УДК 517.9

И. С. Кац (Одес. акад. пищ. технологий)

СТЕПЕННЫЕ МОМЕНТЫ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ПОРЯДКОВ ГЛАВНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ СТРУНЫ*

We establish a necessary and sufficient condition of the existence of finite power moments of all negative integral orders of the main spectral function of a string. The necessity of this problem is explained by its relation to the strong Stieltjes moment problem.

Одерж0 необхідну та достатнію умови існування скінченних степеневих моментів усіх цілих від'емних порядків головної спектральної функції струни. Потреба у цьому виникла у зв'язку з так званою сильною проблемою моментів Стільтьеса.

Исследования настоящей статьи стимулированы работой [1], где рассматривается сильная проблема моментов Стильтьеса. Изучение этой проблемы началось, по-видимому, с работы [2] (в [1] содержится библиография, касающаяся этого направления). Суть сильной проблемы моментов Стильтьеса состоит в нахождении такой не убывающей на $[0,+\infty)$ функции τ, что при любом целом n

$$\int_{-0}^{+\infty} \lambda^n \, d\tau(\lambda) = s_n, \tag{1}$$

где $\{s_n\}_{n=-\infty}^{n=+\infty}$ — заданная бибесконечная последовательность положительных чисел. Она отличается от проблемы моментов Стильтьеса тем, что в последней требовалось, чтобы (1) выполнялось лишь для неотрицательных целых n.

В [3] М. Г. Крейн впервые указал на то, что в случае, когда проблема моментов Стильтьеса имеет решение с бесконечным числом точек роста, множество всех ее решений совпадает со множеством имеющих неотрицательный спектр спектральных функций струны, принадлежащей к классу струн, названных им стильтьесовскими**. Поэтому (см. [5], теорема 5) в упомянутом случае любое решение проблемы моментов Стильтьеса является либо главной спектральной функцией стильтьесовской струны, либо главной спектральной функцией струны, полученной из стильтьесовской некоторым продолжением вправо. Так как решение сильной проблемы моментов Стильтьеса является решением проблемы моментов Стильтьеса, возник следующий вопрос.

Главные спектральные функции каких стильтьесовских струн или струн, полученных из стильтьесовских некоторым продолжением вправо, имеют конечные моменты всех отрицательных целых порядков ?

Ответ на этот вопрос как частный случай получается из доказанных здесь теорем A и B, составляющих основное содержание статьи. Их формулировки приведены в ч. 3 п. 1.

1. Некоторые сведения теории М. Г. Крейна струны S_1 и теории интеграла Стильтьеса.

1. Многие из изложенных здесь сведений упомянутой теории можно найти в [4, 5], однако автор счел необходимым изложить их здесь, ибо ссылки на эти сведения в ходе доказательства тех или иных предложений заняли бы значительно больше места.

Пусть на интервале $I=(0,L)$, $L<+\infty$, или $I=[0,L)$, $L\le+\infty$, задана отличная от константы конечная неубывающая функция M $(M(0)=0)$, которая может иметь интервалы постоянства, точки разрыва, ненулевые непрерывную сингулярную и абсолютно непрерывную составляющие. Будем трактовать M

* Работа частично поддержана Международным научным фондом, Грант UCZZ000.

** С некоторыми аспектами теории таких струн можно познакомиться в § 13 из [4].

как функцию распределения масс струны $S(I, M)$ в том смысле, что при любом $x \in I$ $M(x+0)$ — это масса части струны, расположенной на сегменте $[0, x]$ (под $M(L+0)$, когда $L \in I$, понимаем $M(L)$).

Если $L \notin I$, то полагаем

$$M(L) = \sup_{x \in I} M(x).$$

Не умаляя общности, будем считать *левый конец струны тяжелым*, т. е. $M(0) < M(x)$ $\forall\, x \in (0, L)$. Положим $L_0 = \sup F_M(\leq L)$, где F_M — множество точек роста функции M. Струну $S(I, M)$ называем регулярной, если $L_0 + M(L) < \infty$, а в противном случае — сингулярной $(L_0 = L \notin I)$.

Струну $S(I, M)$ будем обозначать через $S_0(I, M)$ или $S_1(I, M)$ соответственно тому, будет ли ее левый конец неподвижно закреплен или иметь возможность скользить без трения в направлении, перпендикулярном равновесному положению (оси x). Со струнами $S_1(I, M)$ и $S_0(I, M)$ ассоциируем их „амплитудные функции" $\varphi(x, z)$, $\psi(x, z)$ соответственно — непродленные части (см. [5], пп. 1.1–1.4) решений „дифференциального уравнения струны" $-dy^- / (d)M - zy = 0$ (см. [4], §§ 1, 2; [5], п. 2.1), удовлетворяющих условиям

$$\varphi(0, z) = 1, \quad \varphi^-(0, z) = 0; \quad \psi(0, z) = 0, \quad \psi^-(0, z) = 1 \tag{2}$$

(y^+ и y^- — обозначения правой и левой производных по переменной x функции y; $y^-(0)$ — присоединенное значение).

2. Пусть $L^{(2)}(I, M)$ — гильбертово пространство M-измеримых на I функций f, имеющих M-суммируемый квадрат, а $\hat{L}^{(2)}(I, M)$ — множество $f \in L^{(2)}(I, M)$, равных нулю в некоторой (своей для каждой функции f) окрестности правого конца интервала I, если струна $S(I, M)$ сингулярна. Если же она регулярна, то $\hat{L}^{(2)}(I, M) := L^{(2)}(I, M)$.

***Определение* 1.** *Не убывающую на $(-\infty, +\infty)$ функцию τ, нормированную условиями*

$$\tau(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\tau(\lambda+0) + \tau(\lambda-0)\right) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \tau(0) = 0, \tag{3}$$

называем спектральной функцией (сокращенно СФ) струны $S_1(I, M)$, если отображение $W: f \to F$, определяемое равенством

$$F(\lambda) = \int_I f(x)\varphi(x, \lambda)\, dM(x) \quad \forall\, \lambda \in (-\infty, +\infty),$$

изометрически переводит $\hat{L}^{(2)}(I, M)$ в $L^{(2)}_\tau(-\infty, +\infty)$, т. е. если

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2\, d\tau(\lambda) = \int_I |f(x)|^2\, dM(x) \quad \forall f \in \hat{L}^{(2)}(I, M), \qquad F = Wf.$$

Множество $\sigma[\tau]$ точек роста СФ τ называется спектром этой СФ.

3. Отметим, что для любой СФ τ струны S_1

$$\int_{1-0}^{+\infty} \lambda^{-1}\, d\tau(\lambda) < +\infty. \tag{4}$$

Это вытекает из теоремы 3.1 из [4].

Как установлено в ([4], § 10, п. 4), при любом комплексном $z \in \operatorname{Ext}[0, +\infty)$ существует конечный предел

$$\lim_{x \uparrow L} \frac{\psi(x, z)}{\varphi(x, z)} := \mathring{\Gamma}(z), \tag{5}$$

$\mathring{\Gamma}(z)$ — S-функция в терминологии, принятой в [6] (см. также [5], п. 2.2), допускающая единственное представление

$$\mathring{\Gamma}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathring{\tau}(\lambda)}{\lambda - z} = \int_{-0}^{+\infty} \frac{d\mathring{\tau}(\lambda)}{\lambda - z} \quad \forall z \in \operatorname{Ext}[0, +\infty), \tag{6}$$

в которой $\mathring{\tau}$ — определенная на $(-\infty, +\infty)$ неубывающая функция, которая не имеет точек роста на $(-\infty, 0)$ и нормирована условиями типа (3). За исключением случая, когда $I = [0, L]$ и точка $x = L (< \infty)$ несет сосредоточенную массу, $\mathring{\tau}$ является СФ струны $S_1(I, M)$ ([5], п. 2.6), [6]. Ее называют *главной* СФ. Нас в дальнейшем будут интересовать, в основном, только главные СФ. Поэтому *впредь будем считать, что* $I = [0, L)$, ибо присоединение к I точки $x = L < \infty$, не несущей сосредоточенной массы, не изменяет главную СФ струны $S_1(I, M)$ и, более того, не изменяет множества всех ее СФ, как это вытекает из определения 1.

***Определение* 2.** *Через $\mathfrak{S}$ будем обозначать класс струн S_1, у которых главная СФ $\mathring{\tau}$ такова, что при любом $\gamma \in \mathbb{N}$*

$$\int_{-0}^{+\infty} \lambda^{-\gamma} d\mathring{\tau}(\lambda) < +\infty. \tag{7}$$

При выполнении (7) хотя бы при одном $\gamma > 0$ подразумевается, что $\tau(+0) - \tau(-0) = 0$.

Из (5) и (6) вытекает, что (см. [4], § 11; [5, с. 165])

$$\int_{-0}^{+\infty} \lambda^{-1} d\mathring{\tau}(\lambda) = L. \tag{8}$$

Поэтому струны $S_1(I, M)$, имеющие бесконечную длину, не принадлежат $\mathfrak{S}$.

Если $\mathring{\tau}$ — главная СФ регулярной струны, то ее спектр $\sigma[\mathring{\tau}]$ дискретен, т. е. не имеет предельных точек, отличных от ∞. Если, кроме того, ее длина конечна, то в силу (8) $0 \notin \sigma[\mathring{\tau}]$ и поэтому $\inf \sigma[\mathring{\tau}] > 0$. Теперь из (8) вытекает, что все регулярные струны $S_1(I, M)$ конечной длины принадлежат $\mathfrak{S}$.

Как установлено в [7], спектр сингулярной струны $S_1(I, M)$ конечной длины L дискретен в том и только том случае, когда

$$\lim_{x \uparrow L} M(x)(L - x) = 0. \tag{9}$$

Поэтому при выполнении условия (9), предполагающего конечность L, как и в регулярном случае, убеждаемся, что $\inf \sigma[\mathring{\tau}] > 0$ и сингулярная струна $S_1([0, L), M)$ принадлежит $\mathfrak{S}$*.

Осталось выяснить, при каком условии сингулярная струна $S_1([0, L), M)$, для которой (9) не выполняется, принадлежит $\mathfrak{S}$.

Введем в рассмотрение функцию U равенством

---

* Легко убедиться, используя замечание 2.2 из [7], что $\inf \sigma[\check{\tau}] > 0$ в том и только в том случае, когда

$$\sup_{x \in [0, L)} M(x)(L - x) < \infty.$$

$$U(x) = \int_0^x M(s)\,ds \;\left(= \int_{-0}^x (x-s)\,dM(s) \right) \quad \forall\, x \in [0, L). \tag{10}$$

Она непрерывна и монотонно возрастает на $[0, L)$. Положим

$$U(L) = \sup_{x \in [0,\, L)} U(x).$$

Для формулировки теоремы А введем следующие понятия.

***Определение* 3.** *Будем говорить, что струна* $S_1([0, L), M)$ *принадлежит классу* P_γ *при* $\gamma \in \mathbb{R}$, *если*

$$J_\gamma := \int_0^L (U(x))^{\gamma-1}\,dx < \infty. \tag{11}$$

***Замечание* 1.** При $\gamma \geq 1$ из (11) вытекает, что $L < +\infty$, и при этих γ (11) характеризует поведение $U(x)$, а значит, и $M(x)$ лишь при $x \uparrow L$.

***Определение* 4.** *Будем говорить, что струна* $S_1([0, L), M)$ *принадлежит классу* Q_γ *при* $\gamma \in \mathbb{R}$, *если*

$$\int_{-0}^{+\infty} \lambda^{-\gamma}\,d\mathring{\tau}(\lambda) < \infty, \tag{12}$$

где $\mathring{\tau}$ *— ее главная СФ.*

***Замечание* 2.** Если $\gamma_2 > \gamma_1 \geq 1$, то $(S_1 \in Q_{\gamma_2}) \Rightarrow (S_1 \in Q_{\gamma_1})$. Поэтому $(S_1 \in \mathfrak{S}) \Leftrightarrow (S_1 \in Q_\gamma \;\forall\, \gamma > 1)$. Это вытекает из определений 2, 4 и того, что (4) справедливо для любой СФ τ струны S_1.

Основная цель данной статьи — доказательство следующих теорем.

Теорема А. *Для того чтобы струна* $S_1([0, L), M)$ *принадлежала классу* Q_γ *при* $\gamma > 0$, *необходимо и достаточно, чтобы она принадлежала классу* P_γ.

Теорема В. *Для того чтобы сингулярная струна* $S_1([0, L), M)$ *принадлежала классу* $\mathfrak{S}$, *необходимо и достаточно, чтобы условие*

$$M(x)(L-x)^{1+\varepsilon} = o(1), \quad x \uparrow L, \tag{13}$$

подразумевающее, что $L < +\infty$, *выполнялось при любом* $\varepsilon > 0$.

4. Для доказательства теоремы А нам понадобятся дополнительные сведения о струне S_1:

a) при любых $x \in I$ и $z \in \mathbb{C}$ (см. [4], § 2, п. 2)

$$\varphi(x, z) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x)(-z)^j, \tag{14}$$

где

$$\varphi_0(x) = 1, \qquad \varphi_{j+1}(x) = \int_{-0}^x (x-s)\,\varphi_j(s)\,dM(s), \quad j = 0, 1, 2, \ldots; \tag{15}$$

b) при любых $x \in I$ и $z \in \mathbb{C}$

$$\varphi^+(x, z) = -z \int_{-0}^{x+0} \varphi(s, z)\,dM(s), \tag{16}$$

где $\varphi^+(x, z)$ — правая производная функции $\varphi(x, z)$ по переменной x ([4], равенство (2.7));

c) при любых $x \in I$ и $z \in \mathbb{C}$ (см. [4], § 2, п. 2)

$$\varphi(x, z)\psi^{\pm}(x, z) - \varphi^{\pm}(x, z)\psi(x, z) = 1; \tag{17}$$

d) при любых $x \in I$, $x > 0$ и $z \in \mathbb{C}$

$$\varphi(x, z) = \prod_j \left(1 - \frac{z}{\lambda_j(x)}\right), \quad \varphi^+(x, z) = -zM(x+0)\prod_j \left(1 - \frac{z}{\xi_j(x)}\right), \tag{18}$$

где $\lambda_j(x)$ — нули функции $z \to \varphi(x, z)$, $\xi_j(x)$ — отличные от $z = 0$ нули функции $z \to \varphi^+(x, z)$, причем $0 < \lambda_1(x) < \xi_1(x) < \lambda_2(x) < \xi_2(x) < \ldots$.

Это вытекает из того, что $z \to \varphi(x, z)$ и $z \to \varphi^+(x, z)$ — целые функции порядка $1/2$, положительности нулей этих функций ([4], § 2, п.п. 2, 3), равенства (16) и того, что функция $z \to \psi(x, z)/\varphi(x, z)$ отображает верхнюю полуплоскость в ее часть ([4], § 2, п. 4; см. также [8], гл. 8, § 1).

e) при любом $x \in (0, L)$

$$\sum_j (\lambda_j(x))^{-1} = \varphi_1(x) = \int_{-0}^{x} (x - s)\, dM(s) = U(x). \tag{19}$$

Это вытекает из сопоставления коэффициентов при z^1 в (14) и в первом равенстве (18) с учетом равенств (15), (10).

f) если $\mathring{\tau}$ — главная СФ струны $S_1(I, M)$, то $(\mathring{\tau}(+\infty) < +\infty) \Leftrightarrow (M(+0) > 0)$ и тогда $\mathring{\tau}(+\infty) - \mathring{\tau}(-0) = (M(+0))^{-1}$ ([9], п. 1; [4], § 11, п. 2).

5. Приведем следующие леммы, связанные с интегрированием по частям.

Лемма $\mathscr{L}_1$. *Если функция* σ *не убывает, а функция* ω *не возрастает на* $(a, b]$, *где* $-\infty \le a < b < +\infty$, *причем* $\omega(x) \ge 0$ $\forall x \in (a, b]$,

$$\lim_{x \downarrow a} \sigma(x) = 0$$

и хотя бы одна из этих функций непрерывна, то

$$\left(\int_{(a,\, b]} \omega(x)\, d\sigma(x) < \infty\right) \Leftrightarrow \left(\int_{(a,\, b]} \sigma(x)\, d(-\omega(x)) < \infty\right)$$

и в случае конечности этих интегралов

$$\lim_{x \downarrow a} \omega(x)\sigma(x) = 0.$$

Лемма $\mathscr{L}_2$. *Если функция* σ *не убывает, а функция* ω *не возрастает на* $[a, b)$, *где* $-\infty < a < b \le +\infty$, *причем* $\sigma(x) > 0$ $\forall x \in [a, b)$,

$$\lim_{x \uparrow b} \omega(x) = 0$$

и хотя бы одна из этих функций непрерывна, то

$$\left(\int_{[a,\, b)} \omega(x)\, d\sigma(x) < \infty\right) \Leftrightarrow \left(\int_{[a,\, b)} \sigma(x)\, d(-\omega(x)) < \infty\right)$$

и в случае конечности этих интегралов

$$\lim_{x \uparrow b} \omega(x)\sigma(x) = 0.$$

2. Доказательство достаточности в теореме А.

1. **Лемма 1.** *Для любой спектральной функции* τ *струны* $S_1(I, M)$ *и любого фиксированного* $x_* \in (0, L)$ *справедливо равенство*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\varphi^+(x_*, \lambda)}{-\lambda} \right)^2 d\tau(\lambda) = M(x_* + 0). \tag{20}$$

Доказательство. Пусть $f_*(x)$ — функция, принимающая значение, равное единице при $0 \le x \le x_*$ и нулю в остальных точках $x \in I$. Тогда в соответствии с (16) ее „образ Фурье" имеет вид

$$F_*(\lambda) = (Wf_*)(\lambda) = \int_I f_*(x) \varphi(x, \lambda)\, dM(x) = \frac{\varphi^+(x_*, \lambda)}{-\lambda}. \tag{21}$$

Так как

$$\int_I |f_*(x)|^2\, dM(x) = M(x_* + 0),$$

из (21) и определения 1 вытекает (20).

2. *Грубая оценка сверху спектральных функций струны* S_1. Пусть

$$\Lambda(x) = (2U(x))^{-1} \quad \forall\, x \in (0, L), \tag{22}$$

где U — функция, введенная равенством (10). Функция $x \to \Lambda(x)$ непрерывна и убывает на $(0, L)$, а множество принимаемых ею значений — это $((2U(L))^{-1}, +\infty)$, где

$$U(L) = \sup_{x \in I} U(x) = \int_0^L M(x)\, dx \ (\le +\infty). \tag{23}$$

Из (19), (22) и положительности чисел $\lambda_j(x)$ следует

$$\Lambda(x) < (U(x))^{-1} \le \lambda_1(x) \quad \forall\, x \in (0, L). \tag{24}$$

Лемма 2. *Пусть* τ *— какая-нибудь СФ струны* $S_1([0, L), M)$ *(сингулярность струны не предполагается). Тогда для любого* $\lambda > \Lambda(L) := (2U(L))^{-1}$ *справедливо неравенство*

$$\tau(\lambda) \le 4(M(X(\lambda)))^{-1}, \tag{25}$$

где $X\colon \lambda \to x$ *— функция, обратная функции* $\Lambda\colon x \to \lambda$.

Доказательство. Зафиксируем $\lambda_* > \Lambda(L)$. Пусть $x_* = X(\lambda_*)$. Из (18) вытекает

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\varphi^+(x_*, \lambda)}{-\lambda} \right) = -M(x_* + 0) \sum_k \left(\frac{1}{\xi_k(x_*)} \prod_{j \ne k} \left(1 - \frac{\lambda}{\xi_j(x_*)} \right) \right) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}. \tag{26}$$

Из (26) с учетом равенства (19) и свойства d) вытекает, что

$$0 > \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\varphi^+(x_*, \lambda)}{-\lambda} \right) \bigg|_{\lambda = 0} = -M(x_* + 0) \sum_k \frac{1}{\xi_k(x_*)} \ge -M(x_* + 0) U(x_*) \tag{27}$$

и $\dfrac{\partial}{\partial \lambda} \left(\dfrac{\varphi^+(x_*, \lambda)}{-\lambda} \right)$ не убывает на $(0, \xi_1(x_*))$ и поэтому при $0 < \lambda < \xi_1(x_*)$ точки графика функции $\lambda \to \varphi^+(x_*, \lambda)/-\lambda$ лежат выше касательной к графику, проведенной в точке $\left(0;\ \dfrac{\varphi^+(x_*, \lambda)}{-\lambda}\bigg|_{\lambda=0}\right)$, т. е.

$$\frac{\varphi^+(x_*, \lambda)}{-\lambda} \geq \frac{\varphi^+(x_*, \lambda)}{-\lambda}\bigg|_{\lambda=0} + \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\varphi^+(x_*, \lambda)}{-\lambda}\right)\bigg|_{\lambda=0}\lambda \quad \forall\,\lambda \in [0, \xi_1(x_*)). \tag{28}$$

Так как $\xi_1(x_*) > \lambda_1(x_*) > \Lambda(x_*) = \lambda_*$ (см (24)) и $\varphi(x, 0) = 1 \quad \forall\, x \in [0, L)$ (см. (14), (15)), из (28), (16), (27) и (22) следует

$$\frac{\varphi^+(x_*, \lambda)}{-\lambda} \geq M(x_* + 0) - M(x_* + 0)U(x_*)\Lambda(x_*) = \frac{1}{2}M(x_* + 0) \quad \forall\,\lambda \in [0, \lambda_*]. \tag{29}$$

Согласно (20) имеем

$$\int_{-0}^{\lambda_*+0} \left(\frac{\varphi^+(x_*, \lambda)}{-\lambda}\right)^2 d\tau(\lambda) \leq M(x_* + 0) \tag{30}$$

и в соответствии с (29)

$$\left(\frac{1}{2}M(x_* + 0)\right)^2 (\tau(\lambda_* + 0) - \tau(-0)) \leq M(x_* + 0).$$

А так как $\tau(\lambda_* + 0) \geq \tau(\lambda_*)$, $\tau(-0) \leq \tau(0) = 0$,

$$\tau(\lambda_*) \leq 4(M(x_* + 0))^{-1} \leq 4(M(x_*))^{-1} = 4(M(X(\lambda_*)))^{-1}.$$

Ввиду произвольности в выборе λ_* вытекает искомое.

Следствие. *Если* $U(L) = \infty$, *то* (25) *справедливо при всех* $\lambda > 0$.

3. **Теорема 1.** *Если сингулярная струна* $S_1([0, L), M)$ *принадлежит классу* P_γ *при некотором* $\gamma > 0$, *то она принадлежит классу* Q_γ.

Доказательство. Пусть $S_1([0, L), M) \in P_\gamma$ при $\gamma > 0$; $U(L) < \infty$. Тогда из (23) и определения 3 следует, что $L < +\infty$ и в соответствии с леммой $\mathcal{L}_2$ справедливость равенства (9). Следовательно, $\inf \sigma[\mathring{\tau}] > 0$. Поэтому с учетом (8) при $\gamma \geq 1$ $S_1(I, M) \in Q_\gamma$. Когда же $0 < \gamma < 1$, принадлежность струны S_1 классам P_γ и Q_γ равносильна сходимости интегралов

$$\int_0^{L/2} (U(x))^{\gamma-1}\, dx, \qquad \int_{1-0}^{+\infty} \lambda^{-\gamma} d\mathring{\tau}(\lambda)$$

соответственно и утверждение теоремы — это частный случай теоремы из [10] (а также теоремы А из [11]), связывающей поведение $M(x)$ при $x \downarrow 0$ с поведением $\mathring{\tau}(\lambda)$ при $\lambda \uparrow +\infty$. В случае, когда $U(L) < +\infty$, утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь $U(L) = \infty$. Согласно (4), (3), определению 4 и леммам $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$

$$(S_1([0, L), M) \in Q_\gamma) \Leftrightarrow \left(\int_0^{+\infty} \mathring{\tau}(\lambda)\lambda^{-\gamma-1}\, d\lambda < \infty\right). \tag{31}$$

Согласно следствию леммы 2 справедливо неравенство

$$\int_0^{+\infty} \mathring{\tau}(\lambda)\lambda^{-\gamma-1}\, d\lambda \leq 4\int_0^{+\infty} \lambda^{-(\gamma+1)}(M(X(\lambda)))^{-1}\, d\lambda. \tag{32}$$

Производя замену $\lambda = \Lambda(x)$ (напомним, что $\lim\limits_{x\downarrow 0} \Lambda(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\uparrow L} \Lambda(x) = 0$; см. также (22) и (10)), получаем

$$\int\limits_0^{+\infty} \lambda^{-(\gamma+1)}(M(X(\lambda)))^{-1}\, d\lambda = \int\limits_L^0 (\Lambda(x))^{-(\gamma+1)}(M(x))^{-1}\, d\Lambda(x) =$$

$$= \int\limits_L^0 (2U(x))^{\gamma+1}(M(x))^{-1} \frac{-M(x)\,dx}{2(U(x))^2} = 2^\gamma \int\limits_0^L (U(x))^{\gamma-1}\, dx = 2^\gamma J_\gamma. \quad (33)$$

Если $S_1([0, L), M) \in P_\gamma$, то $J_\gamma < \infty$ (определение 3) и в соответствии с (32), (33) и (31) $S_1([0, L), M) \in Q_\gamma$.

3. Доказательство необходимости в теореме А.

1. Сначала докажем необходимость для $0 < \gamma \le 1$.

Теорема 2. *Если* $S_1([0, L), M) \in Q_\gamma$ *при* $0 < \gamma \le 1$, *то* $S_1([0, L), M) \in$ $\in P_\gamma$.

Доказательство. При $\gamma = 1$ утверждение теоремы вытекает из равенства (8) и определений 3, 4. Пусть теперь $0 < \gamma < 1$. Согласно (14) и (15) $\varphi(x, -\zeta) \ge$ ≥ 1 $\forall x \in I$, $\zeta > 0$ и поэтому из (17) имеем

$$\left(\frac{\psi(x, -\zeta)}{\varphi(x, -\zeta)}\right)'_x = (\varphi(x, -\zeta))^{-2} \quad \forall x \in I, \quad \zeta > 0.$$

Теперь из (5), (6) и граничных условий (2) для функций φ и ψ следует

$$\int\limits_{-0}^{+\infty} \frac{d\mathring{\tau}(\lambda)}{\lambda + \zeta} = \int\limits_0^L (\varphi(x, -\zeta))^{-2}\, dx. \quad (34)$$

В соответствии с (19) и свойством d)

$$0 \le \ln \varphi(x, -\zeta) = \sum_j \ln\left(1 + \frac{\zeta}{\lambda_j(x)}\right) \le \zeta \sum_j (\lambda_j(x))^{-1} = \zeta U(x) \ \forall x \in I, \ \zeta > 0,$$

а поэтому

$$1 \le \varphi(x, -\zeta) = e^{\zeta U(x)} \quad \forall x \in I, \quad \zeta > 0. \quad (35)$$

Согласно (34) и (35) справедливо неравенство

$$\int\limits_{-0}^{+\infty} \frac{d\mathring{\tau}(\lambda)}{\lambda + \zeta} \ge \int\limits_0^L e^{-2\zeta U(x)}\, dx \quad \forall \zeta > 0. \quad (36)$$

Отсюда имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\zeta^{-\gamma} \int\limits_{-0}^{+\infty} \frac{d\mathring{\tau}(\lambda)}{\lambda + \zeta}\right) d\zeta \ge \int\limits_0^{+\infty} \left(\zeta^{-\gamma} \int\limits_0^L e^{-2\zeta U(x)}\, dx\right) d\zeta,$$

$$\int\limits_{-0}^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\zeta}{\zeta^\gamma(\lambda + \zeta)}\right) d\mathring{\tau}(\lambda) \ge \int\limits_0^L \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\zeta}{\zeta^\gamma e^{2\zeta U(x)}}\right) dx \quad (37)$$

независимо от того, конечны ли эти интегралы. Применяя во внутреннем интеграле левой части (37) замену $\zeta = \lambda t$, а в правой $\zeta = t(U(x))^{-1}/2$, получаем

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\zeta}{\zeta^\gamma(\lambda+\zeta)} = \lambda^{-\gamma} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma(1+t)} = D_1\lambda^{-\gamma}, \tag{38}$$

$$\int_0^{+\infty} \zeta^{-\gamma} e^{-2\zeta U(x)} d\zeta = 2^{\gamma-1}(U(x))^{\gamma-1} \int_0^{+\infty} t^{-\gamma} e^{-t} dt = (U(x))^{\gamma-1} D_2, \tag{39}$$

где $0 < D_i < +\infty$, $j = 1, 2$. С помощью (37)–(39) и определений 3, 4 завершаем доказательство.

Благодаря выкладкам, изложенным в следующем пункте, и лемме 3 результат теоремы 2 будет перенесен на случай $\gamma > 1$.

2. *Преобразование* V. Пусть $\mathring{\tau}$ — главная спектральная функция струны $S_1(I, M)$ при $I = [0, L)$. Преобразование, переводящее эту струну в струну $S_1(I^*, M^*)$, главной спектральной функцией которой является функция $\mathring{\tau}^*$, определяемая равенством

$$\mathring{\tau}^*(\lambda) := (R-S)\int_0^\lambda \xi\, d\mathring{\tau}(\xi) \quad \forall\, \lambda \in (-\infty, +\infty)$$

(интеграл понимается в смысле Римана–Стильтьеса, что гарантирует нормировку типа (3) для $\mathring{\tau}^*$), будем называть преобразованием V. Согласно основной в спектральной теории струн S_1 теореме М. Г. Крейна (см., например, [5], теорема 6), преобразование V осуществимо в том и только в том случае, когда справедливо (4) с $\mathring{\tau}^*$ вместо τ, т. е. когда $\mathring{\tau}(+\infty) < +\infty$, а значит (см. свойство (f)), когда $M(+0) > 0$. В этом случае I^* и M^* определяются однозначно (с точностью до значений функции M^* в точках ее разрыва). Как установил М. Г. Крейн [8], I^*, M^* можно определить приведенным ниже способом. Определим функции α и β равенствами

$$\alpha(x) = \frac{1}{M(+0)} - \frac{1}{M(x+0)}, \quad \beta(x) = \int_0^x (M(s))^2 ds \quad \forall\, x \in [0, L). \tag{40}$$

Полагаем

$$L^* = (M(+0))^{-1}, \quad I^* = [0, L^*), \quad \alpha(L) = L^*, \quad \alpha^{-1}(0) = 0,$$

$$\alpha^{-1}(X) = \sup\{x \in I \mid \alpha(x) < X\} \quad \forall\, X \in (I^* \setminus \{0\}), \tag{41}$$

$$M^*(X) = \beta(\alpha^{-1}(X)) \left(= \int_0^{\alpha^{-1}(X)} (M(s))^2 ds \right) \quad \forall\, X \in I^*. \tag{42}$$

Обозначим через $\varepsilon(\alpha)$ множество значений функции α на I. Положим

$$l^* = \sup_{x \in I} \alpha(x) \ (\leq L^*)$$

и

$$\hat{F}_\alpha = \{0\} \cup \{x \in I \mid \alpha(x) > \alpha(x-\varepsilon) \ \forall\, \varepsilon \in (0, x)\}. \tag{43}$$

Изучим некоторые свойства функций α, α^{-1}, M^* и строение множеств $I \setminus \hat{F}_\alpha$, $I^* \setminus \varepsilon(\alpha)$.

V_1) α *непрерывна справа на* I.

Это вытекает из (40).

V_2) $I \setminus \hat{F}_\alpha$ *представляет собой множество всех внутренних точек промежутков постоянства** *функции* α *и правых концов таких промежутков, в которых* α *непрерывна. Все точки* $x_j \in I$ *разрыва функции* α *принадлежат* $\hat{F}_\alpha$.

Это вытекает из V_1 и (43).

В дальнейшем, если $x \in (I \setminus \hat{F}_\alpha)$, то через x_l и x_r будем обозначать соответственно левый и правый концы содержащего x промежутка постоянства функции α.

V_3) $I^* \setminus \varepsilon(\alpha)$ *представляет собой объединение соответствующих точкам* x_j *разрыва функции* α *промежутков вида* $(\alpha(x_j - 0), \alpha(x_j))$ *или* $[\alpha(x_j - 0), \alpha(x_j))$ *соответственно тому, является или нет точка* x_j *правым концом промежутка постоянства функции* α *и в случае, когда* $l^* < L^*$, *промежутка* (l^*, L^*) *или* $[l^*, L^*)$ *соответственно тому, является или нет* L *правым концом промежутка постоянства функции* α.

Это тривиально следует из определения чисел l^* и L^* и того, что α не убывает и непрерывна справа.

V_4) *Множество значений, принимаемых функцией* α *в точках* $x \in \hat{F}_\alpha$, — *это* $\varepsilon(\alpha)$.

Действительно, если $x \in (I \setminus \hat{F}_\alpha)$, то $\alpha(x) = \alpha(x_l)$ в силу непрерывности справа функции α, а $x_l \in \hat{F}_\alpha$.

V_5) α *строго возрастает на* $\hat{F}_\alpha$.

Согласно (40) α не убывает на I и, значит, на $\hat{F}_\alpha$. Если $x_1 < x_2$ и $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$, то $\alpha(x) = \alpha(x_2)$ $\forall x \in (x_1, x_2)$ и $x_2 \notin \hat{F}_\alpha$.

V_6) *Если* $x \in \hat{F}_\alpha$ *и* $X = \alpha(x)$, *то* $\alpha^{-1}(X) = x$ *и, следовательно,*

$$\alpha(\alpha^{-1}(X)) = X, \quad \alpha^{-1}(\alpha(x)) = x.$$

Это вытекает из определений множества $\hat{F}_\alpha$ и функции α^{-1}.

V_7) *Если* $X \in \varepsilon(\alpha)$, *то* $\alpha(\alpha^{-1}(X)) = X$.

Это следует из свойств V_4 и V_6.

V_8) *Если* $x \in (I \setminus \hat{F}_\alpha)$, *то* $\alpha^{-1}(\alpha(x)) < x$.

Это вытекает из свойств V_6 и V_1, ибо в этом случае $\alpha(x) = \alpha(x_l)$, где $x_l < x$, $x_l \in \hat{F}_\alpha$.

V_9) *Если* $X \in (I^* \setminus \varepsilon(\alpha))$, *то* $\alpha(\alpha^{-1}(X)) > X$.

В самом деле (см. V_3), если $X \in (\alpha(x_j - 0), \alpha(x_j))$ или $X = \alpha(x_j - 0)$, где x_j — точка разрыва функции α, то $\alpha^{-1}(X) = x_j$ и $\alpha(\alpha^{-1}(X)) = \alpha(x_j) > X$. Если же $l^* < L^*$ и $X \in (l^*, L^*)$ или $X = l^*$ (см. V_3), то $\alpha^{-1}(X) = L$ и $\alpha(\alpha^{-1}(X)) = \alpha(L) = L^* > X$.

V_{10}) $\alpha^{-1}(\alpha(x)) \le x$ $\forall x \in I$, $\alpha(\alpha^{-1}(X)) \ge X$ $\forall X \in I^*$.

Это вытекает из свойств $V_6 - V_9$.

V_{11}) *Если функция* $X \to f(X)$ *B-измерима на* $[0, l^*)$ *и является постоянной на каждом промежутке вида* $(\alpha(x_j - 0), \alpha(x_j)]$, *соответствующем точке* x_j *скачка функции* α, *то*

---

* Под промежутком постоянства имеем в виду нерасширимый.

$$\int\limits_{[0,l^*)} f(X)\,dX = \int\limits_I f(\alpha(x))\,d\alpha(x) = \int\limits_{I\setminus\{0\}} f(\alpha(x))\,d\left(-\frac{1}{M(x+0)}\right). \quad (44)$$

Доказательство. Как известно (см., например, [12], § 9.4.3, теорема 1) для любой B-измеримой на J функции $x \to g(x)$

$$\int\limits_I g(x)\,d\alpha(x) = \int\limits_{[0,l^*)} g(\alpha^{-1}(X))\,dX. \quad (45)$$

Полагая в (45) $g(x) = f(\alpha(x))$, получаем

$$\int\limits_I f(\alpha(x))\,d\alpha(x) = \int\limits_{[0,l^*)} f(\alpha(\alpha^{-1}(X)))\,dX. \quad (46)$$

Если $X \in \varepsilon(\alpha)$, то в соответствии с V_7 $\alpha(\alpha^{-1}(X)) = X$. Пусть $X \in ([0, l^*)\setminus\varepsilon(\alpha))$. Тогда найдется такая точка x_j разрыва функции α (согласно V_2 $x_j \in \hat{F}_\alpha$), что либо $X \in (\alpha(x_j - 0), \alpha(x_j))$, либо $X = \alpha(x_j - 0)$, причем последнее возможно лишь в случае, когда $\alpha(x_j - 0) \notin \varepsilon(\alpha)$. В первом случае согласно (41) $\alpha^{-1}(X) = x_j$ и $\alpha(\alpha^{-1}(X)) = \alpha(x_j)$, а поскольку f является постоянной на $(\alpha(x_j - 0), \alpha(x_j)]$, то $f(\alpha(\alpha^{-1}(X))) = f(\alpha(x_j)) = f(X)$. Таким образом, $f(\alpha(\alpha^{-1}(X))) = f(X)$ при всех $X \in [0, l^*)$, за исключением, может быть, максимум счетного множества не принадлежащих $\varepsilon(\alpha)$ точек $\alpha(x_j - 0)$. Поэтому (44) вытекает из (46), если учесть (40), и то, что функция α непрерывна в точке $x = 0$.

V_{12}) *Если функция f удовлетворяет условиям из V_{11}, то для любой точки $\tilde{x} \in \hat{F}_\alpha$ справедливо равенство*

$$\int\limits_0^{\alpha(\tilde{x})} f(X)\,dX = \int\limits_{+0}^{\tilde{x}+0} f(\alpha(x))\,d\alpha(x) = \int\limits_{+0}^{\tilde{x}+0} f(\alpha(x))\,d\left(-\frac{1}{M(x+0)}\right).$$

Это получается из V_{11}, если переопределить $f(X)$ при $X > \alpha(\tilde{x})$, полагая $f(X) = 0$ $\forall X \in (\alpha(\tilde{x}), l^*)$, ибо тогда сохраняются условия из V_{11} и

$$\int\limits_{(\tilde{x},L)} f(\alpha(x))\,d\alpha(x) = 0.$$

Убедимся в последнем; $(\tilde{x}, L) = G \cup H$, где

$$G = \{x \in (\tilde{x}, L) \,|\, \alpha(x) = \alpha(\tilde{x})\}, \qquad H = \{x \in (\tilde{x}, L) \,|\, \alpha(x) > \alpha(\tilde{x})\}.$$

Если $G \neq \varnothing$, то G — интервал постоянства функции α, примыкающей справа к $\tilde{x}$. Если же $x \in H$, то $f(\alpha(x)) = 0$. Поэтому

$$\int\limits_G f(\alpha(x))\,d\alpha(x) = 0, \qquad \int\limits_H f(\alpha(x))\,d\alpha(x) = 0.$$

3. **Лемма 3.** *Если струна $S_1([0, L), M)$ принадлежит классу P_γ с $\gamma > 0$ и к ней применима операция V, то струна $S_1([0, L^*), M^*) := VS_1([0, L), M)$ принадлежит классу $P_{\gamma+1}$.*

Доказательство. Положим по аналогии с (10) и (11)

$$U^*(X) := \int\limits_0^X M^*(S)\,dS \quad \forall X \in [0, L^*), \qquad J_\gamma^* := \int\limits_{I^*} (U^*(X))^{\gamma-1}\,dX. \quad (47)$$

Докажем сначала, что

$$U^*(\alpha(x)) \le U(x) \quad \forall x \in I. \tag{48}$$

Заметим, что в соответствии с (42), (40) и свойством V_{10}

$$M^*(\alpha(s)) = \beta(\alpha^{-1}(\alpha(s))) \le \beta(s) = \int_0^s (M(r))^2\,dr \quad \forall s \in I. \tag{49}$$

Так как в соответствии с (41), (42) функция M^* является постоянной на каждом промежутке вида $(\alpha(x_j-0), \alpha(x_j)]$, соответствующем точке разрыва x_j функции α, то, полагая в первом равенстве (47) $X = \alpha(x)$ и используя свойства V_{12}, V_{10} и равенства (42), (49), (10), при любом $x \in \hat{F}_\alpha$ (напомним, что $M(+0) > 0$) получаем

$$U^*(\alpha(x)) = \int_{+0}^{x+0} M^*(\alpha(s))\,d\left(\frac{-1}{M(s+0)}\right) \le \int_{+0}^{x+0}\left(\int_0^s (M(r))^2\,dr\right)d\left(\frac{-1}{M(s+0)}\right) =$$

$$= \frac{-1}{M(s+0)}\int_0^s (M(r))^2\,dr\Bigg|_{s=+0}^{s=x+0} + \int_0^x M(s)\,ds \le \int_0^x M(s)\,ds = U(x).$$

При $x \in \hat{F}_\alpha$ неравенство (48) установлено. Если $x \in (I \setminus \hat{F}_\alpha)$, то x принадлежит некоторому промежутку $[x_l, x_r)$ или $[x_l, x_r]$ постоянства функции α, причем $x_l \in \hat{F}_\alpha$. Поэтому $U^*(\alpha(x)) = U^*(\alpha(x_l)) \le U(x_l) < U(x)$. Значит, (48) справедливо и при таких x.

Когда $l^* = L^*$, тогда в соответствии с V_{10} и (47)

$$J^*_{\gamma+1} = \int_{[0,l^*)} (U^*(X))^\gamma\,dX \le \int_{[0,l^*)} (U^*(\alpha(\alpha^{-1}(X))))^\gamma\,dX. \tag{50}$$

Так как $\alpha^{-1}(X) = \mathrm{const}$ на каждом промежутке вида $(\alpha(x_j-0), \alpha(x_j)]$ и $\alpha(x) \in \varepsilon(\alpha)$ $\forall x \in I$, то в соответствии с (50), V_{11}, V_7 и (48)

$$J^*_{\gamma+1} \le \int_{(0,L)} (U^*(\alpha(\alpha^{-1}(\alpha(x)))))^\gamma\,d\left(\frac{-1}{M(x+0)}\right) =$$

$$= \int_{(0,L)} (U^*(\alpha(x)))^\gamma\,d\left(\frac{-1}{M(x+0)}\right) \le \int_{(0,L)} (U(x))^\gamma\,d\left(\frac{-1}{M(x+0)}\right). \tag{51}$$

Поскольку $l^* = L^*$, т. е. $M(L) = \infty$, из лемм $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ вытекает, что последний интеграл в (51) конечен, если конечен интеграл (см. (10), (11))

$$\int_{(0,L)} \frac{1}{M(x+0)}\,d((U(x))^\gamma) = \gamma \int_{(0,L)} (M(x+0))^{-1}(U(x))^{\gamma-1}M(x)\,dx = \gamma J_\gamma.$$

Поэтому из (51) и определения 3 вытекает утверждение леммы в случае, когда $l^* = L^*$. Пусть теперь $l^* < L^*$, т. е. $M(L) < \infty$, и $S_1([0, L), M) \in P_\gamma$ при $\gamma > 0$. Покажем сначала, что $L < +\infty$. Допустим, что $L = \infty$. Тогда из (10) следует, что $U(x)/x \to M(L)$ при $x \uparrow L = \infty$, где $0 < M(L) < +\infty$ и (11) не может выполняться ни при каком $\gamma > 0$. Итак, $L < +\infty$. Согласно (41) и (42) $0 \le$ $\le M^*(X) \le (M(L))^2 L < \infty$ $\forall\ X \in (0, L^*)$, а согласно (47) $0 \le U^*(X) \le$

$\leq (M(L))^2 LL^* \ \forall X \in [0, L^*)$ и $J_{\gamma+1} < \infty$ при любом $\gamma > 0$, ибо $L^* < +\infty$. Это доказывает утверждение леммы в случае, когда $l^* < L^*$, что и завершает доказательство леммы.

4. *Доказательство необходимости в теореме* А *при* $\gamma > 1$. Пусть $S_1([0, L), M) \in Q_\gamma$ при $\gamma > 1$. Через n обозначим такое целое число, что $n < \gamma \leq n + 1$. Рассмотрим неубывающую функцию σ, определенную на $\mathbb{R}$ равенствами (как и прежде, $\mathring{\tau}$ — главная СФ этой струны)

$$\sigma(0) = 0, \quad \sigma(\lambda) = (R - S) \int_0^\lambda \xi^{-n} \, d\mathring{\tau}(\xi) \quad \forall \lambda \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}), \tag{52}$$

где интеграл понимается как несобственный интеграл Римана—Стильтьеса, что гарантирует нормировку типа (3) функции σ.

Легко видеть, что (см. (4) и определение 3)

$$\int_{-0}^{+\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^{\gamma-n}} = \int_{-0}^{+\infty} \frac{d\mathring{\tau}(\lambda)}{\lambda^\gamma} < \infty, \qquad \int_{1-0}^{+\infty} \lambda^{n-1} \, d\sigma(\lambda) = \int_{1-0}^{+\infty} \lambda^{-1} \, d\mathring{\tau}(\lambda) < \infty. \tag{53}$$

Так как $\gamma - n \leq 1$, из первого неравенства (53) следует, что σ удовлетворяет условию (4) (с σ вместо τ), и согласно теореме М. Г. Крейна ([5], теорема 6)* существует струна $\tilde{S}_1$, главной СФ которой является σ. Согласно тому же неравенству $\tilde{S}_1 \in Q_{\gamma-n}$, а, так как $0 < \gamma - n \leq 1$, согласно теореме 2 $\tilde{S}_1 \in P_{\gamma-n}$.

Построим конечную последовательность струн $S_1^{(0)}, S_1^{(1)}, S_1^{(2)}, \ldots, S_1^{(n)}$, полагая $S_1^{(0)} = \tilde{S}_1$, $S_1^{(j)} = V S_1^{(j-1)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Возможность построения такой последовательности вытекает из второго неравенства (53). Ясно, что главной спектральной функцией струны $S_1^{(j)}$ является (см. ч. 2 п. 3)

$$\mathring{\tau}^{(j)}(\lambda) = (R - s) \int_0^\lambda \xi^j \, d\sigma(\xi) = (R - s) \int_0^\lambda \xi^{j-n} \, d\mathring{\tau}(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

и поэтому $\mathring{\tau}^{(n)}(\lambda) = \mathring{\tau}(\lambda) \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Согласно упомянутой теореме М. Г. Крейна $S_1^{(n)}$ — это исходная струна $S_1(I, M)$. Так как $\tilde{S}_1 = S_1^{(0)} \in P_{\gamma-n}$, струна $S_1^{(n)} = S_1(I, M)$ согласно лемме 3 принадлежит P_γ. С учетом теоремы 2 завершено доказательство необходимости в теореме А, а значит (см. теорему 1), всех утверждений этой теоремы.

4. Доказательство теоремы В.

Лемма 4. *Если при* $\varepsilon \in (0, 1/(\gamma - 1))$, *где* $\gamma > 1$, *выполняется* (13), *что подразумевает конечность* L, *то струна* $S_1([0, L), M)$ *принадлежит классу* P_γ.

Доказательство. Согласно (13) $M(x) < C(L - x)^{-(1+\varepsilon)} \ \forall x \in [0, L)$, где C — некоторая константа. Следовательно,

$$U(x) := \int_0^x M(s) \, ds < C\varepsilon^{-1}((L - x)^{-\varepsilon} - L^{-\varepsilon}) < C_1 (L - x)^{-\varepsilon} \quad \forall x \in [0, L),$$

где C_1 — другая константа. Отсюда вытекает

* Можно провести доказательство без использования этой теоремы М. Г. Крейна, но тогда оно стало бы более громоздким.

$$J_\gamma := \int_0^L (U(x))^{\gamma-1}\,dx < C_1 \int_0^L (L-x)^{-\varepsilon(\gamma-1)}\,dx < \infty,$$

ибо $\varepsilon(\gamma-1)<1$. В соответствии с определением 3 $S_1([0,L),M)\in P_\gamma$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если* $S_1([0,L),M)\in P_\gamma$, *то выполняется* (13) *при* $\varepsilon = 1/(\gamma-1)$.

Доказательство. Если $S_1([0,L),M)\in P_\gamma$, то справедливо (11) и согласно лемме $\mathscr{L}_2$

$$\lim_{x\uparrow L}(U(x))^{\gamma-1}(L-x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\uparrow L} U(x)(L-x)^{1/(\gamma-1)} = 0. \qquad (54)$$

Когда $x\in(L/2,L)$, тогда при $t=2x-L$ из (10) вытекает (заметим, что $0<t<$ $<x<L$ и $x=(L+t)/2$ при таком t)

$$U(x) > \int_t^x M(s)\,ds \geq M(t)(x-t) = M(t)\frac{L-t}{2}, \qquad (55)$$

поскольку $x-t=(L-t)/2$. Так как $L-x=(L-t)/2$, из (54) и (55) вытекает (13), ибо $1/(\gamma-1)=\varepsilon$ и $t\to L$ в случае, когда $x\to L$. Лемма доказана.

Из теоремы А и лемм 4, 5 следует, что для принадлежности струны $S_1([0,L),M)$ классам Q_γ при любых $\gamma>1$ необходимо и достаточно выполнения условия (13) при любом $\varepsilon>0$. Это с учетом замечания 2 завершает доказательство теоремы В.

1. *Njåstad O.* Solutions of the strong Stieltjes moment problem // Meth. and Appl. Anal. – 1995. – **2**, № 3. – P. 1241–1278.
2. *Jones W. B., Thorn W. J., Waadeland H. A.* A strong Stieltjes moment problem // Trans. Amer. Math. Soc. – 1980. – **261**. – P. 503–508.
3. *Крейн М. Г.* Об одном обобщении исследований Стильтьеса // Докл. АН СССР. – 1952. – **87**, № 6. – С. 881–884.
4. *Кац И. С., Крейн М. Г.* О спектральных функциях струны // Дискретные и непрерывные граничные задачи. – М.: Мир, 1968. – 749 с.
5. *Кац И. С.* Спектральная теория струны // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 3. – С. 155–176.
6. *Кац И. С., Крейн М. Г.* *R*-функции — аналитические функции, отображающие верхнюю полуплоскость в себя // Дискретные и непрерывные граничные задачи. – М.: Мир, 1968. – 749 с.
7. *Кац И. С., Крейн М. Г.* Критерий дискретности спектра сингулярной струны // Изв. вузов. Математика. – 1958. – № 2(3). – С. 136–153.
8. *Левин Б. Я.* Распределение нулей целых функций. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 632 с.
9. *Крейн М. Г.* О некоторых случаях эффективного определения плотности неоднородной струны по ее спектральной функции // Докл. АН СССР. – 1953. – 93, № 4. – С. 617–620.
10. *Кац И. С.* Теорема об интегральных оценках роста спектральных функций струны // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 3. – С. 296–302.
11. *Кац И. С.* Интегральные характеристики роста спектральных функций обобщенных граничных задач второго порядка с граничными условиями в регулярном конце // Изв. АН СССР. – 1971. – **35**, № 1. – С. 154–184.
12. *Камке Е.* Интеграл Стильтьеса. – М.: Физматгиз, 1959. – 328 с.

Получено 10.05.95