УДК 534.23

В. А. Козловский

Применение краевой задачи Карлемана к исследованию распространения волн в среде с плавным переходом

При исследовании распространения волн в стратифицированной среде обычно предполагается наличие резко выраженной границы между слоями. В представляющем особый практический интерес случае вертикальной стратификации такими границами являются параллельные плоскости [1]. Однако многочисленные экспериментальные данные свидетельствуют о том, что подобная идеализация не всегда удовлетворительна. В этой связи возникает проблема адекватного описания распространения волн в средах с непрерывно изменяющимися параметрами (скоростью звука, теплопроводностью и др.). В предлагаемой работе рассмотрена процедура построения решения волнового уравнения, содержащего переменный коэффициент специального типа (с экспонентой).

Распространение волны давления, создаваемой точечным источником интенсивности $f(t)$, расположенным в точке с координатами $r = 0$, $z = z_0$, описывается волновым уравнением относительно давления $p(r, z, t)$ (здесь r, z — цилиндрические координаты, t — время);

$$\partial^2 p/\partial t^2 = c^2(z)\,\Delta p + f(t)\,\delta(r)/r\delta(z - z_0), \tag{1}$$

где Δ — осесимметричный оператор Лапласа, $\delta(\cdot)$ — дельта-функция, $c(z)$ — адиабатическая скорость звука.

Пусть

$$c^2(z) = \frac{c_1^2 - c_2^2}{1 + \exp(-\alpha z)} + c_2^2, \tag{2}$$

c_1, c_2, α — положительные константы. Выражение (2) характеризует изменение скорости звука по глубине z, имеющее вид функции плавного перехода [2]. Параметры c_1, c_2 характеризуют предельные значения $c(z)$ в полупространствах $z > 0$, $z < 0$ соответственно. Параметр α описывает размеры «переходного слоя» для скорости звука (в частности, при $\alpha \to \infty$ толщина этого слоя стремится к нулю, т. е. граница становится резко выраженной).

Положив $f(t) \equiv 0$ для $t \leqslant 0$ и задавая начальные условия, выражающие отсутствие возмущений в начальный момент $t = 0$,

$$p\,|_{t=0} = \partial p/\partial t\,|_{t=0} = 0, \tag{3}$$

рассмотрим задачу Коши (1), (3) в классе $L_2(D)$, где $D = \{t > 0,\ r > 0,\ -\infty < z < \infty\}$.

Применим к (1) интегральные преобразования Ханкеля по r и Лапласа по t:

$$v(s, z, q) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty p(r, z, t) \exp(-qt)\, dt \right) J_0(rs)\, r dr. \tag{4}$$

Введем переменную τ по формуле

$$\tau = \alpha z \tag{5}$$

и обозначим $w(s, \tau, q) = v(s, z, q)$, $F(q)$ — преобразование Лапласа функции $f(t)$. Тогда, использовав начальные условия (3) и тот факт, что $p \in L_2(D)$, получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\alpha^2 w''(\tau) - \frac{a^2 + b^2 e^{-\tau}}{c_1^2 + c_2^2 e^{-\tau}}\, w(\tau) = -F(q) \frac{1 + e^{-\alpha z_0}}{c_1^2 + c_2^2 e^{-\alpha z_0}}\, \delta\left(\frac{\tau}{\alpha} - z_0\right), \tag{6}$$

где штрих означает дифференцирование по τ, а параметрическая зависимость от q и s для удобства опущена. В уравнении (6) введены обозначения

$$a^2 = q^2 + (c_1 s)^2, \quad b^2 = q^2 + (c_2 s)^2. \tag{7}$$

Однозначность величин a и b задается условиями $\operatorname{Im}(a) \geqslant 0$, $\operatorname{Im}(b) \geqslant 0$. Согласно [2] функция $w(\tau)$ имеет свойство

$$w(\tau) \in L_2(-\infty, \infty),\ \exp(-\tau)\, w(\tau) \in L_2(-\infty, \infty). \tag{8}$$

Применим к уравнению (6) преобразование Фурье в симметричной форме

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau) \exp(ix\tau)\, d\tau. \tag{9}$$

Введя обозначение

$$G(x) = \alpha/\sqrt{2\pi} F(q)\,(1 + \exp(-\alpha z_0))\, \frac{\exp(i\alpha z_0 x)}{(\alpha c_1 x)^2 + a^2}, \tag{10}$$

получим функциональное уравнение относительно $W(x)$:

$$W(x) = -\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \frac{x^2 + (b/\alpha c_2)^2}{x^2 + (a/\alpha c_1)^2}\, W(x + i) + G(x). \tag{11}$$

В силу (8) искомая функция должна быть аналитической в полосе $0 < \operatorname{Im}(\tilde{x}) < 1$ и такой, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |W(x + i\eta)|^2\, dx < \infty$ равномерно относительно $\eta \in [0, 1]$. В этом случае уравнение (11) можно трактовать как краевую задачу Карлемана для полосы $0 < \operatorname{Im}(\tilde{x}) < 1$, где $\tilde{x} = x + i\eta$.

Для решения полученной задачи применим метод факторизации. Указанный метод был применен в [3] к интегральным уравнениям типа свертки. Согласно [3], введем функцию

$$\Omega(x) = \ln \frac{x^2 + (b/\alpha c_2)^2}{x^2 + (a/\alpha c_1)^2} \tag{12}$$

и положим

$$\Omega(x) = A(x) - A(x + i). \tag{13}$$

Введя новую неизвестную функцию $\Phi(x)$ по формуле

$$W(x) = \exp(A(x))\, \Phi(x), \tag{14}$$

получим краевую задачу Карлемана с постоянными коэффициентами

$$\Phi(x) = -(c_2/c_1)^2 \Phi(x+i) + G(x) \exp(-A(x)). \tag{15}$$

Применив к (15) обратное преобразование Фурье, найдем (здесь и далее малыми буквами обозначены соответствующие оригиналы преобразования Фурье)

$$\varphi(\tau) = (1/\sqrt{2\pi}(1 + (c_2/c_1)^2 e^{-\tau})) \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma) (\div \exp(-A(x)))|_{\tau-\sigma} d\sigma, \tag{16}$$

где согласно (10)

$$g(\sigma) = (F(q)/2c_1 a)(1 + \exp(-\alpha z_0)) \exp\left(-\frac{a}{\alpha c_1} |\sigma - \alpha z_0|\right). \tag{17}$$

Тогда согласно (14)

$$w(\tau) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty}\int g(\sigma)(1 + (c_2/c_1)^2 \exp(-\omega))^{-1} \times$$
$$\times (\div \exp(-A(x)))_{|\omega-\sigma} (\div \exp(A(x)))_{|\tau-\omega} d\omega d\sigma, \tag{18}$$

где символами $(\div \exp(\pm A(x)))|_\tau$ обозначены обратные преобразования Фурье функций $\exp(\pm A(x))$, вычисленные в точке τ.

Использовав (12), (13), определим функцию $A(x)$, задающую искомую факторизацию. На основании известного свойства Г-функции, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, имеем

$$\exp(A(x)) = \frac{\Gamma(-a/\alpha c_1 - ix)\,\Gamma(a/\alpha c_1 - ix)}{\Gamma(-b/\alpha c_2 - ix)\,\Gamma(b/\alpha c_2 - ix)}. \tag{19}$$

Найдем $(\div \exp(A(x)))$. Для этого воспользуемся известным [4] выражением, связывающим преобразования Фурье и Меллина. Опуская промежуточные выкладки, находим

$$(\div \exp(A(x))) = (1/\sqrt{2\pi}) \frac{c_2}{b}\left(\frac{b}{c_2} - \frac{a}{c_1}\right)^2 \sin\frac{\pi}{\alpha}\left(\frac{a}{c_1} - \frac{b}{c_2}\right) \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{b\tau}{\alpha c_2} + 1\right) F\left(-\frac{b}{\alpha c_2} + \frac{a}{\alpha c_1} + 1,\right.$$
$$\left. -\frac{b}{\alpha c_2} - \frac{a}{\alpha c_1} + 1;\ -\frac{2b}{\alpha c_2} + 1;\ e^{\tau}\right), \tag{20}$$

где $F(\cdot\cdot\cdot\cdot)$ — стандартное обозначение гипергеометрической функции. Аналогичное выражение можно получить для $(\div \exp(-A(x)))$.

Таким образом, формулы (17), (18), (20) определяют решение в квадратурах уравнения (6) в указанном классе функций (8). (Окончательное выражение ввиду его громоздкости опускается.)

Использовав (5) и интегральный оператор, обратный к оператору (4), представим искомое поле давлений $p(r, z, t)$ в виде

$$p(r, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} v(s, z, q) \exp(qt) J_0(rs)\, s ds dq, \tag{21}$$

где $v(s, z, q)$ определяется по формуле (18) заменой $\tau = \alpha z$.

Рассмотрим приближение формулы (21) для физически реализуемой малой разности $|c_1 - c_2|$. Пусть $c_1 - c_2 = \varepsilon > 0$. Разлагая (21) в ряд по ε и ограничиваясь первыми двумя членами разложения, имеем

$$p \approx p_0 + \varepsilon p_1, \tag{22}$$

где

$$p_0 = \frac{1}{2c_1^2} \frac{f(t - \sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}/c_1)}{\sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}}, \quad p_1 = -2p_0/c_1 (1 + \exp(-\alpha z_0)) +$$

$$+ \frac{1}{2c_1^4} \int_0^t f''(t - \tau) \times$$

$$\times \left[1 + \frac{1}{\alpha \sqrt{(c_1\tau)^2 - r^2}} \ln \frac{1 + \exp\left(-\frac{\alpha}{2}(z + z_0 + \sqrt{(c_1\tau)^2 - r^2})\right)}{1 + \exp\left(-\frac{\alpha}{2}(z + z_0 - \sqrt{(c_1\tau)^2 - r^2})\right)} \right]. \tag{23}$$

Выражения (23) совпадают с полученными ранее результатами [5], где исходная задача Коши (1), (3) решалась методом возмущений по параметру ε.

Таким образом, применение краевой задачи Карлемана позволяет получить точное решение задачи Коши для волнового уравнения с коэффициентом типа плавного перехода. В частном случае результаты хорошо согласуются с известными.

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах.— М. : Наука, 1973.— 527 с.
2. *Черский Ю. И.* Нормально разрешимое уравнение плавного перехода // Докл. АН СССР.— 1970.— **190**, № 1.— С. 57—60.
3. *Черский Ю. И.* Граничные задачи и интегральные уравнения, решаемые методом факторизации // Тр. симп. по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа.— 1974.— 2.— С. 281—291.
4. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление.— М. : Наука, 1974.— 542 с.
5. *Козловский В. А.* Моделирование давления волнового поля в неограниченной стратифицированной среде // Методы и средства анализа случайных пространственно-временных полей.— Львов : ВНИИМИУС, 1983.— С. 10—19.

Львов

Получено 02.01.85