УДК 517. 91

А. М. Самойленко, В. В. Слюсарчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ДИСКРЕТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ИНВАРИАНТНЫМ АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫМ ТОРОИДАЛЬНЫМ МНОГООБРАЗИЕМ

We obtain conditions of the asymptotic stability for quasiperiodic trajectories of discrete dynamical systems in the case of infinite-dimensional Banach space.

Отримано умови асимптотичної стійкості квазіперіодичних траєкторій дискретних динамічних систем у випадку нескінченновимірного банахового простору.

Рассмотрим динамическую систему, заданную разностным уравнением

$$x(n+1) = X(x(n)), \qquad n \geq 0, \tag{1}$$

где $X\colon E \to E$ — C^r-отображение (E — произвольное бесконечномерное банахово пространство, $r \geq 2$). Предположим, что эта система имеет инвариантное многообразие $M = \{x \in E\colon x = f(\varphi), \varphi \in \mathcal{T}_m\}$ класса C^r ($\mathcal{T}_m$ — m-мерный тор), которое заполнено квазипериодическими траекториями

$$x(n, f(\varphi)) = f(n\omega + \varphi), \qquad n \geq 0, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m$$

($\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$— частотный базис квазипериодической функции $f(t\omega)$). В данной статье выясним, когда инвариантное многообразие M системы (1) будет асимптотически устойчивым. Для решения этой задачи используем некоторые результаты из работы [1].

1. Теорема о представлении системы (1) вблизи многообразия M. Потребуем, чтобы многообразие M было диффеоморфным тору $\mathcal{T}_m$. Тогда это многообразие, как и тор $\mathcal{T}_m$, будет m-мерным многообразием. Пусть df_φ — производная отображения $f\colon \mathcal{T}_m \to E$ в точке φ, а $T(\mathcal{T}_m)_\varphi$ и $TM_{f(\varphi)}$ — касательные пространства к многообразиям $\mathcal{T}_m$ и M соответственно в точках φ и $f(\varphi)$ [2 – 4]. В силу гомеоморфности $\mathcal{T}_m$ и M пространства $T(\mathcal{T}_m)_\varphi$ и $TM_{f(\varphi)}$ имеют одинаковую размерность m, а отображение $df_\varphi\colon T(\mathcal{T}_m)_\varphi \to TM_{f(\varphi)}$ является линейным изоморфизмом для всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Конечномерность пространства $TM_{f(\varphi)}$ позволяет представить банахово пространство E (для каждого $\varphi \in \mathcal{T}_m$) в виде прямой суммы $TM_{f(\varphi)}$ и некоторого подпространства E_φ [5]:

$$E = TM_{f(\varphi)} + E_\varphi.$$

Выбор подпространства E_φ осуществляется таким образом, чтобы проектор $P(\varphi)$ на E_φ параллельно $TM_{f(\varphi)}$ [6] был C^{r-1}-отображением (это возможно в силу конечномерности, компактности и принадлежности классу C^r многообразия M). Соответствующие расщепления пространства E на пространства $TM_{f(\varphi)}$ и $E_\varphi (\varphi \in \mathcal{T}_m)$ порождают C^{r-1}-отображение F, которое каждой паре (φ, h) элементов $\varphi \in \mathcal{T}_m$ и $h \in E_\varphi$ ставит в соответствие вектор $x \in E$:

$$x = f(\varphi) + P(\varphi)h.$$

Это отображение имеет обратное отображение, а именно: если $V_\delta(\mathcal{T}_m) = \{(\varphi, h)\colon \varphi \in \mathcal{T}_m, h \in E_\varphi, \|h\| < \delta\}$ и $U_\delta(M) = \{x \in E\colon \inf_{y \in M} \|x - y\| < \delta\}$, то найдется такое число $\varepsilon > 0$, что $FV_\varepsilon(\mathcal{T}_m) \supset U_\mu(M)$ для некоторого числа $\mu >$

> 0 и отображение $F: V_\varepsilon(\mathcal{T}_m) \to FV_\varepsilon(\mathcal{T}_m)$ является C^{r-1}-диффеоморфизмом [1].

Следовательно, вблизи многообразия M можно ввести систему координат относительно переменных (φ, h) (по этому поводу см. также [7, с. 324 – 333]) и упростить исследование системы (1).

В [1] установлена следующая теорема.

Теорема 1. *В достаточно малой окрестности многообразия* M *система* (1) *относительно переменных* $(\varphi, h) \in \mathcal{T}_m \times E_\varphi$ *представляется в виде*

$$\begin{aligned} \varphi(n+1) &= \varphi(n) + \omega + \Phi(\varphi(n))h(n) + \Phi_1(\varphi(n), h(n)), \\ h(n+1) &= H(\varphi(n))h(n) + H_1(\varphi(n), h(n)), \quad n \geq 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\Phi(\varphi): E_\varphi \to T(\mathcal{T}_m)_{\varphi+\omega}$, $H(\varphi): E_\varphi \to E_{\varphi+\omega}(\varphi \in \mathcal{T}_m)$ — *линейные отображения, определенные равенствами*

$$\Phi(\varphi) = (df)^{-1}_{\varphi+\omega}(I - P(\varphi+\omega))(dX)_{f(\varphi)}P(\varphi),$$
$$H(\varphi) = P(\varphi+\omega)(dX)_{f(\varphi)}P(\varphi),$$

$\Phi_1(\varphi, h)$ *и* $H_1(\varphi, h)$ — *в общем случае нелинейные отображения, удовлетворяющие соотношению*

$$\sup_{(\varphi, h) \in \mathcal{T}_m \times E_\varphi, \|h\| < \varepsilon} (\|\Phi_1(\varphi, h)\| + \|H_1(\varphi, h)\|) = o(\varepsilon)$$

при $\varepsilon \to 0$, *и отображения* Φ, Φ_1, H, H_1 *являются* C^{r-1}-*отображениями.*

Это утверждение является исходным для дальнейших исследований. Из него, в частности, вытекает, что изучение асимптотической устойчивости инвариантного многообразия M системы (1) сводится к изучению асимптотической устойчивости системы (2) по отношению к части переменных, точнее по отношению к переменной h (такого типа устойчивость движения рассматривалась в [8]).

2. Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости многообразия M в случае нулевых Φ, Φ_1 и H_1. Мы предполагаем, что Φ, Φ_1 и H_1 принимают нулевые значения на множестве $V_\mu(\mathcal{T}_m)$ с достаточно малым $\mu > 0$. В этом случае система (2) принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi(n+1) &= \varphi(n) + \omega, \\ h(n+1) &= H(\varphi(n))h(n), \quad n \geq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

если $(\varphi(n), h(n)) \in V_\mu(\mathcal{T}_m)$. Поскольку

$$\varphi(n) = n\omega + \varphi_0, \quad n \geq 0, \tag{4}$$

где $\varphi_0 \in \mathcal{T}_m$, то, очевидно, инвариантное многообразие M системы (1) является асимптотически устойчивым тогда и только тогда, когда равномерно по $\varphi_0 \in \mathcal{T}_m$ асимптотически устойчиво нулевое решение разностного уравнения

$$h(n+1) = H(n\omega + \varphi_0)h(n), \quad n \geq 0,$$

с квазипериодическим [9] операторным коэффициентом $H(n\omega + \varphi_0)$ (здесь в „равностепенно по $\varphi_0 \in \mathcal{T}_m$ асимптотически устойчиво" вкладывается следующий смысл: найдется такая функция $g(n) \to 0$ при $n \to +\infty$ со значениями в $(0, +\infty)$, что для каждого решения $h(n, \varphi_0, h_0)$ уравнения (4), для которого $h(0, \varphi_0, h_0) = h_0$, выполняется соотношение

$$\| h(n, \varphi_0, h_0) \| \leq g(n) \| h_0 \|$$

для всех $n \geq 0$ и $\varphi_0 \in \mathcal{T}_m$).

Учитывая последнее замечание, докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\Phi(\varphi) = 0$, $\Phi_1(\varphi, h) = 0$ *и* $\mathrm{H}_1(\varphi, h) = 0$ *для всех* $(\varphi, h) \in V_\mu(\mathcal{T}_m)$. *Тогда инвариантное многообразие* M *системы* (1) *асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n \to \infty} \max_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \| H(n\omega + \varphi) H((n-1)\omega + \varphi) \ldots H(\omega + \varphi) H(\varphi) \| = 0. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть многообразие M асимптотически устойчиво, т. е. найдется число ε_0 такое, что каждому $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ будет соответствовать такое $\delta \in (0, \varepsilon_0]$, что для решения $\varphi(n) = \varphi(n, \varphi_0, h_0)$, $h(n) = h(n, \varphi_0, h_0)$ системы (3), где $(\varphi_0, h_0) \in V_\delta(\mathcal{T}_m)$ и $\varphi(0) = \varphi_0$, $h(0) = h_0$, выполняются соотношения

$$\sup_{n \geq 0, (\varphi_0, h_0) \in V_\delta(\mathcal{T}_m)} \| h(n, \varphi_0, h_0) \| \leq \varepsilon \tag{6}$$

и

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{(\varphi_0, h_0) \in V_\delta(\mathcal{T}_m)} \| h(n, \varphi_0, h_0) \| = 0. \tag{7}$$

Поскольку в достаточно малой окрестности многообразия M система (1) относительно переменных (φ, h) представляется в виде (3) (мы предполагаем, что $\Phi(\varphi) = 0$, $\Phi_1(\varphi, h) = 0$ и $H_1(\varphi, h) = 0$ для всех $(\varphi, h) \in V_{\varepsilon_0}(\mathcal{T}_m)$), то для каждой точки $(\varphi_0, h_0) \in V_\delta(\mathcal{T}_m)$ и $n \geq 0$ для $h(n, \varphi_0, h_0)$ выполняется равенство

$$h(n, \varphi_0, h_0) = H((n-1)\omega + \varphi_0) \ldots H(\omega + \varphi_0) H(\varphi_0) h_0. \tag{8}$$

Отсюда и из (7) вытекает соотношение (5), если учесть также, что норма $\| A \|$ линейного оператора A, действующего в банаховом пространстве E, определяется равенством $\| A \| = \sup \{ \| A x \| : x \in E, \| x \| = 1 \}$.

Пусть теперь выполняется соотношение (5). Обозначим через a число

$$\max_{n \geq 0} \max_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \| H(n\omega + \varphi) H((n-1)\omega + \varphi) \ldots H(\omega + \varphi) H(\varphi) \|.$$

Тогда, согласно (8), выполняются соотношения (6) и (7), где ε – произвольное число из интервала $(0, \mu)$ и $\delta \in (0, \varepsilon a^{-1}]$. Итак, многообразие M асимптотически устойчиво.

Теорема 2 доказана.

***Замечание* 1.** В случае, когда замыкание множества $\{ f(p\omega) : p \geq 0 \}$ совпадает с множеством M, соотношение (5) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{p \geq 0} \| H((n+p)\omega) H((n+p-1)\omega) \ldots H((p+1)\omega) H(p\omega) \| = 0. \tag{9}$$

Действительно, согласно равенству $\overline{\{ f(p\omega) : p \leq 0 \}} = M$, непрерывности $H(\varphi)$ на $\mathcal{T}_m$ и квазипериодичности $H(p\omega)$ по p множество

$$A_n = \{ H((n+p)\omega) H((n+p-1)\omega) \ldots H((p+1)\omega) H(p\omega) : p \geq 0 \}$$

всюду плотно в множестве

$$B_n = \{ H(n\omega + \varphi) H((n-1)\omega + \varphi) \ldots H(\omega + \varphi) H(\varphi) : \varphi \in \mathcal{T}_m \}$$

для каждого $n \geq 0$. Поэтому если выполняется соотношение (5), то выполняется соотношение (9). Если соотношение (5) не выполняется, т. е. для некоторых чисел $a > 0$ и последовательностей $\{\varphi_k : k \geq 0\} \subset \mathcal{T}_m$, $\{n_k : k \geq 0\} \subset N$

$$\| H(n_k\omega + \varphi_k) H((n_k - 1)\omega + \varphi_k) \ldots H(\omega + \varphi_k) H(\varphi_k) \| > a \tag{10}$$

для всех $k \geq 0$, то в силу квазипериодичности $H(p\omega)$ по p найдется такая последовательность $\{p_k : k \geq 0\} \subset N$, что

$$\| H(n_k\omega + \varphi_k) H((n_k - 1)\omega + \varphi_k) \ldots H(\omega + \varphi_k) H(\varphi_k) -$$

$$- H((n_k + p_k)\omega) H((n_k + p_k - 1)\omega) \ldots H((p_k + 1)\omega) H(p_k\omega) \| < \frac{a}{2}$$

для каждого $k \geq 0$. Тогда, согласно (10),

$$\| H((n_k + p_k)\omega) H((n_k + p_k - 1)\omega) \ldots H((p_k + 1)\omega) H(p_k\omega) \| \geq \frac{a}{2} > 0$$

для всех $k \geq 0$, т. е. не выполняется соотношение (9). Итак, соотношения (5) и (9) одновременно выполняются или не выполняются.

Равенство $\overline{\{f(p\omega) : p \geq 0\}} = M$ равносильно равенству $\overline{\{p\omega : p \geq 0\}} = \mathcal{T}_m$ (в силу гомеоморфизма $\mathcal{T}_m$ и M) и выполняется тогда и только тогда, когда $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \ldots + k_m\omega_m \neq 0 \pmod{2\pi}$ для всех $k_i \in N \bigcap \{0\}$, $i = \overline{1, m}$, для которых $k_1 + k_2 + \ldots + k_m \neq 0$ (в силу теоремы Кронекера [10, с. 106]).

3. Достаточные условия асимптотической устойчивости многообразия M (общий случай).

Теорема 3. *Для асимптотической устойчивости инвариантного многообразия M системы* (1) *достаточно выполнения соотношения* (5).

Доказательство. Пусть выполняется соотношение (5). Возьмем такое число $k \in N$, чтобы

$$\max_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \| H((k-1)\omega + \varphi) H((k-2)\omega + \varphi) \ldots H(\omega + \varphi) H(\varphi) \| < \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Тогда для каждого решения $x(n)$ разностного уравнения (1) будет выполняться соотношение

$$x(n + k) = X^k(x(n)), \qquad n \geq 0, \tag{12}$$

где

$$X^k(y) = \underbrace{X(X(\ldots X}_{k \text{ раз}}(y)\ldots)).$$

Рассмотрим разностное уравнение

$$Y(n + 1) = X^k(y(n)), \qquad n \geq 0. \tag{13}$$

Из автономности системы (13) и соотношения (12) вытекает, что инвариантное многообразие M системы (1) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда выполняется аналогичное свойство многообразия M по отношению к системе (13). Поэтому докажем выполнение этого свойства.

Согласно теореме 1, в достаточно малой окрестности многообразия M систему (13) относительно переменных $(\varphi, h) \in \mathcal{T}_m \times E_\varphi$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi(n+1) &= \varphi(n) + k\omega + \Phi^{(k)}(\varphi(n))h(n) + \Phi^{(k)}(\varphi(n), h(n)), \\ h(n+1) &= H^{(k)}(\varphi(n))h(n) + H^{(k)}(\varphi(n), h(n)), \qquad n \geq 0, \end{aligned} \tag{14}$$

где $\Phi^{(k)}(\varphi): E_\varphi \to T(\mathcal{T}_m)_{\varphi+k\omega}$, $H^{(k)}(\varphi): E_\varphi \to E_{\varphi+k\omega}T(\varphi \in \mathcal{T}_m)$— линейные отображения, определенные равенствами

$$\Phi^{(k)}(\varphi) = (df)^{-1}_{\varphi+k\omega}(I - P(\varphi + k\omega))\left(dX^k\right)_{f(\varphi)} P(\varphi),$$
$$H^{(k)}(\varphi) = P(\varphi + k\omega)\left(dX^k\right)_{f(\varphi)} P(\varphi), \tag{15}$$

$\Phi^{(k)}(\varphi, h)$ и $H^{(k)}(\varphi, h)$ — в общем случае нелинейные отображения, удовлетворяющие соотношению

$$\sup_{(\varphi,h)\in\mathcal{T}_m\times E_\varphi, \|h\|<\varepsilon}\left(\left\|\Phi^{(k)}(\varphi,h)\right\| + \left\|H^{(k)}(\varphi,h)\right\|\right) = o(\varepsilon) \tag{16}$$

при $\varepsilon \to 0$, и отображения $\Phi^{(k)}$, $\Phi_1^{(k)}$, $H^{(k)}$, $H_1^{(k)}$ являются C^{r-1}-отображениями. Согласно цепному правилу [4, 11] для нахождения производных и инвариантности многообразия M относительно отображения X выполняются равенства

$$P(\varphi + k\omega)(dX^k)_{f(\varphi)}P(\varphi) = P(\varphi + k\omega)(dX)_{f(\varphi+(k-1)\omega)}\cdots$$
$$\ldots(dX)_{f(\varphi+\omega)}(dX)_{f(\varphi)}P(\varphi) =$$
$$= P(\varphi + k\omega)(dX)_{f(\varphi+(k-1)\omega)}P(\varphi + (k-1)\omega)$$
$$P(\varphi + (k-1)\omega)(dX)_{f(\varphi+(k-2)\omega)}P(\varphi + (k-2)\omega)\ldots$$
$$\ldots P(\varphi + 2\omega)(dX)_{f(\varphi+\omega)}P(\varphi + \omega)P(\varphi + \omega)(dX)_{f(\varphi)}P(\varphi),$$

т. е. на основании (15)

$$H^{(k)}(\varphi) = H((k-1)\omega + \varphi)H((k-2)\omega + \varphi)\ldots H(\varphi + \omega)H(\varphi).$$

Следовательно, учитывая (11), получаем

$$\max_{\varphi\in\mathcal{T}_m}\left\|H^{(k)}(\varphi)\right\| < \frac{1}{2}. \tag{17}$$

Возьмем число ε_0 таким, чтобы

$$\left\|H_1^{(k)}(\varphi, h)\right\| \le \frac{1}{4}\|h\| \tag{18}$$

для всех $(\varphi, h) \in \mathcal{T}_m \times E_\varphi$, для которых $\|h\| \le \varepsilon_0$ (выбор такого числа возможен в силу (16)). Тогда на основании неравенств (17) и (18), а также второго уравнения системы (14) убеждаемся в справедливости оценки

$$\|h(n+1)\| \le \frac{3}{4}\|h(n)\|, \quad n \ge 0,$$

если $\|h(0)\| \le \varepsilon_0$. Из этой оценки вытекает асимптотическая устойчивость инвариантного многообразия M системы (13), а следовательно, и системы (1).

Теорема 3 доказана.

Замечание 2. Выполнение соотношения (5) не необходимо для асимптотической устойчивости инвариантного многообразия M системы (1). Действительно, для системы разностных уравнений вида (2)

$$\varphi(n+1) = \varphi(n) + \sqrt{2},$$
$$h(n+1) = h(n) - (\sin^2 h(n))h(n), \quad n \ge 0,$$

инвариантное многообразие $\mathcal{T}_1 \times \{0\}$ асимптотически устойчиво, поскольку точка 0 является притягивающей для отображения $f\colon R \to R$, определенного равенством $f(x) = (1 - \sin^2 x)x$.

Однако соотношение (5) не выполняется, поскольку $H(\varphi)$ — единичное отображение для каждого $\varphi \in \mathcal{T}_1$.

Замечание 3. Более простое достаточное условие

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \left\| P(\varphi + \omega)(dX)_{f(\varphi)} p(\varphi) \right\| < 1 \tag{19}$$

асимптотической устойчивости инвариантного многообразия M системы (1) рассмотрено в [1]. В случае конечномерного банахового пространства E аналогичное условие приведено в работе [12].

Замечание 4. Соотношение (5) выполняется, очевидно, тогда и только тогда, когда найдется число $k \in N$, для которого

$$\max_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \| H((k-1)\omega + \varphi) H((k-2)\omega + \varphi) \ldots H(\varphi) \| < 1.$$

Поэтому теорема 3 охватывает случай систем, соответствующих соотношению (19).

4. Дополнение к статье [1]. В [1] результаты пп. 4, 5 фактически получены с использованием асимптотической устойчивости многообразия M системы (1), которая обеспечивалась выполнением соотношения (19). Замена этого соотношения соотношением (5) улучшает соответствующие результаты. Аналогичные изменения улучшают и результаты п. 6.

1. *Самойленко А. М., Слюсарчук В. Е., Слюсарчук В. В.* Исследование нелинейного разностного уравнения в банаховом пространстве в окрестности квазипериодического решения // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, №12. – С. 1661 – 1676.
2. *Хирш М.* Дифференциальная топология. –М.: Мир, 1979. – 280 с.
3. *Борисович Ю. Г., Звягин В. Г., Шерман П. Б.* Топологические методы в теории нелинейных фредгольмовых операторов. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1978. – 79 с.
4. *Милнор Дж., Уоллес А.* Дифференциальная топология. Начальный курс. – М.: Мир, 1972. – 279 с.
5. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.
6. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
7. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. –М.: Мир, 1985. – 376 с.
8. *Румянцев В. В., Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987. – 254 с.
9. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 303 с.
10. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.
11. *Зорич В. А.* Математический анализ: В 2-х т. – М.: Наука, 1984. – Т. 2. – 640 с.
12. *Самойленко А. М.* Исследование дискретной системы в окрестности квазипериодической траектории // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, №12. – С. 1702 – 1711.

Получено 04. 08. 98