УДК 517.923

А. З. Мохонько

О мероморфных решениях дифференциальных уравнений первого порядка

Используем обозначения теории мероморфных функций [1]. Известно [2], что любое мероморфное решение f уравнения $P(z, f, f') = 0$, где P — полином от z, f, f', имеет конечный порядок роста. В [3, 4] аналогичные утверждения доказаны для решений, мероморфных в угловой области и для алгеброидных решений. Известный метод Вимана—Валирона [5], который дает асимптотику роста целых решений, использует возможность представления функции в $\{z : |z| < R \leqslant \infty\}$ сходящимся рядом Тейлора и поэтому неприменим в случае мероморфных решений. В [6], § 12 показано, что если мероморфное решение f имеет «мало» полюсов, т. е. дефект $\delta(\infty, f) > 0$, то $(c, \rho = \text{const})$

$$\ln M(r, f) = (1 + o(1))\, cr^{\rho}, \quad r \to \infty, \quad r \bar{\in} \Delta, \tag{1}$$

$\text{mes}\, \Delta < \infty$. В настоящей статье асимптотика (1) получена при более слабом предположении, что

$$\ln M(r, f) \geqslant (\varkappa + 2\varepsilon) \ln r, \quad r > r', \quad \varepsilon > 0, \varkappa \tag{2}$$

— конечная постоянная, определяемая по виду уравнения (если для трансцендентной функции $\delta(\infty, f) > 0$, то $\ln M(r, f) / \ln r \to \infty$, $r \to \infty$). Для произвольного (не обязательно удовлетворяющего (2)) мероморфного решения f получены оценки характеристик $\ln M(r, f)$ и $m(r, f)$, совпадающие с известными для целых решений. Используемый в данной работе метод существенно проще примененного в [6, с. 92—119]. Он позволяет также переносить полученные результаты на многозначные алгеброидные решения уравнений с многозначными коэффициентами, что нельзя сделать с помощью, например, метода Вимана — Валирона.

Пусть $f(z)$, $z \in D = \{z : 0 \leqslant R \leqslant |z| < \infty\}$,— мероморфное решение уравнения

$$\sum_{j=0}^{t} f'^{j} \sum_{k=0}^{\varkappa_j} a_{kj}(z) f^k = 0, \quad \max(k + j) = n, \tag{3}$$

$$a_{kj}(z) = (b_{kj} + o(1))\, z^{\alpha_{kj}}, \quad z \in D, \quad z \to \infty, \tag{4}$$

a_{kj} — голоморфные функции, $\alpha_{kj} \in \mathbb{N}$, $b_{kj} = \text{const}$. Обозначим

$$\nu = \max \alpha_{kt}, \quad 0 \leqslant k \leqslant \varkappa_t,$$

$$p_0 = \max(\alpha_{kj} - \nu)/(t - j), \quad 0 \leqslant j \leqslant t - 1, \quad 0 \leqslant k \leqslant \varkappa_j. \tag{5}$$

Подставляя (4) в (3), после преобразования получаем

$$\sum_{k+j=n} (b_{kj} + o(1))\, z^{\alpha_{kj} - j} [zf'(z)/f(z)]^j =$$

$$= -\sum_{\mu=0}^{n-1} \sum_{k+j=\mu} (b_{kj} + o(1))\, z^{\alpha_{kj}} [f'(z)/f(z)]^j / f^{n-\mu}(z). \tag{6}$$

Пусть

$$\alpha_{kj} - j = \lambda_j, \quad b_{kj} = b_j, \quad zf'(z)/f(z) = L(z), \quad (k + j = n). \tag{7}$$

Подставляя (7) в левую часть (6), строим характеристическое уравнение $\sum\limits_{k+j=n} b_j z^{\lambda_j} L^j = 0$, или

$$\sum_{j=0}^{m} b_j z^{\lambda_j - \lambda_m} L^j = 0, \quad m = \max j, \quad k + j = n. \tag{8}$$

Уравнение (8) имеет конечное число решений вида [6, с. 69]

$$L(z) = (1 + o(1))\, \beta_s z^{\rho_s}, \quad 1 \leqslant s \leqslant q \leqslant m, \quad z \to \infty, \tag{9}$$

числа ρ_s, β_s можно найти с помощью ломаной Ньютона. Положим

$$p = \max(p_0, \rho_s - 1), \quad \beta = \max|\beta_s|, \quad 1 \leqslant s \leqslant q, \tag{10}$$

$$\varkappa = \max[\beta, \alpha_{kj} - \alpha_{n-m,m} + m + (4p + 4) j], \quad k + j < n. \tag{11}$$

Известно [2]: если $p_0 + 1 \geqslant 0$, то мероморфное решение f имеет конечный порядок $\rho \leqslant 2p_0 + 2$; если $p_0 + 1 < 0$, то $T(r, f) = O(\ln r)$, $r \to \infty$ и f ведет себя подобно рациональной функции. Далее всюду предполагаем, что $p_0 + 1 \geqslant 0$. Выберем такое $r_0 > \max[R, 2]$, что $f(z) \neq 0, \infty$; $|z| = r_0$. Пусть $\{c_j\}$ — множество всех нулей и полюсов f. Из каждой точки $c_j \neq 0$, как из центра, проведем окружность радиуса $\delta_j = |c_j|^{-\rho-(\varepsilon_1/2)}$, $\varepsilon_1 > 0$, ρ—

порядок f. Проведем окружность $\{z:|z|=r_0\}$. Пусть E_* — множество точек, лежащих внутри всех этих окружностей. Тогда [6, с. 87] ($K=\mathrm{const}$)

$$\sum |c_j|^{-\rho-(\varepsilon_1/2)}<K, \quad |f'(z)/f(z)|<K|z|^{2\rho+\varepsilon_1}, \quad z\overline{\in} E_*. \tag{12}$$

Для каждого c_j построим интервал $[|c_j|-\delta_j; |c_j|+\delta|]$, рассмотрим еще интервал $[0, r_0]$. Пусть Δ — множество точек, принадлежащих всем этим интервалам, $\operatorname{mes}\Delta<\infty$ (см. (12)).

Теорема 1. *Для любого мероморфного решения f уравнения* (3) *либо*

$$\underline{\lim}\ln M(r, f)/\ln r\leqslant \varkappa, \quad r\to\infty, \tag{13}$$

либо

$$\ln M(r, f)=(1+o(1))|\sigma|\rho^{-1}r^\rho, \quad r\overline{\in}\Delta, \quad r\to\infty, \tag{14}$$

$\operatorname{mes}\Delta<d$, *где ρ равно одному из чисел $\rho_1,\ldots,\rho_q$, а σ — одному из чисел $\beta_1,\ldots,\beta_q$.*

Теорема 2. *Пусть $f(z)$, $z\in D$ — мероморфное решение* (3). *Если* (8) *не содержит переменную L или переменная z входит только с неположительными степенями, то* ($c=\mathrm{const}$)

$$|f(z)<c|z|^{\varkappa+\varepsilon}, \quad z\overline{\in}E_*, \quad |z|>r_1, \quad \varepsilon>0, \tag{15}$$

в противном случае

$$|f(z)|<\exp(c|z|^{\sigma_0}), \quad \sigma_0=\max\rho_s>0, \quad z\overline{\in}E_*. \tag{16}$$

Теорема 3. *Пусть $f(z)$, $z\in\{z:\ \mu\leqslant\arg z\leqslant\delta\}$ — мероморфное решение* (3). *Существует m_0, $m_0\geqslant 0$ лучей $\{z:\ \arg z=\varphi_j\}$, $0\leqslant j\leqslant m_0$, на которых $\ln|f(re^{i\varphi_j})|=o(r^\rho)$, $r\to\infty$, $r\overline{\in}\Delta$. Для всех $\varphi\neq\varphi_j$, $\mu<\varphi<\delta$ либо $|f(re^{i\varphi})|<r^{c+\varepsilon}$, $\varphi=\mathrm{const}$, $r\geqslant r(\varphi)$, $r\overline{\in}\Delta$, $\varepsilon>0$, либо $\ln|f(re^{i\varphi})|=(\tau\rho^{-1}+o(1))r^\rho\cos(\rho\varphi+\alpha)$, $r\geqslant r(\varphi)$, $r\to\infty$; τ, ρ, α равны соответственно одному из чисел τ_s, ρ_s, α_s, ($\beta_s=\tau_s\exp(i\alpha_s)$), $c=\mathrm{const}$.*

Доказательство теоремы 2. Положим

$$G=\{z:\ |f'(z)/f(z)|>K|z|^{4p+4+\varepsilon_1}\}. \tag{17}$$

Так как $\rho\leqslant 2p+2$, то с учетом (12) имеем

$$|f'(z)/f(z)|<K|z|^{4p+4+\varepsilon_1}, \quad z\overline{\in}E_*. \tag{18}$$

Поскольку функции $|f'(z)/f(z)|$ и $K|z|^{4p+4+\varepsilon_1}$ непрерывны, из (17) следует, что G — открытое множество, и если g — граница G, то

$$|f'(z)/f(z)|=K|z|^{4p+4+\varepsilon_1} \quad \forall z\in g. \tag{19}$$

Пусть $E_0=G\cup\{z:\ |z|<r_0\}$. Учитывая (17) — (19), получаем

$$|f'(z)/f(z)|\leqslant K|z|^{4p+4+\varepsilon_1}, \quad z\overline{\in}E_0, \quad E_0\subset E_*. \tag{20}$$

Рассмотрим множества (см. (11)) ($\varepsilon=n\varepsilon_1>0$)

$$E_1=\{z:|f(z)|>|z|^{\varkappa+\varepsilon}\}\setminus E_0, \quad E_2=\mathbb{C}\setminus(E_1\cup E_0). \tag{21}$$

Из (6), (11), (20), (21) следует

$$\sum_{k+j=n}(b_{kj}+o(1))z^{\alpha_{kj}-j-\alpha_{n-m,m}+m}(zf'(z)/f(z))^j=o(1), \tag{22}$$

$z\to\infty$, $z\in E_1$. Используя (7), (8) ($z\to\infty$), находим

$$\sum_{j=0}^{m}(b_j+o(1))z^{\lambda_j-\lambda_m}L^j=o(1), \quad z\in E_1. \tag{23}$$

Предположим, что левая часть (23), (8) не зависит от L. Тогда в (3) только одно слагаемое $a_{n0}(z)f^n$ имеет по f' и f степень n. Для некоторого r_1 множество $E_1\cap\{z:|z|>r_1\}=\varnothing$, в противном случае аналогично (23)

$(b_{n0}+o(1))=o(1)$, $z\in E_1$, $z\to\infty$, т. е. $b_{n0}=0$; получили противоречие. Поэтому с учетом (21), если $z\overline{\in} E_0$, $|z|>r_1$, то $z\in E_2$, и в рассматриваемом случае (15) доказано. Если (23) зависит от L, то уравнение (23) имеет конечное число решений [6, с. 69]

$$L(z)=(1+o(1))\beta_s z^{\rho_s},\quad z\in E_1,\quad \rho_s,\ \beta_s=\mathrm{const},\tag{24}$$

$$|L(z)|<(1+\tau)|\beta_s z^{\rho_s}|,\quad \tau=\min(1/2,\ \varepsilon/|\beta_s|),\quad z\in E_1,\tag{25}$$

$|z|>r'>r_0$. Покажем, что если $z\in g$, $|z|>r'$, то $z\in E_2$ и (см. (21))

$$|f(z)|\leqslant|z|^{\varkappa+\varepsilon},\quad z\in g,\quad |z|>r'.\tag{26}$$

Действительно, если бы $z\in E_1$, то из (7), (10), (25) следовало бы $|f'(z)/f(z)|<2\beta|z|^{\rho_s-1}<K|z|^{4\rho+4+\varepsilon_1}$, что противоречит (19). Через γ_1 обозначим кривую, которая получается при движении от точки z, $z\overline{\in} E_*$, к началу координат по прямой с обходом областей из E_* по дугам окружностей $\{z:|z-c_j|=|c_j|^{-\rho-(\varepsilon_1/2)}\}$. Из (12) следует, что для всех z

$$\text{дл. }\gamma_1<c_1r,\quad r=|z|>r',\quad c_1=\mathrm{const}.\tag{27}$$

Обозначим через γ_0 часть γ_1 от точки z до окружности $\{z:|z|=r'\}$; z — начальная точка γ_0, z^* — конечная; $\gamma_0\subset\mathbb{C}\setminus E_*$;

$$|f(z^*)|\leqslant c=\mathrm{const},\quad z^*\in\{z:|z|=r'\}\setminus E_*.\tag{28}$$

Из (21) следует, что если $z\in E_2$, то (15), (16) выполняются. Пусть $z\in E_1$. Если $\gamma_0\not\subset E_1$, то при движении от z, $z\in E_1$, к z^* по кривой γ_0 найдется первая точка z_0 такая, что

$$|f(z_0)|=|z_0|^{\varkappa+\varepsilon}\leqslant r^{\varkappa+\varepsilon},\quad |z|=r.\tag{29}$$

Если $\gamma_0\not\subset E_1$, то через γ обозначим часть кривой γ_0 от точки z до z_0; если $\gamma_0\subset E_1$, то $\gamma=\gamma_0$. Из (7), (25), (10), (11) следует ($\sigma_0=\max\rho_s$)

$$|f'(t)/f(t)|<(\beta+\varepsilon)|t|^{\sigma_0-1}\leqslant(\varkappa+\varepsilon)|t|^{\sigma_0-1},\quad t\in\gamma.\tag{30}$$

Предположим, что в (8), (23) хотя бы одна из разностей $\lambda_j-\lambda_m>0$. Тогда [6] среди решений уравнения (23) есть решения вида (24) с показателями $\rho_s>0$, поэтому $\max\rho_s=\sigma_0>0$. Пусть $\sigma_0\geqslant1$ (случай $0<\sigma_0<1$ рассматривается аналогично (34)). Если $\gamma_0\not\subset E_1$, то с учетом (27), (30) имеем

$$\ln|f(z)/f(z_0)|\leqslant\Big|\int\limits_\gamma f'(t)/f(t)\,dt\Big|<(\varkappa+\varepsilon)\,r^{\sigma_0-1}c_1r=c_2r^{\sigma_0},\tag{31}$$

$c_2=\mathrm{const}$; если же $\gamma=\gamma_0\subset E_1$, то

$$\ln|f(z)/f(z^*)|\leqslant\Big|\int\limits_\gamma f'(t)/f(t)\,dt\Big|\leqslant c_2r^{\sigma_0}.\tag{32}$$

Из (28) — (32) следует (16). Пусть в (8), (23) все разности $\lambda_j-\lambda_m\leqslant0$. Тогда [6] для всех решений (24) $\rho_s\leqslant0$, $\sigma_0=\max\rho_s\leqslant0$. Из (30) следует

$$|f'(t)/f(t)|\leqslant(\varkappa+\varepsilon)|t|^{-1},\quad t\in\gamma\subset E_1,\quad r'\leqslant|t|\leqslant r.\tag{33}$$

Кривая γ состоит из отрезков прямой (обозначим их через ω) и дуг окружностей (обозначим их через Ω). Согласно (12) общая длина Ω меньше $2\pi K$, поэтому, если $\gamma_0\not\subset E_1$, то с учетом (33) ($c_3=\mathrm{const}$) получаем

$$\begin{aligned}\ln|f(z)/f(z_0)|\leqslant\Big|\int\limits_\gamma f'(t)/f(t)\,dt\Big|=\Big|\int\limits_\omega+\int\limits_\Omega\Big|\leqslant(\varkappa+\varepsilon)\int\limits_{|z_0|}^{r}dx/x\,+\\+2\pi K(\varkappa+\varepsilon)/r'=(\varkappa+\varepsilon)\ln(r/|z_0|)+c_3.\end{aligned}\tag{34}$$

Но $\ln|f(z_0)|=(\varkappa+\varepsilon)\ln|z_0|$ (см. (29)), поэтому из (34) следует $\ln|f(z)|<(\varkappa+\varepsilon)\ln r+\mathrm{const}$, и неравенство (15) доказано. Если $\gamma=\gamma_0\subset E_1$, неравенство (15) доказывается аналогично. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Если (13) не выполняется, то выполняется неравенство (2). Из (2), (15) следует, что уравнение (8), (23) зависит от L. Тогда

$$|f(z)| < c, \quad z \in \{z : |z| \leqslant r'\} \setminus E_0, \quad c = \text{const}. \tag{35}$$

Существует $r_1 \overline{\in} \Delta$, $\operatorname{mes} \Delta < d$, что (см. (2))

$$M(r, f) \geqslant r^{\varkappa+2\varepsilon}, \quad r \geqslant r_1 > r', \quad \varepsilon > 0, \tag{36}$$

$$r^{\varkappa} > c, \quad r \geqslant r_1, \tag{37}$$

$$r^{\varkappa+2\varepsilon} > (r + 2d)^{\varkappa+(3\varepsilon/2)}, \quad r \geqslant r_1. \tag{38}$$

Обозначим

$$D(r) = \{z : |z| \leqslant r\} \setminus E_0. \tag{39}$$

Пусть $\max |f(z)|$, $z \in D(r)$, достигается в точке η:

$$|f(\eta)| = \max |f(z)| = M_*(r, f), \quad z \in D(r), \quad r \geqslant r_1. \tag{40}$$

Лемма. Если $f(z)$, $z \in D = \{z : 0 \leqslant R \leqslant |z|\}$, *— мероморфное решение* (3) *такое, что выполняется* (2), *то*

$$\eta \in \{z : |z| = r\} \setminus \overline{G}, \quad \eta \in E_1, \tag{41}$$

где η *определено в* (40), $\overline{G} = G \cup g$.

Доказательство леммы. Существует такое r_2, что ($\operatorname{mes} \Delta < d$)

$$d \leqslant r_2 - r_1 \leqslant 2d, \quad r_1, \ r_2 \overline{\in} \Delta, \quad r_1 > r'. \tag{42}$$

На замкнутом множестве $D(r)$ максимум $|f|$ достигается на границе. Из (35)—(37), (40) следует

$$|\eta| > r', \quad \eta \in g \cup (\{z : |z| = r\} \setminus E_0). \tag{43}$$

Учитывая (38), (39), (40), (36) получаем ($r_1 \overline{\in} \Delta$)

$$M_*(r_1, f) \geqslant M(r_1, f) \geqslant r_1^{\varkappa+2\varepsilon} > (r_1 + 2d)^{\varkappa+(3\varepsilon/2)} \geqslant r_2^{\varkappa+(3\varepsilon/2)}. \tag{44}$$

Функция $M_*(r, f)$ неубывающая. С учетом (44) ($r_1 \leqslant r \leqslant r_2$) имеем

$$|f(\eta)| = M_*(r, f) \geqslant M_*(r_1, f) \geqslant r_2^{\varkappa+(3\varepsilon/2)} \geqslant r^{\varkappa+(3\varepsilon/2)}. \tag{45}$$

Согласно (26) $|f(z)| \leqslant |z|^{\varkappa+\varepsilon}$, $z \in g$, $|z| \geqslant r'$. Поэтому из (43), (45) следует, что

$$\eta \overline{\in} g, \quad \eta \in \{z : |z| = r\} \setminus \overline{G}, \quad r_1 \leqslant r \leqslant r_2. \tag{46}$$

Учитывая (46), (21), (40), (45), получаем $\eta \in E_1$, $|\eta| = r$, $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, т. е. для $r \in [r_1, r_2]$ выполняется (41). Так как $r_2 \overline{\in} \Delta$ и для r_2 справедливы соотношения (36) — (38), то аналогично предыдущему можно найти такое r_3, $2d \geqslant r_3 - r_2 \geqslant d$, $r_3 \overline{\in} \Delta$, что для всех $r \in [r_2, r_3]$ выполняется (41), и т. д. Лемма доказана.

Из леммы следует, что в области $D(r)$, $r \geqslant r_1$, максимум $|f(z)|$ достигается на окружности $\{z : |z| = r\}$, точка максимума $\eta \overline{\in} \overline{G}$. Поэтому из определения $M(r, f)$, (39) — (41) следует

$$M_*(r, f) \equiv M(r, f), \quad r \overline{\in} \Delta, \quad \operatorname{mes} \Delta < d. \tag{47}$$

В точке максимума η справедлива формула Макинтайра [6, с. 61]

$$\eta f'(\eta)/f(\eta) = rM_*'(r, f)/M_*(r, f) = K(r), \tag{48}$$

$|\eta| = r$; $K(r)$ — производная справа от $\ln M_*(r, f)$ по $\ln r$. Из (48), (40), (41), (24) следует

$$K(r) = (1 + o(1)) \beta_s \eta^{\rho_s}, \quad |\eta| = r, \quad r \to \infty. \tag{49}$$

Функция $\ln M_*(r, f)$ выпуклая относительно $\ln r$, поэтому $\ln M_*(r, f) - \ln M_*(r_1, f) \leqslant K(r)(\ln r - \ln r_1)$, $r > r_1$. Следовательно, $\ln M_*(r, f)/\ln r <$

$< K(r)(1+o(1))$, $r\to\infty$, или с учетом (47), (36) $K(r) > (\varkappa + o(1))$; $r \to \infty$. Из этого неравенства и из (11) следует, что в (49) $\rho_s > 0$. Поэтому, учитывая (49) (см. [6, с. 69]), получаем

$$\lim K(r)/r^{\rho_s} = |\beta_s| = \sigma_s\rho_s, \quad r\to\infty, \quad \lim \ln M_*(r, f)/r^{\rho_s} = \sigma_s, \quad r\to\infty. \quad (50)$$

Из (50), (47) следует (14). Соотношения (50) выполняются без исключительных множеств (ср. с [6, с. 69]). Из определения $m(r, f)$ и (16) следует, что для произвольного мероморфного решения уравнения (3) справедливо неравенство $m(r, f) < cr^{\sigma_0}$, $r \bar{\in} \Delta$, $\sigma_0 = \max \rho_s$, $c = \text{const}$.

Замечание. Эллиптическая функция Вейерштрасса $\gamma(z)$ является решением уравнения $(w')^2 = 4w^3 - g_1 w - g_2$; $g_1, g_2 = \text{const}$ [7, с. 362]. Для этой трансцендентной мероморфной функции выполняется соотношение (13).

Доказательство теоремы 3 аналогично предыдущему.

1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М. : Наука, 1970.— 592 с.
2. *Гольдберг А. А.* Об однозначных интегралах дифференциальных уравнений первого порядка // Укр. мат. журн.— 1956.— **8**, № 3.— С. 254—261.
3. *Гольдберг А. А., Мохонько А. З.* О скорости роста решений алгебраических дифференциальных уравнений в угловых областях // Дифференц. уравнения.— 1975.— **11**, № 9.— С. 1568—1574.
4. *Мохонько В. Д.* Об алгеброидных решениях дифференциальных уравнений с алгеброидными коэффициентами // Там же.— 1984.— **20**, № 3.— С. 417—425.
5. *Валирон Ж.* Аналитические функции.— М. : Физматгиз, 1957.— 235 с.
6. *Стрелиц Ш. И.* Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений.— Вильнюс : Минтис, 1972.— 467 с.
7. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций: В 2-х т.— М. : Наука, 1968.— Т. 2.— 624 с.

Львов. политехн. ин-т

Получено 29.04.85,
после доработки — 23.10.85