''(x,\varepsilon) - [r(x)+\varepsilon^3 p(x)]U(x,\varepsilon) = h(x), \tag{1}$$

$$U(0,\varepsilon) = A_0(\varepsilon) \equiv \varepsilon^{-1}\alpha_0 + A_0, \quad \frac{dU(0,\varepsilon)}{dx} = A_1(\varepsilon) \equiv \varepsilon^{-2}\alpha_1 + \varepsilon^{-1}A_1$$

при $\varepsilon \to +0$, $x \in J \equiv [-l; l]$. Здесь $A_k(\varepsilon)$, $k = 0, 1$, — известные начальные условия, а коэффициенты уравнения (1) являются достаточно гладкими функциями при $x \in J$.

Предполагается, что точка $x = 0$ является простой точкой поворота для уравнения (1), т. е.

$$r(x) = x\tilde{r}(x), \quad \tilde{r}(x) > 0 \quad \text{для всех} \quad x \in J. \tag{2}$$

Уравнению Лиувилля, т. е. уравнению (1), посвящено значительное число исследований. Поэтому, для того чтобы отметить актуальность постановки задачи (1) и ее решение, дадим краткую историческую справку об известных результатах по исследованию уравнения Лиувилля и построению равномерных асимптотик решения этого уравнения.

Наиболее ранние и успешные исследования равномерных асимптотических решений однородного уравнения (1) с точкой поворота принадлежат Лангеру (см. [1] и библиографию в ней). В [1] построена фундаментальная система решений (ф.с.р) уравнения (1) на отрезке $J$ с использованием для этой цели функции Эйри. Структура ф.с.р и свойства функций Эйри описаны в [1, 4].

Впоследствии Лангер и его ученики [3, с. 411–414] получили некоторые результаты по построению равномерных асимптотик решений неоднородных дифференциальных уравнений, пригодные справа или слева от точки поворота.

В [5, 6] также получены равномерные решения задачи с точкой поворота, пригодные лишь справа от точки поворота.

С. А. Ломов (см. [7], гл. 6) получил определенные результаты по построению равномерной асимптотики решения на отрезке справа от точки поворота.

Однако, насколько автору известно, еще не построена равномерная асимптотика решения неоднородного уравнения Лиувилля, пригодная на всем отрезке $[-l; l]$, хотя соответствующая асимптотика ф.с.р. построена уже достаточно давно [1–8].

Следовательно, точка $x = 0$ является внутренней точкой поворота для исследуемой задачи.

**2. Расширение возмущенной задачи.** Согласно разработанному методу построения равномерных асимптотик решений для сингулярно возмущенной задачи (с.в.з.) с точками поворота [9–13], наряду с независимой переменной $x \in J$, введем в рассмотрение новую регуляризующую переменную $t$ по правилу

$$t = \varepsilon^{-1}\varphi(x) \equiv \Phi(x,\varepsilon), \tag{3}$$

где регуляризующая функция $\varphi(x)$ подлежит определению.

Тогда вместо искомой функции $U(x, \varepsilon)$ будем изучать новую „расширенную" функцию $\tilde{U}(x, t, \varepsilon)$. Расширение проводим таким образом, чтобы выполнялось тождество

$$\tilde{U}(x, t, \varepsilon)\big|_{t=\Phi(x,\varepsilon)} \equiv U(x, \varepsilon). \tag{4}$$

Дифференцируя тождество (4) и подставляя полные производные в с.в.з. (1), для определения расширенной функции $\tilde{U}(x, t, \varepsilon)$ получаем следующую расширенную задачу:

$$\begin{gathered} \tilde{L}_\varepsilon \tilde{U}(x, t, \varepsilon) = h(x), \quad M = (0, t(0)), \\ \tilde{U}(M, \varepsilon) = A_0(\varepsilon), \quad \frac{d\tilde{U}(M, \varepsilon)}{dx} = A_1(\varepsilon). \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $\tilde{L}_\varepsilon$ — расширенный оператор вида

$$\tilde{L}_\varepsilon \equiv \varepsilon \varphi'^2(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - r(x) + \varepsilon^2 d \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^3 L_3, \tag{6}$$

где

$$d \equiv 2\varphi'(x) \frac{\partial}{\partial x} + \varphi''(x), \tag{7}$$

$$L_3 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} - p(x). \tag{8}$$

Асимптотику решения с.в.з. (1) будем строить, используя функции Эйри. Поэтому в расширенном операторе (6) выделим в явном виде оператор Эйри, т. е. оператор

$$T \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - t, \tag{9}$$

следующим образом:

$$\varepsilon \varphi'^2(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - r(x) \equiv \varepsilon \varphi'^2(x) T. \tag{10}$$

В этом тождестве введено обозначение

$$t \equiv \varepsilon^{-1} [\varphi'(x)]^{-2} r(x). \tag{11}$$

С учетом тождества (10) расширенный оператор (6) запишем в виде

$$\tilde{L}_\varepsilon \equiv \varepsilon \varphi'^2(x) T + \varepsilon^2 d \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^3 L_3. \tag{12}$$

Таким образом, введя новую переменную $t$ по формуле (3), с.в.з. (1) по определенному правилу мы поставили в соответствие новую расширенную задачу (5). Расширение проведено таким образом, что при $t = \Phi(x, \varepsilon)$ справедливо тождество

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{U}(x, t, \varepsilon) \equiv L_\varepsilon U(x, \varepsilon). \tag{13}$$

**3. Определение регуляризующей функции.** Определим регуляризующую функцию $\varphi(x)$ из тождества (11). При $t = \varepsilon^{-1}\varphi(x)$ из этого тождества получаем задачу

$$\varphi'^2(x)\varphi(x) = r(x), \quad \varphi(0) = 0. \tag{14}$$

Известно [2], что два линейно независимых решения $\mathrm{Ai}(t)$ и $\mathrm{Bi}(t)$ уравнения Эйри являются ограниченными при $t < 0$. Если же $t > 0$, то одно из этих решений, а именно: $\mathrm{Bi}(t)$ неограниченно возрастает при $t \to +\infty$.

В зависимости от знака функции $r(x)$ можно легко выписать решение задачи (14), обеспечивающее ограниченность функций Эйри на отрезке $J_1 = [-l;\ 0]$ или при $x \in J_2 \equiv [0;\ l]$.

Однако проведенные нами исследования показали, что ни при каком сочетании знаков функции $r(x)$ в областях $J_k$, $k = 1, 2$, нельзя получить гладкое решение задачи (14), которое было бы отрицательным при $x \in [-l;\ 0) \cup (0;\ l]$. В зависимости от знака функции $r(x)$ ф.с.р. уравнения Эйри будет ограничена в одной из областей $J_k$, а в другой области функция $\mathrm{Bi}(t)$ будет неограниченно возрастать на бесконечности.

Подтверждением сказанного выше является тот факт, что построенная ф.с.р. для уравнения Эйри и Лиувилля на отрезке $[-l;\ l]$ имеет описанные выше свойства.

Решением задачи (14) на отрезке $[-l;\ l]$ будет функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{при} \quad x \le 0, \\ \varphi_2(x) & \text{при} \quad x \ge 0, \end{cases} \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= -\left(\frac{3}{2}\int_x^0 \sqrt{-r(x)}\,dx\right)^{2/3}, \\ \varphi_2(x) &= \left(\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{r(x)}\,dx\right)^{2/3}. \end{aligned} \tag{16}$$

Легко установить справедливость следующих свойств регуляризующей функции $\varphi(x)$:

1) $\varphi(x) \in C^\infty[-l;\ l]$;

2) функция $\varphi(x)$ является монотонно возрастающей на отрезке $J$, т. е. $\varphi'(x) > 0$ при $x \in J$;

3) $\varphi_1(x) < 0$ при $x \in [-l;\ 0)$, $\varphi_2(x) > 0$ при $x \in (0;\ l]$;

4) $\varphi_i(0) = 0$, $\varphi_i'(0) = \sqrt[3]{r'(0)} \equiv \sqrt[3]{\tilde{r}(0)}$, $i = 1, 2$.

Таким образом, при $\tilde{r}(x) > 0$ определена регуляризующая функция $\varphi(x)$, причем функции Эйри будут ограниченными при $x \in J_1$, а при $x \in J_2$ функция $\mathrm{Bi}(t)$ будет неограниченно возрастать на бесконечности.

*Замечание* 1. В случае, когда $\tilde{r}(x) < 0$, можно определить регуляризующую функцию так, чтобы функции Эйри были ограниченными при $x > 0$.

**4. Пространства безрезонансных решений.** Опишем пространства функций, в которых будем строить равномерную асимптотику решения расширенной задачи (5).

Рассмотрим пространства

$$Y_{1r} = \{V_{1r}(x)\,\mathrm{Ai}(t) + Q_{1r}(x)\,\mathrm{Ai}'(t)\},$$

$$Y_{2r} = \{V_{2r}(x)\,\mathrm{Bi}(t) + Q_{2r}(x)\,\mathrm{Bi}'(t)\}, \tag{17}$$

$$Y_{3r} = \{f_r(x)\nu(t) + g_r(x)\nu'(t)\},\ Y_{4r} = \{\omega_r(x)\},$$

где

$$V_{ir}(x),\ Q_{ir}(x),\ f_r(x),\ g_r(x),\ \omega_r(x) \in C^\infty[J].$$

Здесь $\mathrm{Ai}(t)$, $\mathrm{Bi}(t)$ — функции Эйри с известными свойствами при $x \in \in [\varepsilon^{-1}\varphi_1(-l);\, \varepsilon^{-1}\varphi_2(l)] \equiv T(\varepsilon)$, $\nu(t)$ — решение задачи

$$\nu''(t) - t\nu(t) = \pi^{-1},\quad \nu(0) = -3^{-7/6}\,\Gamma^{-1}\!\left(\frac{2}{3}\right),\quad \nu'(0) = -3^{-5/6}\,\Gamma^{-1}\!\left(\frac{1}{3}\right). \tag{18}$$

Остановимся более детально на свойствах существенно особого многообразия (с.о.м.) $\nu(t)$ и его производной.

Во-первых: легко проверить, что решением задачи (18) в области $T(\varepsilon)$ будет функция

$$\nu(t) = \mathrm{Bi}(t)\int_\infty^t \mathrm{Ai}(\tau)\,d\tau - \mathrm{Ai}(t)\int_0^t \mathrm{Bi}(\tau)\,d\tau. \tag{19}$$

*Замечания.* **2.** С.о.м. $\nu(t)$ изучено и использовано ранее [10, 12], однако оно использовалось только при $t \geq 0$.

**3.** Функцию $\mathrm{Gi}(t) \equiv -\nu(t)$ при $t \geq 0$ называют функцией Скорера [3, с. 412]. Поэтому свойства с.о.м. (19) при $t \geq 0$ известны, а именно: при $t \to +\infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\nu(t) \cong -[\pi t]^{-1}[1 + O(t^{-3})]. \tag{20}$$

**4.** Для построения частного решения с.в.з. (1) при $t \leq 0$ можно использовать другое с.о.м., а именно: функцию Скорера $\mathrm{Hi}(t)$ [3, с. 412]. Эта функция является аналогом с.о.м. $\psi(t)$, введенного в рассмотрение С. А. Ломовым [7, с. 199]. Однако, так как $\psi(0) \neq \nu(0)$, т. е. $\mathrm{Hi}(0) \neq -\mathrm{Gi}(0)$, мы не получим равномерной асимптотики решения в окрестности точки поворота.

Исследования показали, что для получения равномерной асимптотики решения с.в.з (1) необходимо во всей области изменения переменной $t$ использовать с.о.м. (19).

С этой целью необходимо изучить свойства с.о.м. $\nu(t)$ и его производной при $t < 0$.

Известно равенство [3, с. 412]

$$\mathrm{Gi}(t) + \mathrm{Hi}(t) = \mathrm{Bi}(t) \tag{21}$$

и асимптотические свойства функций $\mathrm{Bi}(t)$ и $\mathrm{Hi}(t)$ при $t \to -\infty$. Тогда при $t \to -\infty$ имеем асимптотическое равенство

$$\nu(t) = \mathrm{Hi}(t) - \mathrm{Bi}(t) \cong -[\pi t]^{-1}[1 + O(t^{-3})] -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}t^{1/4}}\left\{\cos\left(\frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)[1 + O(t^{-3})] + \sin\left(\frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)[1 + O(t^{-3})]\right\} \cong$$

$$\cong -\mathrm{Bi}(t)[1 + O(t^{-3})]. \tag{22}$$

Следовательно, с.о.м. $\nu(t)$ при $t \to -\infty$ имеет такое же поведение, как и многообразие $\mathrm{Bi}(t)$, т. е.

$$\lim_{t \to -\infty} \nu(t) = 0.$$

Аналогичным образом при $t \to -\infty$ получим равенство

$$\nu'(t) \cong \mathrm{Bi}'(t) \cong -\pi^{-1/2} t^{1/4} \times$$
$$\times \left\{ \sin\left(\frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)[1 + O(t^{-3})] - \cos\left(\frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)[1 + O(t^{-3})] \right\}. \tag{23}$$

***Вывод* 1.** Многообразие $\nu(t)$ является ограниченным при $t \in T(\varepsilon)$. Многообразие $\nu'(t)$ неограниченно возрастает при $t \to -\infty$, а при $t > 0$ оно остается ограниченным. Таким образом, поведение при $t \to \pm\infty$ многообразий $\nu(t)$ и $\nu'(t)$ аналогично поведению многообразий $\mathrm{Bi}(t)$ и $\mathrm{Bi}'(t)$.

Таким образом, известны асимптотические свойства всех с.о.м., содержащихся в равенствах (17).

Из пространств (17) составим новое пространство

$$Y_r = \bigoplus_{k=1}^{4} Y_{kr}, \tag{24}$$

которое, по аналогии с предыдущим, будем называть пространством безрезонансных решений (п.б.р.).

Элемент этого пространства имеет вид

$$U_r(x, t) = \sum_{k=1}^{2} [V_{kr}(x) W_k(t) + Q_{kr}(x) W_k'(t)] +$$
$$+ f_r(x)\nu(t) + g_r(x)\nu'(t) + \omega_r(x). \tag{25}$$

Здесь и в дальнейшем, для удобства введем обозначения

$$W_1(t) \equiv \mathrm{Ai}(t), \qquad W_2(t) \equiv \mathrm{Bi}(t). \tag{26}$$

**5. Регуляризация сингулярно возмущенной задачи (1).** Исследуем действие расширенного оператора $\tilde{L}_\varepsilon$ (см. тождество (12)) на элемент из п.б.р. (24). Имеем

$$\varepsilon\varphi'^2(x) T U_r(x, t) \equiv$$
$$\equiv \varepsilon\varphi'^2(x) \left[ \sum_{k=1}^{2} Q_{kr}(x) W_k(t) + \pi^{-1} f_r(x) + g_r(x)\nu(t) \right] - r(x)\omega_r(x). \tag{27}$$

Далее,

$$\varepsilon\varphi'^2(x)\, d\frac{\partial U_r}{\partial t} \equiv \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{2} [\, dV_{kr}(x) W_k'(t) + dQ_{kr}(x) t W_k(t)\,] +$$
$$+ \varepsilon^2 d f_r(x)\nu'(t) + \varepsilon^2 d g_r(x)[\, t\nu(x) + \pi^{-1}] \equiv$$
$$\equiv \varepsilon^2 \left[ \sum_{k=1}^{2} dV_{kr}(x) W_k'(t) + df_r(x)\nu'(t) + \pi^{-1} dg_r(x) \right] +$$
$$+ \varepsilon \left[ \sum_{k=1}^{2} \varphi(x) dQ_{kr}(x) W_k(t) + \varphi(x) dg_r(x)\nu(t) \right]. \tag{28}$$

Учитывая тождества (27) и (28), расширенный оператор (6) в его действии на элемент из п.б.р. (24) можно записать в виде

$$\tilde{L}_\varepsilon U_r(x,t) \equiv (L_0 + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 L_2 + \varepsilon^3 L_3) U_r(x,t). \tag{29}$$

Здесь операторы $L_k$, $k = \overline{0,3}$, в их действии на функции из п.б.р. (24) можно записать в виде тождеств

$$L_0 U_r(x,t) \equiv -r(x)\omega_r(x), \tag{30}$$

$$L_1 U_r(x,t) \equiv \sum_{k=1}^{2} DQ_{kr}(x) W_k(t) + Dg_r(x)\nu(t) + \pi^{-1}\varphi'^2(x) f_r(x), \tag{31}$$

$$L_2 U_r(x,t) \equiv \sum_{k=1}^{2} dV_{kr}(x) W_k'(t) + df_r(x)\nu'(t) + \pi^{-1} dg_r(x), \tag{32}$$

$$L_3 U_r(x,t) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - p(x)\right) U_r(x,t). \tag{33}$$

Здесь

$$D \equiv 2\varphi(x)\varphi'(x)\frac{\partial}{\partial x} + \varphi(x)\varphi''(x) + \varphi'^2(x). \tag{34}$$

Анализируя полученные тождества (30)–(33), можно сделать следующие выводы.

*Выводы.* 2. Пространства безрезонансных решений (24) инвариантны относительно операторов $L_k$, $k = \overline{0,3}$.

3. Из предыдущего пункта следует, что п.б.р. (24) инвариантны и относительно расширенного оператора $\tilde{L}_\varepsilon$ (см. тождество (29)).

4. Оператор $L_0$ является главным оператором расширенного оператора $\tilde{L}_\varepsilon$ в п.б.р. (24).

5. Расширенный оператор $\tilde{L}_\varepsilon$, представленный в виде тождества (29), регулярно зависит от малого параметра $\varepsilon > 0$ в п.б.р (24). Следовательно, по определенному правилу с.в.з. (1) мы поставили в соответствие новую „расширенную" задачу (5), которая в п.б.р. (24) регулярно зависит от малого параметра $\varepsilon > 0$.

Таким образом, мы провели регуляризацию с.в.з. (1). Иными словами, особая точка $\varepsilon = 0$ порождает в решении с.в.з. (1) некоторые существенно особые многообразия. Введением новой переменной $t$ по определенному правилу, мы выделили и сохранили как единые целые все с.о.м., содержащиеся в решении с.в.з. (1). Поэтому решение расширенной задачи (5) уже регулярно зависит от малого параметра $\varepsilon > 0$.

*Замечание* 5. Расширенная задача (5) в общем случае недоопределена, так как начальные условия являются только точечными. Однако впоследствии будет показано, что в пространстве безрезонансных решений (24) эта задача имеет единственное решение.

**6. Формализм построения ряда решений расширенной задачи.** В предыдущем пункте показано, что расширенная задача (5) регулярно зависит от малого параметра в п.б.р. (24). Поэтому асимптотику решения расширенной задачи (5) будем строить в виде ряда

$$\tilde{U}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=-1}^{+\infty} \varepsilon^r U_r(x,t), \tag{35}$$

коэффициенты которого $U_r(x,t) \in Y_r$.

Подставим ряд (35) в расширенную задачу (5) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра. Тогда для определения коэффициентов ряда (35) получим следующую рекуррентную систему задач:

$$L_0 U_{-1}(x,t) = 0, \quad U_{-1}(M) = \alpha_0, \quad \varphi'(0)\frac{\partial U_{-1}(M)}{\partial t} = \alpha_1, \tag{36}$$

$$L_0 U_0(x,t) = h(x) - L_1 U_{-1}(x,t), \quad U_0(M) = A_0, \tag{37}$$

$$\varphi'(0)\frac{\partial U_0(M)}{\partial t} = A_1 - \frac{\partial U_{-1}(M)}{\partial x},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$L_0 U_r(x,t) = -L_3 U_{r-3} - L_2 U_{r-2} - L_1 U_{r-1} \equiv H_r(x,t),$$

$$U_r(M) = 0, \quad \varphi'(0)\frac{\partial U_r(M)}{\partial t} = -\frac{\partial U_{r-1}(M)}{\partial x}. \tag{38}$$

Далее необходимо показать, что рекуррентная система задач (36)–(38) асимптотически корректна в п.б.р. (24).

**7. Определение главного члена асимптотики решения расширенной задачи.** Из тождества (30) следует, что в п.б.р. (24) ядро оператора $L_0$ имеет вид

$$\operatorname{Ker} L_0 = \{V_{kr}(x)W_k(t), Q_{kr}(x)W_k'(t),\ k=1,2;\ f_r(x)\nu(t), g_r(x)\nu'(t)\}. \tag{39}$$

Тогда решением однородного уравнения (36) в п.б.р. (24) будет функция $(r=-1)$

$$U_r(x,t) \equiv Z_r(x,t) = \sum_{k=1}^{2}\left[V_{kr}(x)W_k(t) + Q_{kr}(x)W_k'(t)\right] + f_r(x)\nu(t) + g_r(x)\nu'(t), \tag{40}$$

в которой коэффициенты при с.о.м., до определенного времени, будут произвольными достаточно гладкими функциями при $x \in J$.

Перед тем как приступить к решению уравнения (37), вычислим его правую часть. Учитывая действие оператора $L_1$ на функции из п.б.р. (24) (см. тождество (31)), получаем

$$h(x) - L_1 U_{-1} = h(x) - \pi^{-1}\varphi'^2(x) f_{-1}(x) - \sum_{k=1}^{2} D Q_{k(-1)}(x) W_k(t) - D g_r(x)\nu(t). \tag{41}$$

Для того чтобы правая часть уравнения (37) не содержала элементов ядра главного оператора $L_0$, используем произвольность коэффициентов, содержащихся при с.о.м. в тождестве (41), следующим образом. Выберем эти функции как решения дифференциальных уравнений

$$D Q_{k(-1)}(x) = 0, \quad k=1,2; \quad D g_{-1}(x) = 0. \tag{42}$$

Дифференциальный оператор $D$ имеет особенность при производной $(\varphi(0)=0)$. Поэтому, для получения гладких решений уравнений (42), их необходимо соответственно решать при условиях

$$|Q_{k(-1)}(0)| < \infty, \quad k=1,2; \quad |g_{-1}(0)| < \infty. \tag{43}$$

Гладкими решениями задач (42), (43) будут тождественные нули. Правая часть уравнения (37) уже не содержит элементов ядра главного оператора $L_0$. Однако в общем случае, т. е. когда $h(0)$ не обязательно равно нулю, правая часть уравнения (37) не принадлежит множеству значений оператора $L_0$. Для выполнения этого условия используем произвольность функции $f_{-1}(x)$ следующим образом. Выберем точечное значение этой функции в виде

$$f_{-1}(0) = \pi h(0)[\varphi'(0)]^{-2} \equiv f_{-1}^0. \tag{44}$$

Тогда:

1) решение $U_{-1}(x, t)$ зависит только от трех произвольных функций $V_{k(-1)}(x)$, $k = 1, 2$; $f_{-1}(x)$;

2) в пространстве $Y_0$ существует решение уравнения (37), представимое в виде $(r = 0)$

$$U_r(x, t) = Z_r(x, t) + \omega_r(x), \tag{45}$$

где функция $Z_0(x, t)$ определяется по формуле (40) при $r = 0$, а

$$\omega_0(x) = r^{-1}(x)[h(x) - \pi^{-1}\varphi'^2(x)f_{-1}(x)]. \tag{46}$$

Приступим к решению следующего уравнения (38) при $r = 1$. По аналогии с предыдущим сначала вычислим его правую часть. Учитывая тождества (31) и (32), получаем

$$H_1(x, t) \equiv L_2U_{-1} - L_1U_0 \equiv \sum_{k=1}^{2} [dV_{k(-1)}(x)W_k'(t) + DQ_{k0}(x)W_k(t)] -$$
$$- df_{-1}(x)\nu'(t) - Dg_0(x)\nu(t) - \pi^{-1}\varphi'^2(x)f_0(x). \tag{47}$$

Требуя, чтобы выражение (47) не содержало элементов ядра оператора $L_0$, определим $Q_{k0}(x) \equiv 0$, $k = 1, 2$, $g_0(x) \equiv 0$ и получим дифференциальные уравнения

$$dV_{k(-1)}(x) = 0, \quad k = 1, 2; \qquad df_{-1}(x) = 0. \tag{48}$$

С учетом сказанного выше, правая часть уравнения (38) при $r = 1$ принимает вид

$$H_1(x, t) \equiv h_1(x) \equiv -\pi^{-1}\varphi'^2(x)f_0(x). \tag{49}$$

Для того чтобы выражение (49) принадлежало множеству значений главного оператора $L_0$, необходимо задать начальное условие $f_0(0)$. Тогда в пространстве $Y_1$ существует решение уравнения (38) при $r = 1$, представимое по формуле (45) при $r = 1$, где

$$\omega_1(x) \equiv -r^{-1}(x)\pi^{-1}\varphi'^2(x)f_0(x). \tag{50}$$

На данном этапе однозначно определена функция $f_{-1}(x)$ как решение дифференциального уравнения $df_{-1}(x) = 0$ при начальном условии (44).

Для однозначного определения решения уравнения (37) подставим функцию $U_{-1}(x, t)$ в начальные условия (37). Получим систему

$$\begin{cases} V_{1(-1)}(0)\mathrm{Ai}(0) + V_{2(-1)}(0)\mathrm{Bi}(0) = \alpha_0 - f_{-1}(0)\nu(0), \\ V_{1(-1)}(0)\mathrm{Ai}'(0) + V_{2(-1)}(0)\mathrm{Bi}'(0) = [\varphi'(0)]^{-1}\alpha_1 - f_{-1}(0)\nu'(0). \end{cases} \tag{51}$$

Определитель этой системы не равен нулю, так как $W_{\mathrm{Bp}}(\mathrm{Ai}(0), \mathrm{Bi}(0)) = \pi^{-1}$.

Следовательно, система (51) имеет единственное решение, которое при необходимости легко выписать в явном виде. Так как правые части системы (51) являются величинами порядка $O(1)$, то и решение системы (51) является величиной порядка $O(1)$. Определив однозначно величины $V_{k(-1)}(0)$, мы однозначно определим функции $V_{k(-1)}(x)$, а следовательно, однозначно определим и решение задачи (37).

Однако слагаемое $\varepsilon^{-1}U_{-1}(x,t)$, входящее в ряд решения (36), неограниченно возрастает при $\varepsilon \to +0$ для всех $x \in J$.

Возможно ли получить ограниченное решение расширенной задачи (5), а следовательно, и изучаемой с.в.з. (1)?

В [9–12] этот вопрос решался положительно за счет специального выбора начальных условий.

Сделаем некоторые упрощения, а именно: зададим начальные значения $\alpha_k$ в виде

$$\alpha_0 = f_{-1}(x)\nu(0), \qquad \alpha_1 = \varphi'(0)f_{-1}(x)\nu'(0). \tag{52}$$

Тогда система (51) имеет решение, тождественно равное нулю, т. е. $V_{k(-1)}(0)=0$, $k=1,2$, а следовательно, и $V_{k(-1)}(x)\equiv 0$.

В этом случае мы получим наиболее простой вид решения задачи (37):

$$U_{-1}(x,t) = f_{-1}(x)\nu(t). \tag{53}$$

Вопрос об ограниченности этого решения и предельный переход в исследуемом решении при стремлении малого параметра к нулю будет изучен ниже.

Для однозначного определения главного члена асимптотики решения расширенной задачи (5) нам необходимо решить в пространстве $Y_2$ итерационное уравнение (39) при $r=2$.

Вычисляя правую часть этого уравнения, по аналогии с предыдущим будем определять функции $Q_{k1}(x)\equiv 0$, $k=1,2$, $f_0(x)\equiv 0$ и получим дифференциальные уравнения

$$dV_{k0}(x)=0, \quad k=1,2; \qquad Dg_1(x) = -L_3 f_{-1}(x). \tag{54}$$

*Вывод* 6. При решении итерационных уравнений (37)–(39) при $r=1,2$:

1) однозначно определено решение задачи (37);

2) определено решение уравнения (38) вида

$$U_0(x,t) = \sum_{k=1}^{2} V_{k0}(x)W_k(t) + \omega_0(x). \tag{55}$$

В последнем случае подставим начальные условия (38) в решение (55). Тогда относительно величин $V_{k0}(0)$ снова получим алгебраическую систему двух уравнений с определителем $W_{\mathrm{Bp}}(\mathrm{Ai}(0), \mathrm{Bi}(0))$. Из этой системы однозначно определим постоянные $V_{k0}(0)=O(1)$. Следовательно, однозначно определено решение задачи (38).

*Вывод* 7. Решая постепенно итерационные уравнения (37)–(39) при $r=1,2$ в п.б.р. (24), мы однозначно определили решения задач (37) и (38) в этом пространстве, т. е. однозначно определили функцию

$$\tilde{U}_{\varepsilon 0}(x,t,\varepsilon) \equiv \varepsilon^{-1}U_{-1}(x,t) + U_0(x,t) \equiv$$

$$\equiv \varepsilon^{-1}f_{-1}(x)\nu(t) + \sum_{k=1}^{2} V_{k0}(x)W_k(t) + \omega_0(x). \tag{56}$$

Впоследствии будет показано, что эта функция является главным членом асимптотики решения расширенной задачи (5), а ее сужение при $t = \Phi(x, \varepsilon)$ будет главным членом асимптотики решения с.в.з. (1).

Продолжая далее итерационный процесс, методом математической индукции можно показать, что серия итерационных задач (37)–(39) асимптотически корректна в п.б.р. (24) в следующем смысле. Решая постепенно итерационные уравнения (37)–(39) при $r = \overline{1, p+2}$, мы однозначо определяем решения задач (37)–(39) при $r = \overline{1, p}$.

**8. Оценка остаточного члена асимптотического ряда.** Запишем решение расширенной задачи (5) в виде

$$\tilde{U}(x, t, \varepsilon) \equiv \tilde{U}_{\varepsilon m}(x, t, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1}\tilde{\xi}_{m+1}(x, t, \varepsilon), \tag{57}$$

где

$$\tilde{U}_{\varepsilon m}(x, t, \varepsilon) \equiv \sum_{r=-1}^{m} \varepsilon^r U_r(x, t) \tag{58}$$

— частичная сумма, а $\varepsilon^{m+1}\tilde{\xi}_{m+1}(x, t, \varepsilon)$ — остаточный член ряда (35).

Подставим частичную сумму (58) в расширенную задачу (5). Учитывая тот факт, что коэффициенты $U_r(x, t)$ являются решениями итерационных задач (36)–(38), убеждаемся, что частичная сумма (58) удовлетворяет задаче

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\varepsilon \tilde{U}_{\varepsilon m}(x, t, \varepsilon) &= h(x) - \varepsilon^{m+1}\tilde{\rho}_{m+1}(x, t, \varepsilon), \\ \tilde{U}_{\varepsilon m}(M, \varepsilon) &= \varepsilon^{-1}\alpha_0 + A_0, \\ \frac{d\tilde{U}_{\varepsilon m}(M, \varepsilon)}{dx} &= \varepsilon^{-2}\alpha_1 + \varepsilon^{-1}A_1 + \varepsilon^m \frac{\partial U_m(M)}{\partial x}, \end{aligned} \tag{59}$$

где

$$\tilde{\rho}_{m+1}(x, t, \varepsilon) \equiv L_1 U_m + L_2(U_{m-1} + \varepsilon U_m) + L_3(U_{m-2} + \varepsilon U_{m-1} + \varepsilon^2 U_m). \tag{60}$$

Изучим более детально функцию (60). Учитывая изложенные выше результаты, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{m+1}(x, t, \varepsilon) &\equiv \sum_{k=1}^{2} \left[\varepsilon L_3 (V_{k(m-1)}(x) + \varepsilon V_{km}(x)) W_k(t) + \varepsilon^2 L_3 Q_{km}(x) W_k'(t)\right] + \\ &+ \varepsilon L_3 (f_{m-1}(x) + \varepsilon f_m(x)) \nu(t) + \varepsilon^2 L_3 g_m(x)\nu'(t) + r(x)\omega_{m+1}(x) + \\ &+ \varepsilon[\pi^{-1} d g_m(x) + L_3(\omega_{m-1}(x) + \varepsilon\omega_m(x)) \cong \\ &\cong \sum_{k=1}^{2} \left[\varepsilon O(1) W_k(t) + \varepsilon^2 O(1) W_k'(t)\right] + \\ &+ \varepsilon O(1)\nu(t) + \varepsilon^2 O(1)\nu'(t) + O(1). \end{aligned} \tag{61}$$

Полученное тождество показывает следующее: частичная сумма (58) является формальным решением [7, с. 26; 13, с. 25] расширенной задачи (5). А это означает, что ряд (57) или функция (57) является формальным асимптотическим рядом расширенной задачи (5).

Проведем сужение в тождестве (57) при $t = \Phi(x, \varepsilon)$. Получим

$$U(x, \Phi(x, \varepsilon), \varepsilon) \equiv U_{\varepsilon m}(x, \Phi(x, \varepsilon), \varepsilon) + \varepsilon^{m+1}\xi_{m+1}(x, \Phi(x, \varepsilon), \varepsilon). \tag{62}$$

Так как в исследуемом случае имеет место необходимое условие метода регуляризации (см. тождество (4)), частичная сумма $U_{\varepsilon m}(x, \Phi(x, \varepsilon), \varepsilon)$ будет формальным решением с.в.з. (1), а функция (62) будет формальным асимптотическим рядом решения этой задачи.

Используя формулы (59), для остаточного члена асимптотики решения расширенной задачи (5) получим следующую задачу:

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{\xi}_{m+1}(x, t, \varepsilon) = \varepsilon \tilde{\rho}_{m+1}(x, t, \varepsilon), \tag{63}$$

$$\tilde{\xi}_{m+1}(M, \varepsilon) = 0, \quad \frac{d\tilde{\xi}_{m+1}(M, \varepsilon)}{dx} = -\frac{\partial U_m(M)}{\partial x}.$$

Необходимо провести оценку остаточного члена асимптотики решения с.в.з. (1). Для этого можно провести сужение в задаче (63). Ф.с.р. для уравнения (1) известна. Используя метод Лагранжа, можно построить решение полученной суженной задачи и исследовать асимптотические свойства этого решения на отрезке $J$ при стремлении малого параметра к нулю. Такой метод оценки остаточного члена асимптотики решения использован автором в [9, 10].

Здесь мы получим решение расширенной задачи (63) иным методом, использованым в последующих работах (см., например, [11, 12]).

Правая часть уравнения (63) (см. тождество (61)) принадлежит п.б.р. (24). Так как п.б.р. (24) инвариантно относительно расширенного оператора $\tilde{L}_\varepsilon$, решение уравнения (63) тоже принадлежит этому пространству. Таким образом, для решения уравнения (63) можно применить другой классический метод — метод неопределенных коэффициентов.

Итак, решение уравнения (63) ищем в следующем виде:

$$\tilde{\xi}_{m+1}(x, t, \varepsilon) \equiv \sum_{k=1}^{2} \left[ \tilde{V}_{k(m+1)}(x, \varepsilon) W_k(t) + \tilde{Q}_{k(m+1)}(x, \varepsilon) W_k'(t) \right] +$$
$$+ \tilde{f}_{m+1}(x, \varepsilon)\nu(t) + \tilde{g}_{m+1}(x, \varepsilon)\nu'(t) + \tilde{\omega}_{m+1}(x, \varepsilon), \tag{64}$$

где коэффициенты при с.о.м. подлежат определению.

Подставим решение (64) в уравнение (63) и приравняем коэффициенты при с.о.м. В результате получим следующие уравнение:

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_{k(m+1)}(x, \varepsilon) + \varepsilon L_3 \tilde{Q}_{k(m+1)}(x, \varepsilon) &= \varepsilon L_3 Q_{km}(x), \\ D\tilde{Q}_{k(m+1)}(x, \varepsilon) + \varepsilon L_3 \tilde{V}_{k(m+1)}(x, \varepsilon) &= \varepsilon L_3 \left( V_{k(m-1)}(x) + \varepsilon V_{km}(x) \right) \end{aligned} \tag{65}$$

и

$$\begin{aligned} d\tilde{f}_{m+1}(x, \varepsilon) + \varepsilon L_3 \tilde{g}_{m+1}(x, \varepsilon) &= \varepsilon L_3 g_m(x), \\ D\tilde{g}_{m+1}(x, \varepsilon) + \varepsilon L_3 \tilde{f}_{m+1}(x, \varepsilon) &= \varepsilon L_3 \left( f_{m-1}(x) + \varepsilon f_m(x) \right). \end{aligned} \tag{66}$$

Кроме того, для определения функции $\tilde{\omega}_{m+1}(x, \varepsilon)$ получим алгебраическое уравнение

$$-r(x)\tilde{\omega}_{m+1}(x, \varepsilon) + \varepsilon\pi^{-1}\varphi'^2(x)\tilde{f}_{m+1}(x, \varepsilon) + \varepsilon^2\pi^{-1} d\tilde{g}_{m+1}(x, \varepsilon) = \tilde{S}_{m+1}(x, \varepsilon), \tag{67}$$

правая часть которого является известной функцией, явный вид которой при необходимости легко выписать.

Анализируя полученные уравнения (65)–(67), видим, что все они являются регулярными по малому параметру $\varepsilon > 0$. Следовательно, решения этих уравнений можно строить в виде рядов по малому параметру, т. е. в виде

$$\tilde{\rho}_{(m+1)}(x,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{j-1} \varepsilon^s \tilde{\rho}_{(m+1)s}(x) + \varepsilon^j \tilde{\Theta}^*_{(m+1)j}(x,\varepsilon), \tag{68}$$

где

$$\tilde{\rho}_{(m+1)}(x,\varepsilon) = \left\{ \tilde{V}_{k(m+1)}(x,\varepsilon),\ \tilde{Q}_{k(m+1)}(x,\varepsilon),\ \tilde{f}_{m+1}(x,\varepsilon),\ \tilde{g}_{m+1}(x,\varepsilon),\ \tilde{\omega}_{m+1}(x,\varepsilon) \right\},$$

$$\tilde{\Theta}^*_{(m+1)j}(x,\varepsilon) =$$

$$= \left\{ \tilde{V}^*_{k(m+1)j}(x,\varepsilon),\ \tilde{Q}^*_{k(m+1)j}(x,\varepsilon),\ \tilde{f}^*_{k(m+1)j}(x,\varepsilon),\ \tilde{g}^*_{(m+1)j}(x,\varepsilon),\ \tilde{\omega}_{(m+1)j}(x,\varepsilon) \right\}.$$

Подставив (68) в соответствующие уравнения и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра $\varepsilon > 0$, получим соответствующие уравнения для определения коэффициентов асимптотических рядов (68). Исследуя в явном виде функци $\tilde{V}_{k(m+1)}(x,\varepsilon)$ и $\tilde{Q}_{k(m+1)}(x,\varepsilon)$, получаем следующую рекуррентную систему уравнений:

$$dV_{k\,(m+1)0}(x) = 0, \quad DQ_{k\,(m+1)0}(x) = 0, \quad k = 1, 2, \tag{69}$$

$$\begin{cases} dV_{k(m+1)1}(x) = -L_3 Q_{km}(x) - L_3 \tilde{Q}_{k(m+1)0}(x), \\ dQ_{k(m+1)1}(x) = L_3 V_{k(m-1)}(x) - L_3 \tilde{V}_{k(m+1)0}(x), \end{cases} \tag{70}$$

..............................................................

Решая полученную систему уравнений, однозначно определим функции $Q_{k(m+1)s}(x)$, $s = \overline{1, j-1}$, причем $Q_{k(m+1)0}(x) \equiv 0$. Функции $V_{k(m+1)s}(x)$ определим с точностью до произвольных множителей $V^0_{k(m+1)s}$. Для остаточных элементов получим уравнения

$$\begin{aligned} d\tilde{V}^*_{k(m+1)j}(x,\varepsilon) &= F^V_{k(m+1)j}(x,\varepsilon), \\ D\tilde{Q}^*_{k(m+1)j}(x,\varepsilon) &= F^Q_{k(m+1)j}(x,\varepsilon). \end{aligned} \tag{71}$$

Правые части этих уравнений являются известными достаточно гладкими функциями при $x \in J$. Следовательно, в пространстве гладких функций существуют решения уравнений (71), для которых справедливы асимптотические соотношения

$$\tilde{Q}^*_{k(m+1)j}(x,\varepsilon) \cong O(1), \qquad \tilde{V}^*_{k(m+1)j}(x,\varepsilon) \cong O(1) \quad \text{при} \quad x \in J. \tag{72}$$

Аналогичные асимптотические равенства справедливы и для остальных остаточных членов ряда (68). Таким образом, выполняется асимптотическое равенство

$$\tilde{P}_{(m+1)}(x,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{j-1} \varepsilon^s \tilde{P}_{(m+1)s}(x) + O(\varepsilon) \cong O(1). \tag{73}$$

С учетом равенства (57) получаем следующее асимптотическое равенство для остаточного члена:

$$\tilde{\xi}_{m+1)}(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{2} O(1) W_k(t) + \varepsilon O(1) W_k'(t) +$$

$$+ O(1)\nu(t) + \varepsilon O(1)\nu'(t) + O(\varepsilon). \tag{74}$$

Проводя сужение в тождестве (64) при $t = \Phi(x,\varepsilon)$, имеем

$$\xi_{m+1}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon) = \sum_{k=1}^{2} O(1)W_k(t)(\varepsilon^{-1}\varphi(x)) + O(\varepsilon)\frac{dW_k(\varepsilon^{-1}\varphi(x))}{d\varepsilon^{-1}\varphi(x)} +$$

$$+ O(1)\nu(\varepsilon^{-1}\varphi(x)) + O(\varepsilon)\frac{d\nu(\varepsilon^{-1}\varphi(x))}{d\varepsilon^{-1}\varphi(x)} + O(\varepsilon). \qquad (75)$$

Учитывая изложенное выше, получаем окончательную структуру решения изучаемой с.в.з (1) вида

$$U(x,\varepsilon^{-1}\varphi(x),\varepsilon) = \sum_{k=1}^{2}\left\{\left[\sum_{r=0}^{m}\varepsilon^r V_{kr}(x)+O(\varepsilon^{m+1})\right]W_k(\varepsilon^{-1}\varphi(x)) + \right.$$

$$\left. + \frac{dW_k(\varepsilon^{-1}\varphi(x))}{d\varepsilon^{-1}\varphi(x)}\left[\sum_{r=0}^{m+1}\varepsilon^r Q_{kr}(x)+O(\varepsilon^{m+2})\right]\right\} +$$

$$+ \left[\sum_{r=-1}^{m}\varepsilon^r f_r(x)+O(\varepsilon^{m+1})\right]\nu(\varepsilon^{-1}\varphi(x)) +$$

$$+ \left[\sum_{r=0}^{m+1}\varepsilon^r g_r(x)+O(\varepsilon^{m+2})\right]\frac{d\nu(\varepsilon^{-1}\varphi(x))}{d\varepsilon^{-1}\varphi(x)} + \sum_{r=0}^{m}\varepsilon^r\omega_r(x) + O(\varepsilon^{m+1}). \qquad (76)$$

Осталось исследовать предел полученного решения при стремлении малого параметра к нулю.

Запишем решение расширенной задачи (5) в виде

$$\tilde{U}(x,t,\varepsilon) = \varepsilon^{-1}f_{-1}(x)\nu(t) + \sum_{k=1}^{2}V_{k0}(x)W_k(t) + \omega_0(x) + \varepsilon\tilde{\xi}_1(x,t,\varepsilon). \qquad (77)$$

Исследуем предел остаточного члена при стремлении малого параметра к нулю. Для всех $x\in J_1$ все с.о.м., входящие в остаточный член, являются ограниченными при $\varepsilon\to+0$. При $x>0$ и $\varepsilon\to+0$, т. е. при $t\to+\infty$, части с.о.м. неограниченно возрастают. Однако благодаря множителю $\varepsilon$ для всех $x\in[-l;\,l]$ выполняется предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\xi_1(x,t,\varepsilon) = 0. \qquad (78)$$

Тогда для всех $x\in J$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\tilde{U}(x,t,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to+0}[\varepsilon^{-1}U_{-1}(x,t)+U_0(x,t)]. \qquad (79)$$

***Замечание* 6.** Ранее [9, 10] все с.о.м., входящие в решение изучаемой задачи, были ограниченными в исследуемой области. В этом случае:

1) на любом компакте отрезка $J$, не содержащем точки поворота, имело место предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\tilde{U}(x,t,\varepsilon) = \omega(x), \qquad (80)$$

где $\omega(x)$ — решение вырожденного уравнения, соответствующее с.в.з. (1);

2) была дана оценка остаточного члена асимптотики решения по норме.

В исследуемом случае решение изучаемой задачи содержит часть с.о.м., неограниченно возрастающих на бесконечности. Поэтому мы получили оценки остаточных членов асимптотики решения не по норме, а в виде асимптотических равенств (74) и (75). В исследуемом случае мы получили решение с.в.з. (1) в виде асимптотического равенства (76).

Из структуры полученного решения с.в.з. (1) видно, что все слагаемые, содержащиеся в равенстве (76), являются равномерно непрерывными функциями для всех $x \in J$ при любом фиксированном значении $\varepsilon > 0$. А это означает, что нами построена асимптотика решения с.в.з. (1), равномерно пригодная во всей области изменения переменной $x \in J$, включая и точку поворота. Выполнение этого требования является очень ценным в теории сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с нестабильным спектром предельного оператора.

Учитывая свойства с.о.м. $\nu(t)$ и равенство (46), при $x > 0$ получаем

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{-1} f_{-1}(x)\nu(t) + \omega_0(x) \equiv r^{-1}(x)h(x) \equiv \omega(x). \tag{81}$$

Полученные тождества (78) и (81) означают следующее: частичное решение расширенной задачи (5), а следовательно, и с.в.з. (1), в пределе при $\varepsilon \to +0$ совпадает с решением вырожденного уравнения.

Сформулируем в виде общей теоремы полученные результаты.

**Теорема.** *Пусть:*

*а)* $r(x), p(x), h(x) \in C^\infty[J]$;

*б)* $r(x) = x\tilde{r}(x)$, *где* $\tilde{r}(x) > 0$ *при* $x \in J$.

*Тогда при достаточно малых значениях параметра* $\varepsilon > 0$:

1) *изложенным методом можно построить единственное решение расширенной задачи* (5) *в пространстве безрезонансных решений* (24) *в виде асимптотического ряда* (35);

2) *сужения этого ряда при* $t = \Phi(x, \varepsilon)$ *является асимптотическим рядом решения сингулярно возмущенной задачи* (1);

3) *справедливы асимптотические равенства* (74)–(76);

4) *при* $x > 0$ *справедливо предельное соотношение* (81).

*Замечание* 7. Пусть $h(0) = 0$, т. е. решение вырожденного уравнения является непрерывной функцией для всех $x \in J$, в том числе и в точке $x = 0$. Тогда согласно формулам (44) и (48) получаем $f_{-1}(x) \equiv 0$. А это с учетом формул (52) означает, что $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$. Следовательно, при $h(0) = 0$:

1) начальные условия (1) принимают естественный вид в теории с.в.з. со стабильным спектром предельного оператора;

2) решение задачи (1) не содержит отрицательной степени малого параметра. А это означает, что полученное решение будет равномерно пригодным не только по переменной $x \in J$, но и по малому параметру $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где $\varepsilon_0 \ll 1$.

*Замечание* 8. Предположим, что вместо с.о.м. $\nu(t)$ (см. равенство (24)) для построения асимптотики решения задачи (1) мы использовали с.о.м.

$$\psi(t) \equiv \mathrm{Hi}(t) \equiv \mathrm{Bi}(t)\int_\infty^t \mathrm{Ai}(\tau)d\tau - \mathrm{Ai}(t)\int_\infty^t \mathrm{Bi}(\tau)d\tau, \tag{82}$$

которое тоже является решением уравнения (18). При $t \in [\varphi_1(-l); 0]$ это с.о.м. будет ограниченным. Однако при $t \to +\infty$ многообразие (82) будет неограниченно возрастать, в отличие от с.о.м. $\nu(t)$, которое является ограниченным во всей области исследования.

*Вывод* 8. Из замечаний 4 и 8 следует, что наиболее удобным с.о.м. для построения равномерной асимптотики решения задачи (1) является с.о.м. $\nu(t)$ (см. равенство (19)).

*Замечание* 9. Пусть $\tilde{r}(x) < 0$ при $x \in J$. В этом случае

$$\varphi_1(x) = \left(\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{r(x)}\,dx\right)^{2/3} \quad \text{при} \quad x \le 0,$$

$$\varphi_2(x) = -\left(\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{-r(x)}\,dx\right)^{2/3} \quad \text{при} \quad x \ge 0,$$

т. е. $\varphi'(x) < 0$ для всех $x \in J$.

В этом случае по аналогии с предыдущим с.о.м. $\mathrm{v}(t)$ будет ограниченным при $t \to \pm\infty$, а с.о.м. (82) снова будет неограниченно возрастать при $t \to -\infty$. Предельное соотношение (81) будет иметь место слева от точки поворота. Схема построения равномерной асимптотики решения с.в.з. (1) при $\tilde{r}(x) < 0$ по форме будет та же, что и при $\tilde{r}(x) > 0$.

*Замечание* 10. Необходимо также исследовать случай, когда функция $\tilde{r}(x)$ меняет свой знак при переходе через точку поворота, т. е. когда функция $r(x) = x\tilde{r}(x)$ не меняет своего знака при переходе через точку поворота. Однако, так как $x = 0$ является простой точкой поворота, $\tilde{r}(0) \ne 0$. Это означает, что функция $r(x)$, а следовательно, и регуляризующая функция $\varphi(x)$ не являются дифференцируемыми в точке $x = 0$.


1. *Langer R. E.* The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order, with special reference to a turning point // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **67**. – P. 461–490.
2. *Справочник* по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
3. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. – М.: Наука, 1990. – 528 с.
4. *Дородницын А. А.* Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка // Успехи мат. наук. – 1952. – **7**, вып. 6 (52). – С. 3–96.
5. *Дзядык В. К.* Некоторые специальные функции и их роль при решении неоднородных дифференциальных уравнений с точкой поворота // Теория функций и ее приложение: Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979. – С. 61–81.
6. *Дзядик С. Ю.* Про побудову розв'язків неоднорідних диференціальних рівнянь з точкою звороту і з малим параметром при похідній // Укр. мат. журн. – 1973. – **25**, № 5. – С. 653–659.
7. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука, 1981. – 310 с.
8. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1983. – 352 с.
9. *Бобочко В. Н.* Сингулярно возмущенная задача Коши с точкой поворота // Мат. физика и нелинейн. механика. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. – Вып. 16 (50). – С. 68–74.
10. *Бобочко В. Н., Коломиец В. Г.* Асимптотическое интегрирование уравнения типа Орра – Зоммерфельда. – Киев, 1990. – 44 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 90.45).
11. *Бобочко В. Н.* Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с точкой поворота // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 9. – С. 1505–1515.
12. *Бобочко В. Н.* Уравнение типа Орра – Зоммерфельда с двумя точками поворота // Там же. – 1991. – **28**, № 10. – С. 1559–1570.
13. *Бобочко В. М., Маркуш І. І.* Асимптотичне інтегрування диференціальних рівнянь із нестабільним спектром граничного оператора. – Київ: Віпол, 1993. – 214 с.


Получено 10.03.95