УДК 517.535.4

Н. Н. Строчик

Асимптотические оценки некоторых интегральных средних для мероморфных функций

Будем предполагать известными основные понятия и стандартные обозначения неванлинновской теории [1].

Для мероморфных в $\mathbb{C}$ функций f будут получены точные оценки сверху для нижнего предела при $r \to \infty$ (точные оценки снизу для верхнего предела) отношения

$$\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} \ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta/T(r, f).$$

Всюду далее $p \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}$. Введем следующие обозначения (зависимость от δ не отмечаем, за исключением доказательства следствия, где эта зависимость будет использоваться):

$$c(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leqslant x < \pi, \\ -1, & x \geqslant \pi, \end{cases} \quad s(x, p) = \frac{\sin px}{\sin p\pi}, \quad \nu_1(p) = \operatorname{sign} s(\pi - \delta, p),$$

$$\nu_2(p) = \operatorname{sign} s(\delta, p),$$

$$A_1(p) = \begin{cases} 1 - s(\pi - \delta, p), & \nu_1(p) \leqslant 0, \\ 1 - s(\pi - \delta, p)\, c(p\delta), & \nu_1(p) > 0, \end{cases}$$

$$A_2(p) = \begin{cases} s(\delta, p), & \nu_2(p) > 0, \\ s(\delta, p)\, c(p(\pi - \delta)), & \nu_2(p) \leqslant 0, \end{cases} \quad A(p) = \max\{A_1(p), A_2(p)\},$$

$$B_1(p) = \begin{cases} 1 - s(\pi - \delta, p), & \nu_1(p) > 0, \\ 1 - s(\pi - \delta, p)\, c(p\delta), & \nu_1(p) \leqslant 0, \end{cases}$$

$$B_2(p) = \begin{cases} s(\delta, p)\, c(p(\pi - \delta)), & \nu_2(p) > 0, \\ s(\delta, p), & \nu_2(p) \leqslant 0, \end{cases} \quad B(p) = \min\{B_1(p), B_2(p)\},$$

$$u_p = \begin{cases} 1 - \delta(0, f), & A(p) \geqslant 0, \\ 1 - \Delta(0, f), & A(p) < 0, \end{cases} \quad v_p = \begin{cases} 1 - \delta(\infty, f), & B(p) < 0, \\ 1 - \Delta(\infty, f), & B(p) \geqslant 0. \end{cases}$$

Следуя [2], определим ($T(r) = T(r, f)$)

$$\rho_* = \rho_*[f] = \sup\left\{p : \limsup_{x, A \to \infty} \frac{T(Ax)}{A^p T(x)} = \infty\right\},$$

$$\lambda_* = \lambda_*[f] = \inf\left\{p : \liminf_{x, A \to \infty} \frac{T(Ax)}{A^p T(x)} = 0\right\}.$$

Известно [2], что порядок ρ и нижний порядок λ функции f удовлетворяют неравенству $\lambda_* \leqslant \lambda \leqslant \rho \leqslant \rho_*$. Обозначим через K, K_1, K_2 и M постоянные, возможно, различные в разных местах, и зависящие от p.

Теорема. *Пусть f — мероморфная функция, $\lambda_* < \infty$, $\lambda_* \leqslant p \leqslant \rho_*$, $p \notin \mathbb{Z}$, $0 < \delta \leqslant \pi$. Тогда*

$$\varliminf_{r \to \infty} \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} \ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta/T(r, f) \leqslant \inf\{(\pi/\delta)(A(p)\,u_p - B(p)\,v_p) : \lambda_* \leqslant p \leqslant \rho_*,$$
$$p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\}. \qquad (1)$$

Замечание 1. Если $\rho_* < \infty$, то inf в формулировке теоремы можно заменить на min.

Замечание 2. Для $\lambda_* = \rho_* = p \notin Z$ неравенство (1) переходит в равенство для функций с нулями на луче $\{z : \arg z = \alpha(p)\}$ и полюсами на луче $\{z : \arg z = \beta(p)\}$, где $\alpha(p)$ и $\beta(p)$ определяются следующим образом:

$$\alpha_1(p) = \begin{cases} 0, & \nu_1(p) \leqslant 0, \\ \max\{-\delta, -\pi/p\}, & \nu_1(p) > 0, \end{cases} \qquad \alpha_2(p) = \begin{cases} \pi, & \nu_2(p) > 0, \\ \max\{\delta, \pi - \pi/p\}, & \nu_2(p) \leqslant 0, \end{cases}$$

$$\alpha(p) = \alpha_j(p), \text{ если } A(p) = A_j(p), \quad j = 1, 2,$$

$$\beta_1(p) = \begin{cases} 0, & \nu_1(p) > 0, \\ \max\{-\delta, -\pi/p\}, & \nu_1(p) \leqslant 0, \end{cases} \qquad \beta_2(p) = \begin{cases} \pi, & \nu_2(p) \leqslant 0, \\ \max\{\delta, \pi - \pi/p\}, & \nu_2(p) > 0, \end{cases}$$

$\beta(p) = \beta_j(p)$, если $B(p) = B_j(p)$, $j = 1, 2$, причем существуют конечные пределы $n(r, 0, f)\, r^{-p}$, $n(r, \infty, f)\, r^{-p}$ при $r \to \infty$ и хотя бы один из них $\neq 0$.

Формулы для определения величин $A(p)$ и $B(p)$ из (1) и $\alpha(p)$, $\beta(p)$ из замечания 2 несколько громоздки, но вполне эффективны. Приведем в качестве примера значения этих величин для $0 < p < 1$ и $1 < p < 2$. Для $0 < p < 1$ и $0 < \delta \leqslant \pi$ имеем $A(p) = s(\delta, p)$, $B(p) = 1 - s(\pi - \delta, p)$, $\alpha(p) = \pi$, $\beta(p) = 0$. Для $1 < p < 2$ имеем $A(p) = -s(\delta, p)$, $B(p) = s(\delta, p)$, $\alpha(p) = \pi - \pi/p$, $\beta(p) = \pi$ при $0 < \delta < \pi - \pi/p$; $A(p) = 1 - s(\pi - \delta, p)$, $B(p) = s(\delta, p)$, $\alpha(p) = 0$, $\beta(p) = \pi$ при $\pi - \pi/p \leqslant \delta \leqslant \pi/p$; $A(p) = 1 - s(\pi - \delta, p)$, $B(p) = 1 + s(\pi - \delta, p)$, $\alpha(p) = 0$, $\beta(p) = -\pi/p$ при $\pi/p < \delta \leqslant \pi$.

Замечание 3. Оценку снизу для величины

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \ln|f(re^{i\theta})|\, d\theta / T(r, f)$$

получим, применив теорему к функции $1/f$.

Следствие. *В условиях теоремы*

$$\varlimsup_{\delta\to 0} \varliminf_{r\to\infty} \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \ln|f(re^{i\theta})|\, d\theta / T(r, f) \leqslant \inf\{\Omega(p) : \lambda_* \leqslant p \leqslant \rho_*,\ p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\}, \quad (2)$$

где

$$\Omega(p) = \begin{cases} \dfrac{p\pi}{|\sin p\pi|}\{2 - (\delta(0, f) + \delta(\infty, f))\}, & p > 1, \\[2ex] \dfrac{p\pi}{\sin p\pi}(1 - \delta(0, f)) - p\pi \operatorname{ctg} p\pi\,(1 - \delta(\infty, f)), & 1/2 < p < 1, \\[2ex] \dfrac{p\pi}{\sin p\pi}(1 - \delta(0, f)) - p\pi \operatorname{ctg} p\pi\,(1 - \Delta(\infty, f)), & 0 < p < 1/2. \end{cases}$$

Доказательство следствия. Из (1) следует, что левая часть (2) не превышает

$$\varlimsup_{\delta\to 0} \inf\left\{\frac{\pi}{\delta}(A(p, \delta)\, u_p(\delta) - B(p, \delta)\, v_p(\delta) : \lambda_* \leqslant p \leqslant \rho_*, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \inf\left\{\lim_{\delta\to 0} \frac{\pi}{\delta}(A(p, \delta)\, u_p(\delta) - B(p, \delta)\, v_p(\delta)) : \lambda_* \leqslant p \leqslant \rho_*,\ p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\right\}.$$

Используя определения величин $A(p, \delta)$, $B(p, \delta)$, нетрудно показать, что последний предел равен $\Omega(p)$.

Левая часть (1), очевидно, не превышает величину $\varliminf_{r\to\infty} \ln M(r, f) / T(r, f)$, которая $\leqslant \pi\lambda_*$ при $\lambda_* \geqslant 1/2$ и $\leqslant \pi\lambda_* \operatorname{cosec}(\pi\lambda_*)$ при $0 \leqslant \lambda_* \leqslant 1/2$ [3, с. 52]. В [3] неравенство содержит λ вместо λ_*, но переход к λ_* получается автоматически. Оценка (1) точнее, так как она учитывает величины дефектов в 0 и ∞. Экстремальные функции для обеих оценок тоже существенно разные, например, при $1/2 < \lambda_* = \rho_* = p < 1$ наша оценка в случае целой функции достигается для целой функции с нулями на отрицательном луче, а для экстремальной функции в приведенной выше оценке Пэйли — Н. В. Говорова нули приближаются к двум лучам.

Доказательство теоремы. При $\delta = \pi$ (1) следует из формулы Иенсена, если последнюю разделить на $T(r, f)$ и перейти к нижнему пределу, поэтому далее считаем, что $0 < \delta < \pi$.

Известно [4], что для каждого $R > R_0$ существует $t \in]R, 2R[$ такое, что выполняется

$$\int\limits_0^{2\pi} t \left| \frac{f'}{f}(te^{i\theta}) \right| d\theta < KT(2t). \tag{3}$$

Пусть $R' > 2R$ и $s \in]R', 2R'[$ такое, что выполняется (3) с s вместо t. Пусть $c_k = |c_k| e^{i\gamma_k}$, $\{c_k\}$ — последовательность, составленная из нулей a_ν и полюсов b_μ функции f, $\delta_k = 1$, если $c_k \in \{a_\nu\}$, $\delta_k = -1$, если $c_k \in \{b_\mu\}$.

В [5] ((2.9), (2.10)) для произвольной мероморфной функции f с нулями $\{a_\nu\}$ и полюсами $\{b_\mu\}$ для произвольного $p \in \mathbb{R}_+ \diagdown \mathbb{Z}$ (в дальнейшем это ограничение на p не оговариваем) получено соотношение

$$\frac{p \sin p\pi}{\pi} \int\limits_t^s r^{-p-1} \ln |f(r)| \, dr = \sum_{t<|c_k|<s} \delta_k |c_k|^{-p} \cos p(\gamma_k - \pi) + E, \tag{4}$$

где $0 \leqslant \gamma_k < 2\pi$, t и s $(t < s)$ такие, что выполняется (3), E — величина, удовлетворяющая оценке

$$|E| < K(T(2t)\, t^{-p} + T(2s)\, s^{-p}) + o\left(\int\limits_t^s r^{-p-1} T(r)\, dr\right)$$

при $t \to \infty$.

Если $f(z)$ заменить на $f(ze^{i\theta})$, $0 < \theta < \pi$, то (4) примет вид

$$\frac{p \sin p\pi}{\pi} \int\limits_t^s r^{-p-1} \ln |f(re^{i\theta})| \, dr = \sum_{\theta \leqslant \gamma_k < 2\pi} \delta_k |c_k|^{-p} \cos p(\gamma_k - \theta - \pi) +$$

$$+ \sum_{0 \leqslant \gamma_k < \theta} \delta_k |c_k|^{-p} \cos p(\gamma_k - \theta + \pi) + E, \tag{5}$$

а при $-\pi < \theta < 0$, обозначив $\gamma'_k = \gamma_k - 2\pi$, получим

$$\frac{p \sin p\pi}{\pi} \int\limits_t^s r^{-p-1} \ln |f(re^{i\theta})| \, dr = \sum_{-2\pi \leqslant \gamma'_k < \theta} \delta_k |c_k|^{-p} \cos p(\gamma'_k - \theta + \pi) +$$

$$+ \sum_{\theta \leqslant \gamma'_k < 0} \delta_k |c_k|^{-p} \cos p(\gamma'_k - \theta - \pi) + E. \tag{6}$$

Здесь и ниже учитываются лишь те c_k, для которых $t < |c_k| < s$.

Интегрируя обе части (5) по $\theta \in [0, \delta]$, имеем

$$\frac{p \sin p\pi}{\pi} \int\limits_t^s r^{-p-1} \int\limits_0^\delta \ln |f(re^{i\theta})| \, d\theta dr = \sum_{\delta \leqslant \gamma_k < 2\pi} \delta_k |c_k|^{-p} \int\limits_0^\delta \cos p(\gamma_k - \theta - \pi) \, d\theta +$$

$$+ \sum_{0 \leqslant \gamma_k < \delta} \delta_k |c_k|^{-p} \left\{ \int\limits_0^{\gamma_k} \cos p(\gamma_k - \theta - \pi) \, d\theta + \int\limits_{\gamma_k}^\delta \cos p(\gamma_k - \theta + \pi) \, d\theta \right\} + E =$$

$$= \frac{1}{p} \Big\{ \sum_{\delta \leqslant \gamma_k < 2\pi} \delta_k |c_k|^{-p} \{\sin p(\pi - \delta - \gamma_k) - \sin p(\pi - \gamma_k)\} +$$

$$+ \sum_{0 \leqslant \gamma_k < \delta} \delta_k |c_k|^{-p} \{2 \sin p\pi - \sin p(\pi - \gamma_k) + \sin p(\delta - \pi - \gamma_k)\} \Big\} + E.$$

Интегрируя (6) по $\theta \in [-\delta, 0]$, $0 < \delta < \pi$, находим

$$\frac{p \sin p\pi}{\pi} \int\limits_t^s r^{-p-1} \int\limits_{-\delta}^0 \ln |f(re^{i\theta})| \, d\theta dr =$$

$$= \frac{1}{p}\Big\{ \sum_{0\leqslant\gamma_k<2\pi-\delta} \delta_k\,|\,c_k\,|^{-p}\,\{\sin p\,(\pi-\gamma_k)-\sin p\,(\pi-\delta-\gamma_k)\} +$$

$$+\sum_{2\pi-\delta\leqslant\gamma_k<2\pi} \delta_k\,|\,c_k\,|^{-p}\,\{2\sin p\pi-\sin p\,(3\pi-\delta-\gamma_k)+\sin p\,(\pi-\gamma_k)\}\Big\}+E.$$

Складывая оба полученных равенства, имеем

$$I_\delta(f) \overset{\text{def}}{=} \frac{p^2\sin p\pi}{\pi}\int_t^s r^{-p-1}\int_{-\delta}^{\delta}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta dr = \sum_{0\leqslant\gamma_k<\delta}\delta_k\,|c_k|^{-p}\,\{2\sin p\pi +$$

$$+2\sin p\,(\delta-\pi)\cos p\gamma_k\} + \sum_{\delta\leqslant\gamma_k<2\pi-\delta}\delta_k\,|\,c_k\,|^{-p}\,2\sin p\delta\cos p\,(\pi-\gamma_k)+$$

$$+\sum_{2\pi-\delta\leqslant\gamma_k<2\pi}\delta_k\,|\,c_k\,|^{-p}\,\{2\sin p\pi+2\sin p\,(\delta-\pi)\cos p\,(2\pi-\gamma_k)\}+E.$$

Заменим условие $0\leqslant\gamma_k<2\pi$ условием $-\delta\leqslant\gamma_k<2\pi-\delta$. Тогда

$$\frac{1}{2}I_\delta(f) = \sum_{-\delta\leqslant\gamma_k<\delta}\delta_k\,|\,c_k\,|^{-p}\,\{\sin p\pi-\sin p\,(\pi-\delta)\cos p\gamma_k\}+$$

$$+\sum_{\delta\leqslant\gamma_k<2\pi-\delta}\delta_k\,|\,c_k\,|^{-p}\sin p\delta\cos\,p\,(\pi-\gamma_k)+E.$$

Разделив последнее равенство на $\sin p\pi$, с учетом принятых обозначений получим

$$\frac{I_\delta(f)}{2\sin p\pi}\leqslant A(p)\sum_{t<|a_\nu|<s}|\,a_\nu\,|^{-p}-B(p)\sum_{t<|b_\mu|<s}|\,b_\mu\,|^{-p}+E. \tag{7}$$

Использовав неравенство $n(r)\ln 2<N(2r)$, найдем

$$\sum_{t<|a_\nu|<s}|\,a_\nu\,|^{-p} = n(s,0)\,s^{-p}-n(t,0)\,t^{-p}+p\,(N(s,0)\,s^{-p}-N(t,0)\,t^{-p}+$$

$$+p\int_t^s N(r,0)\,r^{-p-1}dr\Big) = p^2\int_t^s N(r,0)\,r^{-p-1}dr+O\,(N(2s,0)\,s^{-p}+$$

$$+O\,(N(2t,0)\,t^{-p}) = p^2\int_t^s N(r,0)\,r^{-p-1}\,dr+E$$

и аналогичное равенство для $\sum_{t<|b_\mu|<s}|\,b_\mu\,|^{-p}$. Теперь (7) можно представить в виде

$$\frac{I_\delta(f)}{2p^2\sin p\pi}\leqslant\int_t^s r^{-p-1}\,\{A(p)\,N(r,0)-B(p)\,N(r,\infty)\}\,dr+E. \tag{8}$$

Покажем, что для произвольного $\varepsilon>0$ существуют t и s такие, что $|\,E\,|<$ $<K\varepsilon\int_t^s r^{-p-1}T(r,f)\,dr$.

Воспользуемся теоремой о существовании пиков Пойа порядка p [2], применив ее к функции $T(r)$.

Теорема А. *Пусть* $\lambda_*\leqslant p\leqslant\rho_*$. *Тогда существуют последовательности* $\{a_n\}$, $a_n\to\infty$, $\{\delta_n\}$, $\delta_n\to 0$, $\{t_n\}$, $t_n\to\infty$, *такие, что* $T(r)\geqslant T(t_n)\times$ $\times(r/t)^p(1-\delta_n)$ *при* $a_n^{-1}t_n\leqslant r\leqslant a_nt_n$.

Пусть $2\tau_k\in\{t_n\}$ и $2\sigma_k\in\{t_n\}$ (τ_k, $\sigma_k\to\infty$ при $k\to\infty$). Как и при доказательстве леммы 1.9.2 [3, с. 40] устанавливаем, что существуют последовательности $\{d_k\}$, $d_k \to \infty$, и $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k \to 0$, при $k \to \infty$ такие, что при $\sigma_k > d_k \tau_k$

$$T(2\tau_k)\,\tau_k^{-p} + T(2\sigma_k)\,\sigma_k^{-p} < K\varepsilon_k \int\limits_{\tau_k}^{\sigma_k} r^{-p-1} T(r)\,dr.$$

Далее вместо τ_k, σ_k и ε_k будем писать τ, σ и ε_1 соответственно ($\varepsilon_1 \to 0$ при $\tau \to \infty$).

Пусть $\tau/4 < t < \tau < \sigma/4 < s < \sigma$ и для t и s выполняется (3). Тогда $T(2t)\,t^{-p} < T(2\tau)\,\tau^{-p}4^p$, $T(2s)\,s^{-p} < T(2\sigma)\,\sigma^{-p}4^p$. Далее

$$\int\limits_t^{\tau} r^{-p-1} T(r)\,dr < T(\tau)\,\tau^{-p}(4^p - 1)/p = K_1 T(2\tau)\,\tau^{-p},$$

$$\int\limits_s^{\sigma} r^{-p-1} T(r)\,dr < T(\sigma)\,\sigma^{-p}(4^p - 1)/p = K_1 T(2\sigma)\,\sigma^{-p}.$$

Поэтому

$$\left|\left(\int\limits_{\tau}^{\sigma} - \int\limits_t^{s}\right) T(r)\,r^{-p-1}\,dr\right| = \left|\left(\int\limits_{s}^{\sigma} - \int\limits_t^{\tau}\right) T(r)\,r^{-p-1}\,dr\right| < K_1\,(T(2\tau)\,\tau^{-p} +$$

$$+ T(2\sigma)\,\sigma^{-p}) < K_1 K \varepsilon_1 \int\limits_{\tau}^{\sigma} T(r)\,r^{-p-1}\,dr,$$

откуда

$$\left|\left(\int\limits_{\tau}^{\sigma} - \int\limits_t^{s}\right) T(r)\,r^{-p-1}\,dr\right| < M\varepsilon \int\limits_t^{s} T(r)\,r^{-p-1}\,dr.$$

Из (8) получаем

$$\int\limits_t^{s} r^{-p-1}\left\{\frac{1}{2\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta - \frac{\pi}{\delta}\{A(p)\,N(r, 0) - B(p)\,N(r, \infty) + \right.$$

$$\left. + M\varepsilon T(r)\}\right\} dr \leqslant 0$$

для некоторых сколь угодно больших t и s. Тогда

$$\frac{1}{2\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta \leqslant \frac{\pi}{\delta}\{A(p)\,N(r, 0) - B(p)\,N(r, \infty) + M\varepsilon T(r)\} \qquad (9)$$

на некоторой последовательности $r = r_n$, $r_n \to \infty$. Разделив обе части (9) на $T(r_n)$ и перейдя к пределу при $n \to \infty$, получим (1).

Замечание 1 следует из того, что функция $A(p)\,u_p - B(p)\,v_p$ непрерывна на $\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}$ и стремится к $M(p_0, \delta) < \infty$ при $p \to p_0 = kn$ и $\delta = \pi m/n$ ($m, n, k \in \mathbb{N}$) и к $+\infty$ при $p \to p_0 \in \mathbb{Z}_+$ для всех остальных δ. Замечание 2 получим, проследив за всеми выкладками при доказательстве.

1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М. : Наука, 1970.— 592 с.
2. *Drasin D., Shea D. F.* Pòlya peaks and the oscillation of positive functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1972.— **34**, N 2.— P. 403—411.
3. *Петренко В. П.* Рост мероморфных функций.— Харьков : Вища шк., 1978.— 136 с.
4. *Fuchs W. H. J.* A theorem on the Nevanlinna deficiences of meromorphic functions of finite order // Ann. Math.— 1958.— 68.— P. 203—209.
5. *Fuchs W. H. J.* On the growth of meromorphic functions on rays // Stud. Pure Math. Mem. Paul Turàn.— Budapest, 1983.— P. 219—229.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики
АН УССР, Львов

Получено 03.04.85,
после доработки — 01.07.85