УДК 517.927.8

М. І. Шкіль, П. Ф. Самусенко
(Укр. пед. ун-т, Київ)

ПРО АСИМПТОТИЧНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕНОЮ МАТРИЦЕЮ ПРИ ПОХІДНИХ

In this paper, we suggest a method for construction of asymptotical formulas for solutions of systems of differential equations in the case where the roots of the characteristic equation are simple.

Пропонується метод побудови асимптотичних формул для розв'язків систем диференціальних рівнянь у випадку, коли корені характеристичного рівняння прості.

1. Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = (\Lambda(t) + Q(t))x, \tag{1}$$

де x — n-мірний вектор, $\Lambda(t)$ — $(n \times n)$-діагональна матриця, $Q(t)$ — $(n \times n)$-матриця, елементи якої сумовні в інтервалі (t_0, ∞). Таку систему І. М. Рапопорт [1] назвав L-діагональною. При дослідженні таких систем припускається, що:

а) елементи $w_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, діагональної матриці $\Lambda(t)$ сумовні в інтервалі (t_0, t_1) для будь-якого скінченного t_1;

б) існує таке достатньо велике T_0, що для $t \geq T_0$ жодна з різниць

$$\operatorname{Re} w_i(t) - \operatorname{Re} w_j(t), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

не змінює знака.

Тоді при виконанні даних умов система (1) при $t \geq t_0$ має n частинних розв'язків вигляду

$$x_i = \eta_{ij}(t) \exp \int_{t_0}^{t} w_j(t)\, dt, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

де $\eta_{ij}(t)$ — функції, неперервні в замкненому інтервалі $[t_0, \infty]$, і $\eta_{ij}(\infty) = 0$ при $i \neq j$, $\eta_{jj}(\infty) = 1$.

В [1] І. М. Рапопорт також навів підстановки, за допомогою яких у випадку простих коренів характеристичного рівняння можна при певних умовах зводити довільну систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{2}$$

до L-діагональної. В [2] наведено метод побудови згаданих підстановок у випадку, коли корені характеристичного рівняння при $t \geq t_0$ зберігають постійну кратність. І. І. Старун [3] запропонував метод побудови підстановок у випадку, коли характеристичне рівняння має як прості, так і кратні корені.

2. У даній роботі пропонується метод побудови згаданих підстановок для систем диференціальних рівнянь більш загального вигляду

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{3}$$

в припущенні, що матриця $B(t)$ при $t \geq t_0$ може бути виродженою.

3. Замість системи (3) будемо розглядати систему

$$\varepsilon B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{4}$$

де $\varepsilon > 0$ — дійсний параметр (система (4) при $\varepsilon = 1$ співпадає з системою (3)).

Зробимо в системі (4) заміну незалежної змінної за формулою $t = \varepsilon\tau$. Одержуємо систему

$$B(t)\frac{dx}{d\tau} = A(t)x. \tag{5}$$

Надалі скористаємося окремими поняттями з теорії пучків матриць [5].

Теорема. *Нехай для системи* (3) *виконуються умови:*

1) *матриці* $A(t)$ *та* $B(t)$ *мають на проміжку* $[t_0, \infty)$ *неперервні похідні до* $(m+1)$*-го порядку включно;*

2) *пучок матриць* $A(t) - \lambda B(t)$ *регулярний при всіх* $t \ge t_0$;

3) *елементарні дільники пучка зберігають постійну кратність на проміжку* $[t_0, \infty)$;

4) *корені* $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, \nu$, $\nu \le n$, *рівняння* $\det(A(t) - \lambda B(t)) = 0$ *прості при* $t \ge t_0$ *і задовольняють умову б);*

5) $\operatorname{rang} B(t) = \operatorname{rang} B(t)\mathcal{U}_m(t, 1)$ *при* $t \ge t_0$.

Тоді, якщо система (24) *є* L*-діагональною, то* ν *частинних розв'язків системи* (3) *мають вигляд*

$$x_i = \mu_{ij}(t)\exp\int_{t_0}^{t} w_j(t)\,dt, \quad j = 1, 2, \dots, \nu, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{6}$$

де $\mu_{ij}(t)$ *— функції, неперервні на проміжку* $[t_0, \infty)$.

Доведення. З умови теореми випливає, що пучок матриць $A(t) - \lambda B(t)$ має ν простих „скінченних" елементарних дільників. А отже, матриця $A(t)$ має ν власних векторів $\mu_1(t), \dots, \mu_\nu(t)$ відносно матриці $B(t)$, які відповідають власним значенням $\lambda_1(t), \dots, \lambda_\nu(t)$ і визначаються з системи рівнянь

$$(A(t) - \lambda_i(t)B(t))\mu_i(t) = 0; \tag{7}$$

$B(t)$-приєднані вектори у матриці $A(t)$ відсутні. Тобто рівняння

$$(A(t) - \lambda_i(t)B(t))u = B(t)\mu_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, \nu,$$

не розв'язні відносно u. Тому, якщо $\psi_i(t)$, $i = 1, \dots, \nu$, — нулі матриць $(A(t) - \lambda_i(t)B(t))^*$, тобто $(A(t) - \lambda_i(t)B(t))^*\psi_i(t) = 0$, то скалярний добуток $(B(t)\mu_i(t), \psi_i(t)) \ne 0$, $i = 1, \dots, \nu$, для $t \ge t_0$ [3]. Оскільки вектори $\psi_j(t)$ визначаються з точністю до довільного множника, то їх можна підібрати таким чином, що для $t \ge t_0$ виконується співвідношення $(B(t)\mu_i(t), \psi_i(t)) = 1$, $i = 1, \dots, \nu$. Враховуючи, що справедливі рівності

$$(A(t) - \lambda_i(t)B(t))\mu_i(t) = 0,$$

$$(A(t) - \lambda_i(t)B(t))^*\psi_i(t) = 0,$$

можна показати [3], що для всіх $t \ge t_0$

$$(B(t)\mu_i(t), \psi_j(t)) = 0, \quad i \ne j, \quad i, j = 1, \dots, \nu.$$

Отже, для $t \geq t_0$ справджуються рівності

$$(B(t)\mu_i(t), \psi_j(t)) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j, \ i, j = 1, \dots, \nu. \end{cases} \tag{8}$$

В системі (4) зробимо підстановку

$$x = \mathcal{U}_m(t, \varepsilon) y, \quad \mathcal{U}_m(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s \mathcal{U}_s(t),$$

де y — невідомий ν-мірний вектор, а $\mathcal{U}_s(t)$ — прямокутні $(n \times \nu)$-матриці $(m \geq 1)$, які підлягають певному визначенню.

Тоді система (5) набуває вигляду

$$B(t)\mathcal{U}_m(t, \varepsilon) \frac{dy}{d\tau} = (A(t)\mathcal{U}_m(t, \varepsilon) - \varepsilon B(t)\mathcal{U}'_m(t, \varepsilon))\, y$$

(тут $'$ означає похідну відносно t).

Матриці $\mathcal{U}_s(t)$, $s = 0, 1, \dots, m$, визначатимемо так, щоб виконувалася матрична рівність

$$A(t)\mathcal{U}_m(t, \varepsilon) - \varepsilon B(t)\mathcal{U}'_m(t, \varepsilon) = B(t)\mathcal{U}_m(t, \varepsilon)(\Lambda_m(t, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1} C_m(t, \varepsilon)), \tag{9}$$

де $\Lambda_m(t, \varepsilon)$ — діагональна матриця вигляду

$$\Lambda_m(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s \Lambda_s(t),$$

розміру $(\nu \times \nu)$, а $C_m(t, \varepsilon)$ — $(\nu \times \nu)$-матриця, яку, як і матриці $\mathcal{U}_m(t, \varepsilon)$, $\Lambda_m(t, \varepsilon)$, потрібно визначити.

Матриці $\mathcal{U}_m(t, \varepsilon)$, $\Lambda_m(t, \varepsilon)$ будемо визначати з тотожності (9), вимагаючи, щоб у ній коефіцієнти при $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^m$ були рівні між собою. Тоді одержимо таку матричну систему рівнянь:

$$A(t)\mathcal{U}_0(t) - B(t)\mathcal{U}_0(t)\Lambda_0(t) = 0, \tag{10}$$

$$A(t)\mathcal{U}_s(t) - B(t)\mathcal{U}_s(t)\Lambda_0(t) = B(t)\mathcal{U}'_{s-1}(t) + B(t) \sum_{j=1}^{s} \mathcal{U}_{s-j}(t)\Lambda_j(t). \tag{11}$$

Запишемо матричне рівняння (10) у векторній формі. Для цього стовпці матриці $\mathcal{U}_0(t)$ позначимо через $u_{0i}(t)$, $i = 1, 2, \dots, \nu$, а матрицю $\Lambda_0(t)$ запишемо у вигляді

$$\Lambda_0(t) = \operatorname{diag}\{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_\nu(t)\}.$$

Тоді з (10) одержуємо систему рівнянь

$$(A(t) - \lambda_i(t)B(t))\, u_{0i}(t) = 0, \tag{12}$$

яка збігається з системою (7). Отже, $u_{0i}(t) = \mu_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, \nu$. Розглянемо матричну систему рівнянь (11) при $s = 1$ і запишемо її у векторій формі:

$$(A(t) - \lambda_i(t)B(t))\, u_{1i}(t) = g_{1i}(t), \quad i = 1, 2, \dots, \nu, \tag{13}$$

де $u_{1i}(t)$ — стовпці матриці $\mathcal{U}_1(t)$, а вектор $g_{1i}(t)$ має вигляд

$$g_{1i}(t) = B(t)u'_{0i}(t) + B(t)u_{0i}(t)\lambda_{1i}(t). \tag{14}$$

Рівняння (13) розв'язне відносно $u_{1i}(t)$ тоді і тільки тоді, коли вектор $g_{1i}(t)$, $i = 1, 2, \dots, \nu$, буде ортогональним до вектора $\psi_i(t)$, що є розв'язком відповідної однорідної союзної системи, тобто для всіх $t \geq t_0$ повинна виконуватися рівність

$$(g_{1i}(t), \psi_i(t)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \nu. \tag{15}$$

Підставляючи сюди значення вектора $g_{1i}(t)$, одержуємо скалярне рівняння відносно $\lambda_{1i}(t)$:

$$(B(t)\mu'_i(t), \psi_i(t)) + (B(t)\mu_i(t)\lambda_{1i}(t), \psi_i(t)) = 0.$$

Звідси знаходимо

$$\lambda_{1i}(t) = -(B(t)\mu'_i(t), \psi_i(t)), \quad i = 1, 2, \dots, \nu. \tag{16}$$

Отже, діагональна матриця $\Lambda_1(t)$ задовольняє умову

$$\Lambda_1(t) = \operatorname{diag}\{\lambda_{11}(t), \lambda_{12}(t), \dots, \lambda_{1\nu}(t)\},$$

де елементи $\lambda_{1i}(t)$, $i = 1, 2, \dots, \nu$, визначаються за формулами (16). Тоді, підставляючи значення $\lambda_{1i}(t)$ в (13), одержуємо систему, яка відносно вектора $u_{1i}(t)$ має розв'язок. Цей розв'язок шукатимемо у вигляді

$$u_{1i}(t) = \sum_{r=1}^{\nu} c_{ri}^{(1)}(t)\mu_r(t), \quad i = 1, 2, \dots, \nu, \tag{17}$$

де $c_{ri}^{(1)}(t)$ — функції, які повинні бути визначені так, щоб вектор (17) задовольняв систему (13).

Для цього підставимо (17) в систему (13) і одержану рівність помножимо скалярно на вектор $\psi_j(t)$, $i = 1, 2, \dots, \nu$. В результаті маємо

$$c_{ji}^{(1)}(t)(\lambda_j(t) - \lambda_i(t)) = (g_{1i}(t), \psi_j(t)), \quad j = 1, 2, \dots, \nu.$$

При $i = j$ одержуємо тотожність $c_{jj}^{(1)}(t)0 \equiv 0$. Тому функцію $c_{jj}^{(1)}$ можна вибрати довільною, наприклад, $c_{jj}^{(1)}(t) \equiv 0$ для $t \geq t_0$.

При $i \neq j$ знаходимо

$$c_{ji}^{(1)}(t) = \frac{(g_{1i}(t), \psi_j(t))}{\lambda_j(t) - \lambda_i(t)}.$$

Тоді вектор $u_{1i}(t)$ має вигляд

$$u_{1i}(t) = \sum_{\substack{r=1 \\ i \neq r}}^{\nu} \frac{(g_{1i}(t), \psi_r(t))}{\lambda_r(t) - \lambda_i(t)} \mu_r(t).$$

Таким чином, ми визначили матриці $\mathcal{U}_1(t)$ та $\Lambda_1(t)$.

Застосовуючи метод математичної індукції, можна показати, що цим самим способом із рівнянь (11) можна знайти і всі наступні матриці $\mathcal{U}_s(t)$ та $\Lambda_s(t)$, $s = 2, 3, \dots, m$. Справді, нехай матриці $\mathcal{U}_1(t), \dots, \mathcal{U}_{m-1}(t)$ та $\Lambda_1(t), \dots,$

$\Lambda_{m-1}(t)$ визначені наведеним вище способом. Покажемо, що цим же способом можна знайти матриці $\mathcal{U}_m(t)$, $\Lambda_m(t)$. Для цього розглянемо матричну систему (11) при $s = m$. Маємо

$$A(t)\mathcal{U}_m(t) - B(t)\mathcal{U}_m(t)\Lambda_0(t) =$$

$$= B(t)\mathcal{U}'_{m-1}(t) + B(t)\sum_{r=1}^{m}\mathcal{U}_{m-r}(t)\Lambda_r(t),$$

або у векторній формі:

$$(A(t) - \lambda_i(t)B(t))u_{mi}(t) = g_{mi}(t), \quad i = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{18}$$

де

$$g_{mi}(t) = B(t)u'_{m-1i}(t) + B(t)\sum_{r=1}^{m}u_{m-ri}(t)\lambda_{ri}(t). \tag{19}$$

Для того щоб система (18) мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб для всіх $t \geq t_0$ виконувалася рівність $(g_{mi}(t), \psi_i(t)) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Підставляючи значення вектора $g_{mi}(t)$ з (19), одержуємо рівняння

$$(B(t)u'_{m-1i}(t), \psi_i(t)) + (B(t)u_{m-1i}(t)\lambda_{1i}(t), \psi_i(t)) + \ldots$$

$$\ldots + (B(t)u_{1i}(t)\lambda_{m-1i}(t), \psi_i(t)) + (B(t)\mu_i(t)\lambda_{mi}(t), \psi_i(t)) = 0.$$

Враховуючи (8), маємо

$$\lambda_{mi}(t) = -(B(t)u'_{m-1i}(t), \psi_i(t)).$$

Покладемо

$$\Lambda_m(t) = \operatorname{diag}\{\lambda_{m1}(t), \lambda_{m2}(t), \ldots, \lambda_{m\nu}(t)\}.$$

Підставляючи значення $\lambda_{mi}(t)$ в (18), одержуємо систему, яка відносно вектора $u_{mi}(t)$ має розв'язок. Шукаємо цей розв'язок у вигляді

$$u_{mi}(t) = \sum_{r=1}^{m} c_{ri}^{(m)}(t)\mu_r(t), \quad i = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{20}$$

де $c_{ri}^{(m)}(t)$ — функції, які повинні бути визначені так, щоб вектор (20) задовольняв систему (18). Маємо

$$u_{mi}(t) = \sum_{\substack{r=1 \\ i\neq r}}^{\nu} \frac{(g_{mi}(t), \psi_r(t))}{\lambda_r(t) - \lambda_i(t)}\mu_r(t).$$

Визначимо матрицю $C_m(t, \varepsilon)$. Згідно з (9) система (5) зводиться до системи вигляду

$$B(t)\mathcal{U}_m(t, \varepsilon)\frac{dy}{d\tau} = B(t)\mathcal{U}_m(t, \varepsilon)(\Lambda_m(t, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1}C_m(t, \varepsilon))y. \tag{21}$$

Покладаючи $\varepsilon = 1$, записуємо систему (9) у векторній формі

$$B(t)\mathcal{U}_m(t, 1)c_{mi}(t, 1) = d_{mi}(t), \quad i = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{22}$$

де $c_{mi}(t, 1)$ — стовпці матриці $C_m(t, 1)$, а

$$d_{mi}(t) = -B(t)\left(u'_{mi}(t) + \sum_{r=1}^{m}\sum_{j=r}^{m} u_{ji}(t)\lambda_{m+r-ji}(t)\right).$$

Рівняння (22) розв'язне відносно $c_{mi}(t, 1)$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, тоді і тільки тоді, коли вектор $d_{mi}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, буде ортогональним до вектора z, що є розв'язком відповідної однорідної союзної системи

$$(B(t)\mathcal{U}_m(t, 1))^* z = 0$$

або

$$\mathcal{U}_m^*(t, 1)B^*(t)z = 0. \tag{23}$$

Тоді з умови 5) та з [6] випливає, що остання система рівносильна системі $B^*(t)z = 0$. Отже, покладаючи $z = \varphi_i(t)$, де $B^*(t)\varphi_i(t) = 0$, $i = 1, \ldots, k$, помічаємо, що умова (23) перетворюється у тотожність. Умова розв'язності (22) набуває вигляду $(d_{mi}(t), \varphi_j(t)) = 0$, $i = 1, \ldots, \nu$, $j = 1, \ldots, k$. Тобто,

$$\left(-B(t)\left(u'_{mi}(t) + \sum_{r=1}^{m}\sum_{j=r}^{m} u_{ji}(t)\lambda_{m+r-ji}(t)\right), \varphi_j(t)\right) =$$

$$= \left(-\left(u'_{mi}(t) + \sum_{r=1}^{m}\sum_{j=r}^{m} u_{ji}(t)\lambda_{m+r-ji}(t)\right), B^*(t)\varphi_j(t)\right) \equiv 0.$$

Таким чином, система (22) розв'язна відносно вектора $c_{mi}(t, 1)$ при $t_0 \le t < +\infty$ і

$$c_{mi}(t, 1) = (B(t)\mathcal{U}_m(t, 1))^- d_{mi}(t), \quad i = 1, \ldots, \nu,$$

де $(B(t)\mathcal{U}_m(t, 1))^-$ — напівобернена матриця відносно матриці $B(t)\mathcal{U}_m(t, 1)$ [3].

Отже, розглядаємо систему (21) при $\varepsilon = 1$:

$$B(t)\mathcal{U}_m(t, 1)\frac{dy}{dt} = B(t)\mathcal{U}_m(t, 1)(\Lambda_m(t, 1) + C_m(t, 1))y.$$

Нехай система

$$\frac{dy}{dt} = (\Lambda_m(t, 1) + C_m(t, 1))y, \quad t \ge t_0, \tag{24}$$

є L-діагональною [1]. Тоді кожний розв'язок системи (24) є розв'язком системи (21). Враховуючи, що $x = \mathcal{U}_m(t, 1)y$, знаходимо ν розв'язків системи (3), які мають вигляд

$$x_i = \mu_{ij}(t)\exp\int_{t_0}^{t} w_j(t)\,dt, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, \nu,$$

де $\mu_{ij}(t)$ — функції, неперервні на проміжку $[t_0, \infty)$. Теорему доведено.

4. Знайдемо умови, при виконанні яких система (24) є L-діагональною. Припустимо, що виконуються умови теореми 1 і, крім того:

1) ранг матриці $B(t)\mathcal{U}_m(t, 1)$ при $t_0 \le t \le +\infty$ сталий і дорівнює $n - k$;

2) елементи матриць $A(t)$, $B(t)$ на проміжку $[t_0, \infty)$ мають сумовні похідні до $(m+1)$-го порядку включно;

3) корені $\lambda_i(\infty)$, $i = 1, 2, \dots, \nu$, $\nu \le n$, рівняння

$$\det(A(\infty) - \lambda B(\infty)) = 0$$

прості.

Тоді можна показати, що корені $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, \nu$, $\nu \le n$, характеристичного рівняння (5) та вектор-функції $\lambda_i(t)$, $\psi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, \nu$, мають $m+1$ сумовних похідних [2, 3]. А тому з (16), (14) випливає, що функції $\lambda_{1i}(t)$ та вектор-функції $g_{1i}(t)$, $i = 1, 2, \dots, \nu$, мають m сумовних похідних при всіх $t \ge t_0$. Враховуючи умову 3, одержуємо, що вектор-функції $u_{1i}(t)$ на проміжку $[t_0, \infty)$ мають m сумовних похідних, а $u'_{1i}(t)$ — $m-1$.

Отже, елементи матриць $\Lambda_1(t)$ та $\mathcal{U}'_1(t)$ сумовні при всіх $t \ge t_0$. Аналогічно можна показати, що елементи матриць $\Lambda_j(t)$, $\mathcal{U}'_j(t)$, $j = 2, \dots, m$, сумовні на цьому ж проміжку. Тобто елементи матриці $D_m(t, 1)$ також сумовні на $[t_0, \infty)$.

Оскільки $\operatorname{rang} B(t)\mathcal{U}_m(t, 1) = n - k$ при $t = +\infty$ (умова 1)), то існує мінор $(n-k)$-го порядку, відмінний від нуля при всіх $t_0 \le t \le +\infty$. Розташуємо цей мінор у лівому верхньому кутку матриці $B(t)\mathcal{U}_m(t, 1)$, тобто нехай

$$F(t) = SB(t)L = \begin{pmatrix} F_1(t) & F_2(t) \\ F_3(t) & F_4(t) \end{pmatrix},$$

де $\det F_1(t) \ne 0$, $t_0 \le t \le +\infty$, S та L — постійні матриці перестановки стовпців та рядків. Тому $(B(t)\mathcal{U}_m(t, 1))^- = LF(t)S$, де

$$F^-(t) = \begin{pmatrix} F_1^{-1}(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, елементи матриці $(B(t)\mathcal{U}_m(t, 1))^-$ обмежені на проміжку $[t_0, \infty)$. Тому елементи $C_m(t, 1)$ сумовні при $t \ge t_0$, тобто система (24) L-діагональна.

5. *Приклад.* Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/t \\ 1 & 0 & 1/t \\ -1/t & -1 & -1/t^2 \end{pmatrix} \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Характеристичне рівняння має корені $\lambda_1(t) = 1$, $\lambda_2(t) = -1$. Їм відповідають власні вектори $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ та $\psi_i(t)$, $i = 1, 2$, — нулі матриць $(A(t) - \lambda_i(t)B(t))^*$,

$$\mu_1(t) = \begin{pmatrix} -(1+1/t) \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_2(t) = \begin{pmatrix} 1-1/t \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\psi_1(t) = \begin{pmatrix} 1/(2t) \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \psi_2(t) = \begin{pmatrix} 1/(2t) \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

такі, що

$$(B(t)\,\mu_i(t), \psi_j(t)) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j, \quad i, j = 1, 2. \end{cases}$$

Покладемо $m = 1$. Тоді

$$\mathcal{U}_1(t, \varepsilon) = \mathcal{U}_0(t) + \varepsilon\,\mathcal{U}_1(t),$$
$$\Lambda_1(t, \varepsilon) = \Lambda_0(t) + \varepsilon\Lambda_1(t),$$

де

$$\Lambda_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_0(t) = \operatorname{colon}(\mu_1(t), \mu_2(t)).$$

Аналогічно з п. 3 можна показати, що елементи матриць $\mathcal{U}_1(t)$ та $\Lambda_1(t)$ обмежені, сумовні на проміжку $[\,t_0, \infty)$ і, крім того, прямують до нуля при $t \to \infty$.

Покажемо, що ранг матриці $B(t)\,\mathcal{U}_1(t, 1)$ постійний при $t_0 \leq t \leq +\infty$. Для цього достатньо показати, що $\operatorname{rang} B(\infty)\,\mathcal{U}_1(\infty, 1) = 2$. Враховуючи, що $\mathcal{U}_1(t, 1) = \mathcal{U}_0(t) + \mathcal{U}_1(t)$, одержуємо $\mathcal{U}_1(\infty, 1) = \mathcal{U}_0(\infty)$. Тому

$$B(\infty)\,\mathcal{U}_1(\infty, 1) = B(\infty)\,\mathcal{U}_0(\infty) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тобто $\operatorname{rang} B(\infty)\,\mathcal{U}_1(\infty, 1) = 2$, і для досить великого числа t_0

$$\operatorname{rang} B(t)\,\mathcal{U}_1(t, 1) = 2 \quad \text{при} \quad t \geq t_0.$$

Отже, відповідно до п. 4 матриця $(B(t)\,\mathcal{U}_1(t, 1))^-$ обмежена при $t \geq t_0$, тобто система (24) L-діагональна.

1. *Рапопорт И. М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. – Киев: Изд-во АН УССР, 1954. – 290 с.
2. *Шкіль М. І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. – Київ: Вища шк., 1971. – 226 с.
3. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. – Киев: Вища шк., 1991. – 207 с.
4. *Яковець В. П.* Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженнями: Дис. … д-ра фіз.-мат. наук. – Київ, 1993. – 318 с.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 548 с.
6. *Корсуков В. М.* Некоторые свойства обобщенных обратных матриц // Вырожденные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1982. – С. 19–36.

Одержано 30.10.95