УДК 517.946

П. И. Дудников, С. Н. Самборский

Граничные задачи для систем с rot в главной части

1. В настоящей работе рассматриваются граничные задачи для систем вида

$$Lu = \{L_i u = \operatorname{rot} u_i + \varphi_i(x)\, u = f_i \mid i = 1, \ldots, n\} = f, \tag{1}$$

$$Bu\big|_\Gamma = \{B_i(u_1, \ldots, u_n)\big|_\Gamma = g_i \mid i = 1, \ldots, m\} = g, \tag{2}$$

где $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $u_i(x) = \{u_{ij}(x_1, x_2, x_3) \mid j = 1, 2, 3\} \in R^3$, $f = \{f_i\}$ — векторные поля в области $\Omega \subset R^3$ с гладкой границей Γ, $\varphi_i(x)$ — линейные при каждом x операторы из R^{3n} в R^3, B_j — дифференциальные операторы, содержащие дифференцирования лишь по касательным к Γ направлениям. Системы такого вида встречаются в разных разделах математической физики. Таковы, например, система уравнений Максвелла для квазистационарного электромагнитного поля в однородной изотропной среде ($n = 2$, $\varphi_1(x)\, u = ku_2$, $\varphi_2(x)\, u = -ku_1$, иные младшие члены φ_i появляются в более общего вида средах, при движении источников электромагнитного поля и в других случаях), система уравнений кристаллооптики и др.

Системы вида (1) относятся к изучавшимся ранее системам с постоянным дефектом [1] (или с тождественным вырождением), при некоторых младших членах — к равномерно неэллиптическим [2] или слабо эллиптическим [3]. Однако во многих случаях их изучение методами работ [1—3] не является достаточно полным, анализ зависимости разрешимости от свойств младших членов φ_i требует исследования формальных свойств и тем самым выхода в более широкий класс переопределенных систем. Например, для системы (1) при $n = 1$, $\varphi_1 u_1 = u_1$ имеются нетеровы задачи (в пространстве C^∞ гладких вектор-функций [2, 3] при $\varphi_1 \equiv 0$ ядро оператора L бесконечномерно при любом B, а коядро может быть конечномерным (в пространстве правых частей, удовлетворяющих локальным условиям совместности, такова задача Дирихле), а при $\varphi_1 u_1 = b \times u_1$ с $\operatorname{rot} b \neq 0$ постоянство дефекта системы (1) мало что значит, при некоторых b для этого оператора естественными являются не граничные, а начально-граничные задачи (соответствующая эквивалентная переопределенная система оказывается гиперболической). Такое разнообразие возможностей соответствует разнообразию формальных свойств оператора L в зависимости от членов нулевого порядка. В данной работе для системы (1), (2) изучаются нетеровы (т. е. имеющие конечномерные ядро и коядро) задачи.

2. В системе (1), представляя каждый из операторов $R^3 \to R^3$ суммой симметричной и кососимметричной частей, получаем

$$L_i u = \operatorname{rot} u_i + \Sigma_j A_{ij}(x)\, u_j + \Sigma_j b_{ij}(x) \times u_j = f_i, \tag{3}$$

где $A_{ij}(x)$ — симметричные (3×3)-матрицы.

Условие 1. Размерность подпространства в $(R^3 \otimes R^3)^n$, образованного векторами $r_i(x) = (A_{i1}(x), \ldots, A_{in}(x))$, $i = 1, \ldots, n$, не зависит от $x \in \Omega$.

Для простоты рассмотрим оператор L локально и в достаточно малой окрестности $U \subset \Omega$ выберем из векторов $r_i(x) \in (R^3 \otimes R^3)^n$ максимальную систему линейно независимых при каждом $x \in \Omega$ векторов. Пусть это будут векторы $r_1(x), \ldots, r_k(x)$, выразим через них векторы $r_{k+1}(x), \ldots, r_n(x)$. Подходящая линейная замена функций u_i приводит систему (1) к виду

$$Lu = \begin{cases} L'u = \{\operatorname{rot} u_i + \Sigma_j A'_{ij} u_j + \Sigma_j b'_{ij} \times u_j = f_i \mid i = 1, \ldots, k\} = f', \\ L''u = \{\operatorname{rot} u_i + \Sigma_j b'_{ij} \times u_j = f_i \mid i = k+1, \ldots, n\} = f'' \end{cases} \tag{4}$$

(для новых функций сохранены прежние обозначения, граничный оператор B из (2) будем считать действующим на эти новые функции).

Применяя к строкам из (4) оператор div, затем выражая из (4) rot u_j, получаем переопределенную систему

$$\operatorname{rot} u_i + \sum_{j=1}^{n} A'_{ij} u_j + \sum_{j=1}^{n} b'_{ij} \times u_j = f_i, \qquad i = 1, \dots, k,$$

$$\operatorname{rot} u_i + \sum_{j=1}^{n} b'_{ij} \times u_j = f_i, \quad i = k+1, \dots, n,$$

$$\operatorname{div} \sum_{j=1}^{n} A'_{ij} u_j + C_i(x) u = \operatorname{div} f_i + \sum_{j=1}^{n} (b'_{ij}, f_j), \quad i = 1, \dots, k, \tag{5}$$

$$C_i(x) u = \operatorname{div} f_i + \sum_{j=1}^{n} (b'_{ij}, f_j), \quad i = k+1, \dots, n,$$

где $C_i(x)$ — линейные операторы нулевого порядка, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в R^3.

Следующее условие на оператор $C(x) = (C_{k+1}(x), \dots, C_n(x))$ выражает определенность оператора L (т. е. отсутствие дифференциальных условий совместности на f для разрешимости уравнения $Lu = f$).

Условие 2. Отображение $C(x): R^{3n} \to R^{n-k}$ при каждом x имеет максимальный ранг.

Для каждой точки $x \in \Omega$ и вектора $\xi \in R^3$ определим матрицу $L(x, \xi) = \{l_{ij}(x, \xi)\}$ формулой

$$l_{ij}(x, \xi) = \begin{cases} (\xi, A'_{ij}(x)\xi), & i = 1, \dots, k; \\ \left(\operatorname{rot} b'_{ij} + \sum\limits_{s=1}^{n} b'_{is} \times b'_{sj} + \sum\limits_{s=1}^{k} A'_{sj} b'_{is}, \xi\right), & i = k+1, \dots, n. \end{cases}$$

Следующее условие выражает эллиптичность оператора (5).

Условие 3. Полином $l(x, \xi) = \det L(x, \xi)$ отличен от нуля при каждых $x \in \Omega$ и $\xi \in R^3$, $\xi \neq 0$.

Припишем каждой строке матрицы $B = \{B_{ij}(x, \partial/\partial x)\}$ порядок β_j, равный максимальному порядку ее элементов, отбросим в ней члены порядка, меньшего чем β_j, и полученную матрицу обозначим через $B^0(x, \partial/\partial x)$. Пусть $\xi = (\lambda, \eta)$, где η — кокасательный к Γ в точке $x \in \Gamma$ вектор, а λ — вектор конормали к Γ. Представим $l(x, \lambda, \eta)$ в виде $l^+(x, \lambda, \eta) \times l^-(x, \lambda, \eta)$, где корни λ_i полиномов l^+ и l^- удовлетворяют неравенствам $\operatorname{Im} \lambda_k > 0$ и $\operatorname{Im} \lambda_k < 0$ соответственно.

Условие 4 (коэрцитивность). Порядок полинома $l(x, \lambda, \eta)$ равен $2m$ и строки матрицы $B^0(x, \eta)$ линейно независимы по модулю полинома $l^+(x, \lambda, \eta)$.

Теорема 1. *Если оператор (L, B) удовлетворяет условиям 1—4, то он нетеров в пространствах C^∞ вектор-функций.*

Замечание 1. Теорема 1 справедлива и в гильбертовых пространствах функций, если рассматривать оператор (L, B) действующим из соболевского пространства H^s функций на Ω в произведение $\mathcal{H} \times \oplus_i H^{s-\beta_i-1/2}$, где β_i — порядок i-й строки матрицы B, $\mathcal{H} = \mathcal{H}^s \oplus \mathcal{H}^{s-1}$ (норма в $\mathcal{H}^i$ получается пополнением в H^i множества гладких функций на Ω по норме графика оператора div $\oplus$ Id [5] (Id — тождественное отображение)).

Доказательство теоремы 1. Для простоты обозначений предположим, что система (1) имеет вид (3) всюду в Ω (а не только в U) и определим в каждой точке $x \in \Omega$ $H(x) = \bigcap\limits_{j=k+1}^{n} \operatorname{Ker} C_j(x)$. Пусть $C^\infty(\Omega, H) = \{u \in C^\infty(\Omega, R^{3n}) \mid u(x) \in H(x),\ x \in \Omega\}$ (здесь и дальше $C^\infty(A, B)$ обозначает множество гладких (C^∞)-функций на A со значениями в B). Граничная задача (1), (2) нетерова тогда и только тогда, когда конечномерны когомологии комплекса

$$0 \to C^\infty(\Omega, H) \xrightarrow{(\tilde{L}, B)} C^\infty(\Omega, R^{3n+k}) \times C^\infty(\Gamma, R^m) \xrightarrow{L_1} C^\infty(\Omega, R^n), \tag{6}$$

где операторы $\tilde{L}$ и L_1 определяются следующим образом:

$$\tilde{L}u = \begin{cases} \operatorname{rot} u_i + \sum\limits_{j=1}^n A'_{ij}u_j + \sum\limits_{j=1}^n b'_{ij} \times u_j = f_i, & i = 1, \ldots, k; \\ \operatorname{rot} u_i + \sum\limits_{j=1}^n b'_{ij} \times u_j = f_i, & i = k+1, \ldots, n; \\ \operatorname{div} \sum\limits_{j=1}^n A'_{ij}u_j + C_i(x)\, u = h_i, & i = 1, \ldots, k, \end{cases}$$

$$L_1(f, h) = \begin{cases} \operatorname{div} f_i + \sum\limits_{j=1}^n (b'_{ij}, f_j) - h_i, & i = 1, \ldots, k; \\ \operatorname{div} f_i + \sum\limits_{j=1}^n (b'_{ij}, f_j), & i = k+1, \ldots, n. \end{cases}$$

Можно проверить, что при выполнении условий 1, 2 $\tilde{L}$ — формально интегрируемый инволютивный оператор с эпиморфным символом $(\xi, u) \to \sigma_\xi(x, \tilde{L})\, u$ [4]. Из условий 3, 4 следует, что оператор $\tilde{L}$ эллиптический, а граничная задача $(\tilde{L}, B)\, u = (f, h, g)$ удовлетворяет условию коэрцитивности из [6]. Применяя теорему 2 из [6], получаем конечномерность когомологий комплекса (6), и, возвращаясь к оператору (L, B), — его нетеровость. Теорема доказана.

При рассматриваемых предположениях оператор B имеет вид $B'\gamma$, где γ — оператор сужения функций с Ω на Γ, B' — дифференциальный оператор на Γ.

Определим оператор $\tilde{L}^\tau$ (касательная часть оператора $\tilde{L}$ из (5) [6]) локально правилом

$$(\tilde{L}^\tau \tilde{u})(x) = \begin{cases} \operatorname{rot}_\Gamma \tilde{u}_i + (\Sigma_j A'_{ij}\tilde{u}_j + \Sigma_j b'_{ij} \times \tilde{u}_j)_n, & i = 1, \ldots, k \\ \operatorname{rot}_\Gamma \tilde{u}_i + (\Sigma_j b'_{ij} \times \tilde{u}_j)_n, & i = k+1, \ldots, n, \end{cases}$$

где $\operatorname{rot}_\Gamma$ — двумерный ротор на Γ, в остальных членах индекс n обозначает нормальную к Γ компоненту векторного поля в точке x (этот оператор, как и $\tilde{L}$, легко определить и глобально [5]). Пусть P — некоторый линейный дифференциальный оператор на Γ. Рассмотрим следующий дифференциальный оператор на Γ: $\Theta = (\tilde{L}^\tau, B', P(\tilde{L}^\tau, B'))$ и пусть $\sigma_\eta(x, \Theta)$ — его главный символ в точке $x \in \Gamma$ на кокасательном к Γ векторе η.

Условие 5. Оператор Θ формально интегрируем и имеет постоянный дефект (т. е. $\dim \operatorname{Ker} \sigma_\eta(x, \Theta)$ не зависит от x и $\eta \neq 0$).

Положим в дальнейшем $B = (B', P(L^\tau, B'))$. Обозначим для дифференциального или граничного оператора α через $\alpha^0(x, \eta)$ ($x \in \Gamma$, η — кокасательный к Γ вектор) обыкновенный дифференциальный или граничный оператор на полуоси, получаемый из α в локальной системе координат (x_1, x_2, x_3), в которой $\Gamma = \{x | x_3 = 0\}$, заменой $-i\partial/\partial x_j$ на η_j при $j = 1, 2$, фиксацией коэффициентов в точке x и отбрасыванием членов порядка меньшего, чем порядок оператора α. Пусть $\mathfrak{M}^+$ — множество функций на полуоси, стремящихся к нулю на бесконечности.

Условие 6 (коэрцитивности). При каждых $x \in \Gamma$, $\eta \neq 0$ отображение $(\widetilde{L}^0(x, \eta),\ B^0(x, \eta))$ мономорфно на $\mathfrak{M}^+$ и $B^0(x, \eta)(\operatorname{Ker}(\widetilde{L}^\tau)^0(x, \eta)) = B^0(x, \eta)((\operatorname{Ker}\widetilde{L}^0(x, \eta) \cap \mathfrak{M}^+|_{x_3=0})$.

Условие 7. Граничная задача (L, B) является определенной, т. е. не существует дифференциально-граничного оператора Φ (композиции дифференцирований в Ω или Γ и сужений на Γ), отличного от нулевого и такого, что $\Phi \circ (L, B) = 0$.

Условие 7 можно проверить, например, построением оператора совместности Φ для (L, B) по схеме работы [6] в конечное число шагов. Этот оператор должен быть нулевым.

Теорема 2. *Пусть оператор (L, B) удовлетворяет условиям 1—3, 7 и существует дифференциальный оператор P (на Γ) такой, что выполняются условия 5 и 6. Тогда оператор (L, B) нетеров в пространствах C^∞ вектор-функций на Ω и Γ соответственно.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1, если воспользоваться теоремой 2 из [7].

Замечание 2. Теорема 2 справедлива и в гильбертовых пространствах функций, если рассматривать оператор (L, B) действующим из H^s (на Ω) в произведение $\mathcal{H} \times \mathcal{G}$, где $\mathcal{H}$ то же, что и в замечании 1, а норма в пространстве $\mathcal{G}$ функций на Γ получается пополнением в $\bigoplus_i H^{s-b_i-1/2}$ множества гладких функций по норме графика оператора P_1, где P_1 определен из равенства $P(\widetilde{L}^\tau, B') = P_1 B' + P_2 \widetilde{L}^\tau$, b — порядок i-й строки оператора B.

1. *Солонников В. А.* О краевых задачах для систем с постоянным дефектом // Дифференциальные уравнения с частными производными : Тр. семинара академика С. Л. Соболева.— 1976.— № 2.— С. 109—128.
2. *Вайнберг Б. Р., Грушин В. В.* О равномерно неэллиптических задачах // Мат. сб.— 1967.— 72, № 4.— С. 602—636.
3. *Сакс Р. С.* Нормально разрешимые и нетеровы краевые задачи для некоторых систем уравнений математической физики // Применение функционального анализа к уравнениям с частными производными: Тр. семинара академика С. Л. Соболева. — 1983. — № 2.— С. 129—158.
4. *Спенсер Д.* Переопределенные системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Математика.— 1970. —**14**, № 2.— С. 66—90.
5. *Самборский С. Н.* О краевых задачах для переопределенных систем уравнений с частными производными // Докл. АН СССР.— 1982.— **262**, № 4.— С. 810—814.
6. *Самборский С. Н.* Коэрцитивные граничные задачи для переопределенных систем. Эллиптические задачи // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 3.— С. 340—346.
7. *Самборский С. Н., Фельдман М. А.* Об условии коэрцитивности для переопределенных граничных задач // Там же.— 1985.— 37, № 5.— С. 616—622.

Киев. политехн. ин-т

Получено 22.11.84,
после доработки — 05.08.85