УДК 519.65

Н. П. Корнейчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ЛИНЕЙНЫХ ПОПЕРЕЧНИКАХ КЛАССОВ H^{ω} *

We obtain new results related to the estimation of the linear widths λ_N and λ^N in the spaces C and L_p for the classes H^{ω} (in particular, for H^{α}, $0<\alpha<1$).

Одержано нові результати, пов'язані з оцінкою лінійних поперечників λ_N та λ^N у просторах C і L_p для класів H^{ω}, зокрема для H^{α}, $0<\alpha<1$.

1. В классической теории приближения есть задачи, поставленные несколько десятилетий назад, но до сих пор не получившие решения. Одной из них является задача о точных значениях линейных поперечников в пространстве C класса функций, удовлетворяющих условию Гельдера порядка α, если $0<<\alpha<1$. Отметим, что речь идет о линейных поперечниках, и интерес к этой задаче вызван тем, что колмогоровские поперечники в этом же случае известны.

Напомним некоторые определения (см., например, [1, 2]). Пусть (X, ρ) — метрическое пространство с расстоянием ρ, $\mathfrak{M}$ — фиксированное множество в X, L_N — класс всех линейных многообразий размерности $\leq N$. Величина

$$d_N(\mathfrak{M}, X) = \inf_{F_N \in L_N} \sup_{x \in \mathfrak{M}} \inf_{u \in F_N} \rho(x, u)$$

— N-поперечник по Колмогорову множества $\mathfrak{M}$ в пространстве (X, ρ). Если $\mathcal{L}_N = \mathcal{L}_N(X, F_N)$ — множество всех линейных непрерывных отображений пространства X в F_N, то величину

$$\lambda_N(\mathfrak{M}, X) = \inf_{F_N \in L_N} \inf_{A \in \mathcal{L}_N} \sup_{x \in \mathfrak{M}} \rho(x, Ax) \tag{1}$$

называют линейным N-поперечником множества $\mathfrak{M}$ в пространстве (X, ρ). Если под $\mathcal{L}_N$ подразумевать множество всех непрерывных (не обязательно линейных) отображений пространства X в F_N, то правую часть (1) будем обозначать через $\gamma_N(\mathfrak{M}, X)$.

Помимо поперечников d_N, λ_N и γ_N, имеющих аппроксимационное происхождение, рассматриваются поперечники, связанные с задачей оптимального кодирования. Пусть $X=(X, \rho)$ — метрическое пространство, X'_c — множество заданных на X непрерывных функционалов. Набор $M_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots$ $\ldots, \mu_N\}$ функционалов из X'_c можно рассматривать как метод кодирования, сопоставляющий элементу $x \in X$ точку $M_N(x) = \{\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_N(x)\}$ в $\mathbb{R}^N$. При фиксированных $\mathfrak{M} \subset X$ и $M_N \subset X'_c$ полагаем

$$D(M_N, \mathfrak{M}, \rho) = \sup\{\rho(x, y)\colon\ x, y \in \mathfrak{M},\ M_N(x) = M_N(y)\}.$$

Если $\mathfrak{M}$ — компакт, $D(\mathfrak{M}, \rho)$ — его диаметр, то разность $\mathrm{In}(M_N, \mathfrak{M}, \rho) = D(\mathfrak{M}, \rho) - D(M_N, \mathfrak{M}, \rho)$ называем [3] информативностью набора функционалов M_N относительно множества $\mathfrak{M}$ и метрики ρ. Величину

$$\gamma^N(\mathfrak{M}, X) = \inf_{M_N \subset X'_c} D(M_N, \mathfrak{M}, \rho) \tag{2}$$

---

* Работа частично поддержана Международной соросовской программой поддержки образования в области точных наук (ISSEP), грант № EPU 051030.

назовем информационным поперечником множества $\mathfrak{M}$ в метрическом пространстве (X, ρ). Ясно, что набор M_N, реализующий инфимум в (2), имеет наибольшую информативность среди всех наборов $M_N \subset X'_c$.

Если $X = (X, \rho)$ — линейное метрическое пространство, X'_l — множество заданных на X линейных непрерывных функционалов, то величину

$$\lambda^N(\mathfrak{M}, X) = \inf_{M_N \subset X'_l} D(M_N, \mathfrak{M}, \rho) \tag{3}$$

будем называть линейным информационным поперечником множества $\mathfrak{M}$ в X. Отметим, что если $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное множество в нормированном пространстве X, то [2, с. 381]

$$D(M_N, \mathfrak{M}, \rho) = 2 \sup \{ \|x\| \colon x \in \mathfrak{M},\ M_N(x) = 0 \}. \tag{4}$$

Далее нам потребуются некоторые соотношения между введенными поперечниками. Помимо непосредственно вытекающих из определений неравенств $d_N \le \lambda_N$, $\gamma^N \le \lambda^N$ приведем следующее утверждение.

***Предложение* 1.** *Справедливы неравенства*

$$\gamma^N(\mathfrak{M}, X) \le 2\gamma_N(\mathfrak{M}, X), \quad \lambda^N(\mathfrak{M}, X) \le 2\lambda_N(\mathfrak{M}, X).$$

Действительно, пусть (X, ρ) — линейное метрическое пространство, F_N — N-мерное линейное многообразие в X. Всякое непрерывное (линейное непрерывное) отображение из X в F_N имеет вид

$$A(x, M_N, F_N) = \sum_{k=1}^{N} \mu_k(x)\, x_k,$$

где $\{x_k\}_1^N$ — базис F_N, $M_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\}$ — некоторый набор заданных на X непрерывных (линейных непрерывных) функционалов. Если $\mathfrak{M} \subset X$ и для $y, z \in \mathfrak{M}$ выполняются равенства $\mu_k(y) = \mu_k(z)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, т. е. $M_N(y) = M_N(z)$, то $A(y, M_N, F_N) = A(z, M_N, F_N)$ и для любого $F_N \in L_N$

$$\rho(y, z) \le \rho(y, A(y, M_N, F_N)) + \rho(z, A(z, M_N, F_N)) \le$$
$$\le 2 \sup_{x \in \mathfrak{M}} \rho(x, A(x, M_N, F_N)).$$

Следовательно,

$$\sup\{\rho(y, z) \colon\ y, z \in \mathfrak{M},\ M_N(y) = M_N(z)\} \le$$
$$\le 2 \inf_{F_N \subset L_N} \sup_{x \in \mathfrak{M}} \rho(x, A(x, M_N, F_N)),$$

а так как это верно для любого набора $M_N \subset X'_c$ $(M_N \subset X'_l)$, то

$$\gamma^N(\mathfrak{M}, X) \le 2 \inf_{M_N \subset X'_c} \inf_{F_N \subset L_N} \sup_{x \in \mathfrak{M}} \rho(x, A(x, M_N, F_N)) = 2\gamma_N(\mathfrak{M}, X)$$

и соответственно при $M_N \subset X'_l$ $\lambda^N(\mathfrak{M}, X) \le 2\lambda_N(\mathfrak{M}, X)$.

Заметим [1, с. 218], что в случае, когда $\mathfrak{M}$ — алгебраическая сумма компакта и конечномерного пространства, справедливо равенство $D_N(\mathfrak{M}, X) = \gamma_N(\mathfrak{M}, x)$.

2. Пусть $C = C[0, \pi]$ — линейное пространство непрерывных на отрезке $[0, \pi]$ функций $f(t)$, H^ω — класс функций $f(t) \in C$, модуль непрерывности которых

$$\omega(f, \delta) = \sup\{|f(t') - f(t'')| : |t' - t''| \le \delta,\ t',\ t'' \in [0, \pi]\}$$

не превышает на $[0, \pi]$ заданного модуля непрерывности $\omega(\delta)$. В случае, когда $\omega(\delta) = K\delta^\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, вместо H^ω будем писать KH^α. Поперечники класса H^ω будем оценивать как в равномерной метрике самого пространства C с нормой

$$\|f\|_C = \max_{0 \le t \le \pi} |f(t)|,$$

так и в метрике линейных пространств L_p, $0 < p \le \infty$, расстояние в которых определяется равенствами

$$\rho(f, g)_{L_p} = \int_0^\pi |f(t) - g(t)|^p\, dt, \quad 0 < p < 1;$$

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p} = \left(\int_0^\pi |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p}, \quad 0 \le p < \infty;$$

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty} = \sup_{0 \le t \le \pi} \operatorname{vrai} |f(t)|, \quad p = \infty.$$

Точные значения поперечника $d_N(H^\omega, L_p)$ найдены при всех $p \in (0, \infty]$ для произвольного выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(\delta)$:

$$d_N(H^\omega, L_p) = A_{N,p}(\omega) := \begin{cases} \dfrac{1}{2} N \displaystyle\int_0^{\pi/N} \omega^p(t)\, dt, & 0 < p \le 1; \\ \dfrac{1}{2}\left(N \displaystyle\int_0^{\pi/N} \omega^p(t)\, dt\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty; \\ \dfrac{1}{2}\, \omega(\pi/N), & p = \infty. \end{cases} \tag{5}$$

Поперечники $d_N(H^\omega, L_\infty) = d_N(H^\omega, C)$ найдены В. М. Тихомировым [4] в 1960 г., при $p = 1$ результат приведен в автореферате диссертации Маковоза Ю. И. [5] в 1969 г., для $1 < p < \infty$ и $0 < p < 1$ задача решена автором соответственно в [6, 7] и [8]. Для лучшего понимания дальнейшего приведем идею доказательств.

Оценку сверху при $p \ge 1$ дает оператор наилучшего приближения функций $f(t) \in H^\omega$ подпространством $S_{N,0}$ сплайнов нулевого порядка по разбиению

$$t_k = k\pi/N, \quad k = 0, 1, \ldots, N, \tag{6}$$

т. е. кусочно-постоянными функциями с возможными разрывами в точках t_k, $k = 1, \ldots, N-1$. Ключевую роль играет следующий факт [6; 2, с. 320].

Лемма 1. *Для $f(t) \in C[a, b]$ при всех $p \ge 1$ справедлива точная оценка*

$$\min_{\eta \in \mathbb{R}^1} \int_a^b |f(t) - \eta|^p\, dt \le 2^{-p} \int_0^{b-a} \omega^p(f, t)\, dt.$$

Об оценке сверху поперечника $d_N(H^\omega, L_p)$ при $0 < p < 1$ скажем ниже. Точную оценку для $d_N(H^\omega, L_p)$ при выпуклом $\omega(\delta)$ и для всех $0 < p < \infty$ удалось получить, опираясь на теорему Борсука [1, с. 84; 2, с. 94], стандартным способом, выделяя в классе H^{ω} специальное $(N+1)$-параметрическое семейство функций, содержащее нужные экстремали и позволяющее построить на N-мерной сфере непрерывное и нечетное векторное поле [6; 2, с. 369; 8]. Заметим, что поскольку H^{ω} — сумма компакта и одномерного пространства констант, $\gamma_N(H^{\omega}, L_p) = d_N(H^{\omega}, L_p)$.

Рассмотрим оценку линейного поперечника класса H^{ω} в L_p. В силу общего неравенства $d_N \leq \lambda_N$ из неравенства (5) для $\lambda_N(H^{\omega}, L_p)$ вытекают оценки снизу. Являются ли они точными, т. е. существует ли линейный непрерывный оператор A из C в некоторое пространство F_N такой, что

$$\sup\{\rho(x, Ax)_{L_p} : x \in H^{\omega}\} = d_N(H^{\omega}, L_p)\,?$$

Оказалось, что при $0 < p \leq 3$ такой оператор существует среди непрерывных линейных отображений C в $S_{N,0}$. Это оператор среднего значения, сопоставляющий функции $f(t) \in C$ кусочно-постоянную функцию

$$\psi_N(f, t) = \frac{N}{\pi} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)\,dt, \quad t_{k-1} < t \leq t_k, \quad t_k = k\pi/N. \tag{7}$$

Доказательство основывается на следующем утверждении [2, с. 335], которое интересно сравнить с леммой 1.

Лемма 2. *Пусть* $f(t) \in C[a, b]$ *и* $\int_a^b f(t)\,dt = 0$. *Тогда при* $0 < p \leq 3$ *справедлива точная оценка*

$$\int\limits_a^b |f(t)|^p\,dt \leq 2^{-p} \int\limits_0^{b-a} \omega^p(f, t)\,dt.$$

Этот факт сначала был установлен при $p = 1$ автором [9], затем при $p = 2, 3$ — Сторчаем В. Ф. [10, 11]. В общем случае лемму 2 доказал автор [7], опираясь на установленное им же неравенство

$$2^p(x^p + x) \leq (1+x)^{p+1}, \quad x \geq 0, \quad 0 < p \leq 3, \tag{8}$$

имеющее, может быть, и самостоятельный интерес. Лемма 2 позволяет получить при $0 < p \leq 3$ и любом $\omega(\delta)$ для $\lambda_N(H^{\omega}, L_p)$ оценку сверху, совпадающую при $1 \leq p \leq 3$ с оценкой для $d_N(H^{\omega}, L_p)$. В силу предложения 1 эта лемма дает точную оценку сверху и для $d_N(H^{\omega}, L_p)$ при $0 < p < 1$, если учесть результаты [8]. Таким образом, для любого выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(\delta)$ при $0 < p \leq 3$

$$d_N(H^{\omega}, L_p) = \gamma_N(H^{\omega}, L_p) = \lambda_N(H^{\omega}, L_p) = A_{N,p}(\omega). \tag{9}$$

В случае $\omega(\delta) = K\delta$, $0 \leq \delta \leq \pi$, утверждение леммы 2 справедливо при всех $p > 0$, и равенства (9) имеют место для $0 < p \leq \infty$.

Возникают следующие вопросы:

1) совпадают ли линейные и колмогоровские поперечники класса H^{ω} в L_p, если $p > 3$ и $\omega(\delta) \neq K\delta$, в частности, для $\omega(\delta) = K\delta^{\alpha}$, $1 < \alpha < 1$?

2) если не совпадают, то каково точное значение $\lambda_N(H^{\omega}, L_p)$ хота бы при $p = \infty$?

Эти вопросы долгое время остаются открытыми, и главная причина, по-видимому, в том, что не существует эффективного метода оценки поперечников λ_N снизу, существенно использующего линейность отображений из X в F_N. Метод оценки снизу колмогоровских поперечников, базирующийся на теореме Борсука, использует только непрерывность и нечетность отображений.

Некоторые соображения позволяют предполагать, что ответ на вопрос 1 отрицательный. В частности, неравенство (8) при $p > 3$ уже не верно. Кроме того, еще в 1962 г. автор установил [12] (см. также [13, с. 125; 14, с. 213]), что в периодическом случае линейный оператор, отображающий C в подпространство тригонометрических полиномов, может реализовать верхнюю грань наилучших приближений класса H^{ω} тогда и только тогда, когда $\omega(\delta) = K\delta$. Можно доказать в некотором смысле более общий результат.

Предложение 2. *Пусть X — линейное нормированное пространство, $\mathfrak{M}$ — некоторое множество в X, F — конечномерное подпространство и P — оператор наилучшего приближения элементов $x \in X$ элементами подпространства F. Если для любого $x \in \mathfrak{M}$ элемент Px в F единствен и во множестве $\mathfrak{M}$ найдутся элементы x_1 и x_2, $x_1 \neq x_2$, такие, что $Px_1 = Px_2$,*

$$\|x_1 - Px_1\| = \|x_2 - Px_2\| = \sup_{x \in \mathfrak{M}} \|x - Px\| =: d,$$

и для некоторого $c \in \mathbb{R}^1$ элемент $x_3 = c(x_1 - x_2)$ принадлежит $\mathfrak{M}$, причем $\|x_3\| > d$, то не существует линейного оператора $A: X \to F$ такого, что

$$\sup\{\|x - Ax\|: x \in \mathfrak{M}\} = d. \tag{10}$$

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что для линейного оператора A равенство (10) справедливо. Тогда из соотношений

$$d = \|x_i - Px_i\| \leq \|x_i - Ax_i\| \leq \sup_{x \in \mathfrak{M}} \|x - Ax\| = d, \quad i = 1, 2,$$

следует

$$\|x_i - Px_i\| = \|x_i - Ax_i\|, \quad i = 1, 2. \tag{11}$$

В силу единственности элемента наилучшего приближения из (11) и равенства $Px_1 = Px_2$ следует, что $Ax_1 = Ax_2$. Но тогда $Ax_3 = 0$ и $\|x_3 - Ax_3\| = \|x_3\| > d$, что противоречит (10), ибо $x_3 \in H^{\omega}$.

Норма в пространстве L_p, $1 \leq p < \infty$, является строго выпуклой, что гарантирует единственность функции наилучшего приближения в конечномерном подпространстве. Поэтому если в H^{ω} существуют функции f_1 и f_2, удовлетворяющие условиям предложения 2 относительно экстремального подпространства F_N, то $\lambda_N(H^{\omega}, L_p) > d_N(H^{\omega}, L_p)$. Норма в C и L_∞ не является строго выпуклой, но в силу лемм об ε-сдвиге и о гладкой аппроксимации [1, с. 218] этот случай можно свести к конечномерному со строго выпуклой сферой, если непрерывность оператора наилучшего приближения имеет место. Рассмотрим непрерывные на $[0, \pi]$ функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, заданные следующими условиями (точки t_k определены в (6)):

$$f_i(t_k) = \frac{(-1)^k}{2}\,\omega\left(\frac{\pi}{N}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, N; \quad i = 1, 2;$$

$$f_1\left(t_k + \frac{\pi}{2N}\right) = -f_2\left(t_k + \frac{\pi}{2N}\right) = \omega\left(\frac{\pi}{2N}\right) - \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{\pi}{N}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$f_1(t)$ и $f_2(t)$ линейны на $[t_k, t_k+\pi/2N]$, $[t_k+\pi/2N, t_{k+1}]$, $k=0, 1, \ldots, N-1$. Легко проверить, что при выпуклом вверх $\omega(\delta)$ $f_1, f_2 \in H^\omega$. Пусть F_N — N-мерное подпространство в C или в L_∞, $P: C \to F_N$ — оператор наилучшего равномерного приближения, который можно считать непрерывным. Из доказательства теоремы 2 из [4] следует $Pf_1 = Pf_2 \equiv 0$, причем

$$\|f_1\|_C = \|f_2\|_C = \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{\pi}{N}\right) = d_N(H^\omega, C) = d_N(H^\omega, L_\infty).$$

Кроме того, если $f_3(t) = f_1(t) - f_2(t)$, то $f_3 \in H^\omega$ и $\|f_3\|_C = \omega(\pi/N)$. В силу предложения 2 при $\omega(\delta) \neq K\delta$ не существует линейного оператора A из C в F_N, реализующего поперечник $d_N(H^\omega, L_\infty)$, следовательно,

$$\lambda_N(H^\omega, C) = \lambda_N(H^\omega, L_\infty) > d_N(H^\omega, L_\infty), \quad \omega(\delta) \neq K\delta.$$

Оценку сверху для поперечника $\lambda_N(H^\omega, C)$ доставляет любой линейный оператор из C в N-мерное подпространство. Выше отмечалось, что линейный оператор, сопоставляющий функции $f(t) \in C$ кусочно-постоянную функцию (7), совпадающую на (t_{k-1}, t_k) со средним значением $f(t)$ на этом промежутке, реализует как колмогоровский, так и линейный поперечники класса H^ω в L_p при любом выпуклом $\omega(\delta)$, если $0 < p \le 3$, а для $\omega(\delta) = K\delta$ — при всех $p > 0$. Высказывалась, в том числе и автором, гипотеза, что оператор среднего значения по равноотстоящиему разбиению является наилучшим среди всех линейных операторов из C в N-мерное подпространство и в случае любого выпуклого $\omega(\delta)$. Это предположение подтверждал и тот факт, что оно справедливо в периодическом случае в метрике C для тригонометрических подпространств [14, с. 212].

Так как

$$\sup\left\{\|f\|_C\colon\ f \in H^\omega[a,b],\ \int\limits_a^b f(t)\,dt = 0\right\} = \frac{1}{b-a}\int\limits_0^{b-a}\omega(t)\,dt,$$

справедливо равенство

$$\sup_{f \in H^\omega}\|f - \psi_N(f)\|_\infty = \frac{N}{\pi}\int\limits_0^{\pi/N}\omega(t)\,dt.$$

Отсюда следует оценка сверху

$$\lambda_N(H^\omega, C) = \lambda_N(H^\omega, L_\infty) \le \frac{N}{\pi}\int\limits_0^{\pi/N}\omega(t)\,dt \tag{12}$$

и, в частности,

$$\lambda_N(KH^\alpha, C) = \lambda_N(KH^\alpha, L_\infty) \le \frac{K}{\alpha+1}\left(\frac{\pi}{N}\right)^\alpha, \quad 0 < \alpha \le 1. \tag{13}$$

Ниже мы построим линейный оператор (зависящий от α), при $0 < \alpha < 1$ гарантирующий на классе KH^α погрешность меньшую, чем правая часть (13), т. е. эта оценка не является точной.

Для информационных поперечников γ^N и λ^N класса H^ω точная оценка снизу для $\gamma^N(H^\omega, L_p)$ фактически получена в [8], где соответствующие рассуждения справедливы при всех $p>0$. Из них следует, что для выпуклых вверх $\omega(\delta)$ $\gamma^{N}(H^{\omega},L_p)\geq 2A_{N,p}(\omega)$, $0<p\leq\infty$. В силу предложения 1 и равенства $d_N=\gamma_N$ эта оценка является точной, а значит,

$$\lambda^{N}(H^{\omega},L_p)\;\geq\;\gamma^{N}(H^{\omega},L_p)\;=\;2\gamma_N(H^{\omega},L_p)\;=\;2\,d_N(H^{\omega},L_p)\;=\;2A_{N,p}(\omega).$$

Из оценок (12) и (13) ввиду предложения 1 вытекают аналогичные оценки сверху и для информационного линейного поперечника:

$$\begin{gathered}\lambda^{N}(H^{\omega},C)\;\leq\;\frac{2N}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi/N}\omega(t)\,dt\,,\\ \lambda^{N}(KH^{\alpha},C)\;\leq\;\frac{K}{\alpha+1}\left(\frac{\pi}{N}\right)^{\alpha},\quad 0<\alpha\leq 1.\end{gathered}\tag{14}$$

3. Некоторые новые результаты получим, рассматривая простейший случай, когда $N=1$. Сразу заметим, что точные значения одномерных линейных поперечников $\lambda_1(KH^{\alpha},C)$ и $\lambda^1(KH^{\alpha},C)$ при $0<\alpha<1$, несмотря на простоту постановки задачи, до сих пор не известны.

В соответствии с определением (3) и равенством (4)

$$\lambda_1(KH^{\alpha},C)\;=\;\inf_{\mu\in C^*}\sup\{\|f\|:\,f\in H^{\omega},\;\mu(f)=0\}.$$

Как известно, любой функционал $\mu\in C^*$ представим в виде

$$\mu(f)\;=\;\int\limits_{0}^{\pi}f(t)\,dg(t)\quad\;\forall f\in C,\tag{15}$$

где $g(t)$ — некоторая функция с ограниченным изменением на $[0,\pi]$.

***Предложение* 3.** *Если* $\omega(t)\neq K\delta$ *и* $\omega(\delta)$ *— выпуклый вверх модуль непрерывности, то*

$$\lambda^1(H^{\omega},C)\;>\;\gamma^1(H^{\omega},C)\;=\;\frac{1}{2}\,\omega(\pi).$$

Доказательство. Положим

$$H_*^{\omega}\;=\;\left\{f:\;f\in H^{\omega},\;\;\max_{0\leq t\leq\pi}f(t)\;=\;-\min_{0\leq t\leq\pi}f(t)\;=\;\frac{1}{2}\,\omega(\pi)\right\}.$$

Если предположить, что $\lambda^1(H^{\omega},C)=\gamma^1(H^{\omega},C)$, то существует функционал $\mu_0\in C^*$ такой, что

$$\sup\{\|f\|_C:\,f\in H^{\omega},\;\mu_0(f)=0\}\;=\;\frac{1}{2}\,\omega(\pi),\tag{16}$$

при этом равенство $\mu_0(f)=0$ справедливо для любой функции $f(t)\in H_*^{\omega}$. Действительно, если для $f_1\in H_*^{\omega}$ $\mu_0(f_1)=c\neq 0$, то для функции $f_2(t)=$ $=f_1(t)-c$ $\mu_0(f_2)=0$, но $\|f_2\|_C>\omega(\pi)/2$, что противоречит равенству (16).

Пусть непрерывные на $[0,\pi]$ функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ определены равенствами

$$\varphi_i(1)\;=\;-\varphi_i(0)\;=\;\frac{1}{2}\,\omega(\pi),$$

$$\varphi_1(\pi/2) = -\varphi_2(\pi/2) = \omega(\pi/2) - \frac{1}{2}\,\omega(\pi),$$

$\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ линейны на $[0, \pi/2]$ и $[\pi/2, \pi]$. Так как $\varphi_1, \varphi_2 \in H_*^{\omega}$, то $\mu_0(\varphi_i) = 0$, $i = 1, 2$, и если $\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$, то $\varphi \in H^{\omega}$ и $\mu_0(\varphi) = 0$. Но $\|\varphi\|_C = \varphi(\pi/2) = \omega(\pi/2)$, что в случае $\omega(\delta) \neq K\delta$ противоречит (16).

Рассмотрим оценку сверху. Зафиксируем функционал $\mu \in C^*$, т. е. зафиксируем в (15) функцию $g(t)$ с ограниченным изменением. Пусть $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное множество в C, $\mathfrak{M}_\mu = \{ f\colon f \in \mathfrak{M},\ \mu(f) = 0 \}$ и

$$D(\mu, \mathfrak{M}) = \sup\{ \|f\|_C\colon f \in \mathfrak{M}_\mu \} = \max_\tau \sup\{ \|f(\tau)\|\colon f \in \mathfrak{M}_\mu \}. \tag{17}$$

Оценивая величину (17), можем считать, что $\int_0^\pi dg(t) = 1$, ибо при любом $c \in \mathbb{R}^1$ для функционала $c\mu$ имеем

$$D(c\mu, \mathfrak{M}_{c\mu}) = \sup\{ \|f\|_C\colon f \in \mathfrak{M}_{c\mu} \} = \sup\{ \|f\|_C\colon x \in \mathfrak{M}_\mu \} = D(\mu, \mathfrak{M}_\mu).$$

Если $f \in \mathfrak{M}_\mu$, то, полагая

$$g_1(t) = \int_0^t dg, \quad g_2(t) = \int_t^\pi dg, \quad 0 \le t \le \pi,$$

для фиксированной точки $\tau \in (0, \pi)$ получаем

$$0 = \int_0^\tau f(t)\,dg(t) + \int_\tau^\pi f(t)\,dg(t) =$$

$$= f(\tau)\,[g_1(\tau) + g_2(\tau)] - \int_0^\pi f'(t)\,g_\tau(t)\,dt,$$

где $g_\tau(t) = g_1(t)$ для $0 \le t < \tau$, $g_\tau(t) = -g_2(t)$ для $\tau < t \le \pi$. Так как $g_1(\tau) + g_2(\tau) = 1$, справедливо равенство

$$f(\tau) = \int_0^\pi f'(t)\,g_\tau(t)\,dt, \quad 0 < \tau < \pi, \tag{18}$$

и, таким образом,

$$D(\mu, \mathfrak{M}) = \max_{0 \le \tau \le \pi} \sup_{f \in \mathfrak{M}_\mu} \int_0^\pi f'(t)\,g_\tau(t)\,dt. \tag{19}$$

Рассмотрим семейство функционалов μ_β, $0 \le \beta \le \pi/2$, определяемых функцией

$$dg(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\beta}, & t \in [0, \beta] \cup [\pi - \beta, \pi]; \\ 0, & \beta \le t \le \pi - \beta. \end{cases}$$

Пусть также $H_\beta^\omega = \{ f\colon f \in H^\omega,\ \mu_\beta(f) = 0 \}$. Используя (18), можно показать, что максимум по τ в (19) при $\mathfrak{M}_\mu = H_\beta^\omega$ достигается (в зависимости от β и модуля непрерывности $\omega(\delta)$) в одной из точек $\pi/2$ или π. При этом

$$\sup_{f \in H_{\beta}^{\omega}} f(\pi) = \frac{1}{2\beta}\left[\int_{0}^{\beta} \omega(t)\,dt + \int_{\pi-\beta}^{\pi} \omega(t)\,dt\right],$$

$$\sup_{f \in H_{\beta}^{\omega}} f(\pi/2) = \frac{1}{\beta} \int_{\pi/2-\beta}^{\pi/2} \omega(t)\,dt.$$

Более точные выводы мы можем сделать при $\omega(\delta) = K\delta^{\alpha}$, причем, очевидно, можно считать $K = 1$, т. е. рассматривать класс H^{α}. Для экстремальных функций в этом случае имеем

$$f_1(\pi) = \frac{1}{2(\alpha+1)\beta}\left[\pi^{\alpha+1} + \beta^{\alpha+1} - (\pi-\beta)^{\alpha+1}\right] =: r_1(\alpha, \beta),$$

$$f_2(\pi/2) = \frac{1}{(\alpha+1)\beta}\left[(\pi/2)^{\alpha+1} - (\pi/2-\beta)^{\alpha+1}\right] =: r_2(\alpha, \beta).$$

Исследование функций $r_1(\alpha, \beta)$ и $r_2(\alpha, \beta)$ показывает, что при фиксированном $\alpha \in (0, 1)$ функция $r_1(\alpha, \beta)$ строго возрастает по переменной β на $[0, \pi/2]$ от значения $\pi^{\alpha}/2$ до значения $\pi^{\alpha}/(\alpha+1)$. Функция $r_2(\alpha, \beta)$ на промежутке $0 \le \beta \le \pi/2$ строго убывает от $(\pi/2)^{\alpha}$ до $(\pi/2)^{\alpha}/(\alpha+1)$. Отсюда следует, что на интервале $(0, \pi/2)$ существует единственная точка $\beta_* = \beta_*(\alpha)$ такая, что $r_1(\alpha, \beta_*) = r_2(\alpha, \beta_*)$, причем, так как $r_1(\alpha, \beta)$ строго возрастает и $r_1(\alpha, \pi/2) = \pi^{\alpha}/(\alpha+1)$, то при $\alpha \in (0, 1)$

$$D(\mu_{\beta_*}, H^{\alpha}) = r_1(\alpha, \beta_*) = r_2(\alpha, \beta_*) < \pi^{\alpha}/(\alpha+1).$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *При* $0 < \alpha < 1$ *справедливо соотношение*

$$\min_{0 \le \beta \le \pi/2} D(\mu_{\beta}, H^{\alpha}) = D(\mu_{\beta_*}, H^{\alpha}),$$

где β_* *— корень уравнения*

$$2(\pi/2-\beta)^{\alpha+1} + \beta^{\alpha+1} - (\pi-\beta)^{\alpha+1} = \pi^{\alpha+1}(2^{\alpha}-1);$$

а также

$$\lambda^1(H^{\alpha}, C) \le 2D(\mu_{\beta_*}, H^{\alpha}) < 2\pi^{\alpha}/(a+1) = 2D(\mu_{\pi/2}, H^{\alpha}). \tag{20}$$

Неравенство (20) означает, что функционал μ_{β_*} имеет относительно класса H^{α}, $0 < \alpha < 1$, бóльшую информативность, чем функционал среднего значения $\mu_{\pi/2}$.

Так как класс H^{ω} содержит любую константу и является выпуклым центрально-симметричным множеством, то, понимая под $\mu(f, t)$ постоянную функцию, принимающую на $[0, \pi]$ значение $\mu(f)$, при $X = C$ или L_p, $p \ge 1$, будем иметь

$$\lambda_1(H^{\omega}, X) = \inf_{\mu \in C^*} \sup_{f \in H^{\omega}} \|f(\cdot) - \mu(f, \cdot)\|_X =$$

$$= \inf_{\mu \in C^*} \sup\{\|f\|_X : \mu(f) = 0\} = \frac{1}{2}\lambda^1(H^{\omega}, X).$$

Поэтому доказаны и соотношения

$$\lambda_1(H^\alpha, L_\infty) = \lambda_1(H^\alpha, C) \le D(\mu_{\beta_*}, H^\alpha) < \pi^\alpha/(\alpha+1), \quad 0<\alpha<1. \tag{21}$$

Оценки (20) и (21) для одномерных поперечников позволяют уточнить и оценки сверху (13) и (14) при любых N. Сопоставим функции $f(t)\in C$ сплайн $s(f,t)\in S_{N,0}$, совпадающий на каждом промежутке (t_{k-1}, t_k) разбиения (6) с постоянной функцией $\mu_{\beta_*}(f,t)$. Оценивая с помощью теоремы 1 погрешность $\|f - s(f)\|_\infty$ для $f\in H^\alpha$ на каждом промежутке, получим неравенства

$$\lambda_N(H^\alpha, C) = \lambda_N(H^\alpha, L_\infty) = \sup_{f\in H^\alpha} \|f - s(f)\|_\infty =$$

$$= D(\mu_{\beta_*}, H^\alpha[0,\pi/N]) < (\pi/N)^\alpha/(\alpha+1), \quad 0<\alpha<1.$$

В силу предложения 1 аналогичная оценка справедлива для линейного информационного поперечника:

$$\lambda^N(H^\alpha, C) \le 2D(\mu_{\beta_*}, H^\alpha[0,\pi/N]) < 2(\pi/N)^\alpha/(\alpha+1), \quad 0<\alpha<1.$$

1. *Тихомиров В. Н.* Некоторые вопросы теории приближения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
2. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
3. *Корнейчук Н. П.* Информативность функционалов // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 9. – С. 1156–1163.
4. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, вып. 3(93). – С. 81–120.
5. *Маковоз Ю. И.* Теоремы о наилучшем приближении и поперечниках множеств в банаховых пространствах. – Автореф. … дисс. канд. физ.-мат. наук. – Минск, 1969.
6. *Корнейчук Н. П.* О поперечниках классов непрерывных функций в пространстве L_p // Мат. заметки. – 1971. – **10**, № 5. – С. 493–500.
7. *Корнейчук Н. П.* Поперечники в L_p классов непрерывных и дифференцируемых функций и оптимальные методы кодирования и восстановления функций и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1981. – **45**, № 2. – С. 266–290.
8. *Корнейчук Н. П.* Об оптимальном кодировании элементов метрического пространства // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 2. – С. 168–173.
9. *Корнейчук Н. П.* Точные значения норм дифференцируемых периодических функций в метрике L // Мат. заметки. – 1967. – **2**, № 6. – С. 569–576.
10. *Сторчай В. Ф.* Точные оценки норм дифференцируемых периодических функций в пространстве L_2 // Укр. мат. журн. – 1973. – **25**, № 6. – С. 835–840.
11. *Сторчай В. Ф.* О точных оценках норм дифференцируемых периодических функций // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. – Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. ун-та, 1976. – С. 50–54.
12. *Корнейчук Н. П.* О существовании линейного полиномиального оператора, дающего на классе функций наилучшее приближение // Докл. АН СССР. – 1962. – **143**, № 1. – С. 25–27.
13. *Lorentz G. G.* Approximation of functions. – New York: Holt, Rinehart and Winston, 1966. – 188 p.
14. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

Получено 18.03.96