УДК 517.9

Д. Г. Кореневский

Матричные алгебраические критерий и достаточные условия асимптотической устойчивости и ограниченности с вероятностью 1 решений системы линейных стационарных интегро-дифференциальных стохастических уравнений Ито

1. Введение. В данной статье показано, что алгебраические коэффициентные критерий и достаточные условия асимптотической устойчивости и ограниченности с вероятностью 1 решений линейных обыкновенных дифференциальных стохастических уравнений Ито (полученные ранее в [1], а также в [2—4]) можно приспособить или модифицировать для систем линейных стационарных стохастических интегро-дифференциальных уравнений вида

$$dx^{\varepsilon}(t) = \left[Ax^{\varepsilon}(t) + \tilde{A}\int_{t_0}^{t} x^{\varepsilon}(\tau)\,d\tau\right]dt + \left[B(\varepsilon)\,x^{\varepsilon}(t) + \tilde{B}(\varepsilon)\int_{t_0}^{t} x^{\varepsilon}(\tau)\,d\tau\right]d\omega(t), \tag{1}$$

$0 \leqslant t_0 \leqslant t$, $\omega(t)$ — винеровский процесс, $x^{\varepsilon}(t_0) = x_0$. Осуществляется это путем предварительного расширения (погружения) исходного n-мерного пространства фазовых переменных x^{ε} в $2n$-мерное пространство фазовых переменных x^{ε}, $\int_{t_0}^{t} x^{\varepsilon}(\tau)\,d\tau$.

В итоге посредством аппарата стохастической функции Ляпунова (СФЛ) получены новые, эффективно проверяемые матричные алгебраические критерий и достаточные условия асимптотической устойчивости с вероятностью 1 решений упомянутой системы интегро-дифференциальных уравнений со случайными параметрическими возмущениями.

Предполагается, что при отсутствии параметрических возмущений ($\varepsilon = 0$) невозмущенная, детерминированная система интегро-дифференциальных уравнений асимптотически устойчива по Ляпунову. Условия устойчивости сформулированы либо в терминах отрицательной определенности некоторых матричных выражений, в которые входят матрицы коэффициентов A, $\tilde{A}$ невозмущенной системы и матрицы параметрических случайных возмущений B, $\tilde{B}$ (достаточные условия, в ряде случаев близкие к необходимым), либо в терминах существования положительно определенного решения H матричного алгебраического уравнения Сильвестра

$$\begin{bmatrix} A & \tilde{A} \\ E_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix}^{\text{т}} H + H \begin{bmatrix} A & \tilde{A} \\ E_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & \tilde{B} \\ O_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix}^{\text{т}} H \begin{bmatrix} B & \tilde{B} \\ O_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix} =$$
$$= -G\,(G = G^{\text{т}} > O_{2n\times 2n})$$

(необходимые и достаточные условия), где $E_{n\times n}$ и $O_{n\times n}$ — соответственно единичная и нулевая матрицы размера $n \times n$.

Используется СФЛ в виде квадратичной формы фазовых переменных, матрица H которой согласована с невозмущенной системой. Рассмотрены варианты скалярного и векторного винеровских процессов. Из общего класса матриц параметрических возмущений B отдельно выделяется, как более простой (в смысле алгебраических условий), случай невырожденных матриц B, $\tilde{B}$.

Установлены также матричные условия ограниченности (пребывания на эллипсоидах и сферах и внутри их) решений с вероятностью 1.

Матричные критерий и достаточные условия делают проводимые вычисления простыми, получаемые количественные соотношения наглядными и легко интерпретируемыми на языке входных коэффициентов, а окончательные результаты позволяют представить в виде явных расчетных формул, адекватных математическому обеспечению современных ЭВМ и, таким образом, подготовленных для использования в качестве алгоритмов стандартных программ.

Стохастические интегро-дифференциальные уравнения вида (1) при надлежащих предположениях можно использовать как математическую модель динамики некоторых механических, электромеханических и других систем при наличии последействия и воздействии случайных параметрических возмущений. Примерами таких систем с последействием являются: объекты с полостями, частично заполненными вязкой жидкостью (интегральный член связан с учетом вязкости; см., например, [5, с. 87—91]); упругие летательные или другие аппараты, совершающие движение в сплошной среде (интегральный член связан с учетом эффектов нестационарности аэродинамических и аэроупругих сил, проявляющихся в их зависимости от всей предыстории движения и деформации аппарата; см., например, [6, гл. 3, § 2; 7, с. 25—27; 8]); электромагниты — элементы подвески скоростного наземного транспорта при выраженном скинэффекте в материале сердечника и ферромагнитном рельсе (см., например, [9, § 1.5]); задача о распространений электронного пучка в ионизируемой им среде (см., например, [10]).

2. П о с т а н о в к а з а д а ч и. Итак, рассмотрим детерминированную (невозмущенную) систему интегро-дифференциальных уравнений

$$dx(t) = \left[Ax(t) + \tilde{A}\int_{t_0}^{t} x(\tau)\,d\tau\right]dt, \quad x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

и рождающую из (2) путем ее возмущения с помощью случайных добавок (параметрических возмущений) $B(\varepsilon)\,x(t)\,dw(t)$, $\left(\tilde{B}(\varepsilon)\int_{t_0}^{t} x(\tau)\,d\tau\right)dw(t)$ систему (1), называемую далее «возмущенной» по отношению к системе (2).

Здесь приняты обозначения: $x = \{x_1, \ldots, x_n\}^{\text{т}}$, $x^{\varepsilon} = \{x_1^{\varepsilon}, \ldots, x_n^{\varepsilon}\}^{\text{т}}$ — n-мерные вектор-столбцы фазовых переменных невозмущенной и возмущенной систем соответственно; A, $\tilde{A}$, $B(\varepsilon)$, $\tilde{B}(\varepsilon)$ — постоянные матрицы размера $n \times n$; ε — параметр; матрицы $B(\varepsilon)$, $\tilde{B}(\varepsilon)$ аналитически зависят от ε, так что $B(0) = \tilde{B}(0) = 0$; $w(t)$ — скалярный стандартный винеровский процесс. При $\varepsilon = 0$ система (1) вырождается в систему (2).

О п р е д е л е н и е 1. *Тривиальное решение* ($x^{\varepsilon} = 0$) *системы уравнений* (1) *называется устойчивым по Ляпунову с вероятностью* 1, *если для произвольно заданных чисел* $\rho, \varepsilon_1 > 0$ *найдется такое число* $\delta(\rho, \varepsilon_1) > 0$, *что* *из неравенства* $\| x_0 \| < \delta$ *для вероятности* $\mathbf{P}$ *события* $\{\gamma\}$,

$$\{\gamma\} = \{\sup_{t_0 \leqslant t} \| x^\varepsilon (t) \| > \rho \mid x^\varepsilon (t_0) = x_0\},$$

следует оценка $\mathbf{P}\{\gamma\} < \varepsilon_1$.

Определение 2. *Тривиальное решение системы уравнений* (1) *называется асимптотически устойчивым по Ляпунову с вероятностью* 1, *если оно устойчиво в смысле определения* 1 *и если, кроме того, для вероятности* $\mathbf{P}$ *события* $\{\gamma_1\}$,

$$\{\gamma_1\} = \{\lim_{T\to\infty} \sup_{t_0 \leqslant T+t} \| x^\varepsilon (t) \| = 0 \mid x^\varepsilon (t_0) = x_0, \| x_0 \| < \delta\},$$

имеет место оценка $\mathbf{P}\{\gamma_1\} = 1$.

Предположим, что невозмущенная (детерминированная) система (2) асимптотически устойчива по Ляпунову, т. е. блочная матрица

$$\begin{bmatrix} A & \tilde{A} \\ E_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix} \tag{3}$$

имеет корни с отрицательной вещественной частью.

К матрице (3) приходим посредством редукции n-мерной системы интегро-дифференциальных уравнений (2) к $2n$-мерной системе дифференциальных уравнений, вводя вектор-столбец y дополнительных фазовых переменных $y_1, \ldots, y_n$ согласно равенствам

$$y_1 = \int_{t_0}^{t} x_1 (\tau)\, d\tau, \ \ldots, \ y_n = \int_{t_0}^{t} x_n (\tau)\, d\tau. \tag{4}$$

Тогда система (2) приводится к эквивалентному дифференциальному виду

$$d \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \tilde{A} \\ E_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} dt, \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = 0, \tag{5}$$

откуда следует (3).

Ставится задача определения алгебраических условий, налагаемых на матрицы $A, \tilde{A}, B, \tilde{B}$, при выполнении которых нулевое решение системы (1) обладает свойством асимптотической устойчивости и ограниченности с вероятностью 1.

Устойчивость детерминированных интегро-дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова изучалась в ряде работ (см., например, [11—14]). Общие теоремы об устойчивости с вероятностью 1 решений стохастических дифференциальных уравнений Ито содержатся в [15] (теорема 4.3; 16), а также в ряде других работ.

3. Основной результат. 3.1. Редукция возмущенной интегро-дифференциальной системы к дифференциальной системе расширенной размерности. Вводя вектор-столбец y^ε дополнительных переменных $y_1^\varepsilon, \ldots, y_n^\varepsilon$ с помощью равенств

$$y_1^\varepsilon = \int_{t_0}^{t} x_1^\varepsilon (\tau)\, d\tau, \ldots, y_n^\varepsilon = \int_{t_0}^{t} x_n^\varepsilon (\tau)\, d\tau, \tag{6}$$

n-мерную систему стохастических интегро-дифференциальных уравнений (1) можно свести к $2n$-мерной системе стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$\begin{gathered} d \begin{bmatrix} x^\varepsilon(t) \\ y^\varepsilon(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \tilde{A} \\ E_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^\varepsilon(t) \\ y^\varepsilon(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} B & \tilde{B} \\ O_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^\varepsilon(t) \\ y^\varepsilon(t) \end{bmatrix} dw(t), \\ x^\varepsilon (t_0) = x_0, \quad y^\varepsilon (t_0) = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

3.2. Основные теоремы устойчивости. Так как система (7) эквивалентна исходной интегро-дифференциальной системе (1), то в силу этого все теоремы работы [1] немедленно переносятся на системы интегро-дифференциальных уравнений с сохранением формулировок и доказательств, так что имеем следующие утверждения.

Теорема 1 (критерий). *Для устойчивой блочной матрицы* (3) *необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости с вероятностью* 1 *решений системы* (1) *является существование положительно определенного решения* H *следующего матричного алгебраического уравнения:*

$$\begin{bmatrix} A & \tilde{A} \\ E_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix}^{\tau} H + H \begin{bmatrix} A & \tilde{A} \\ E_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & \tilde{B} \\ O_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix}^{\tau} H \begin{bmatrix} B & \tilde{B} \\ O_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix} = -G, \tag{8}$$

где G — *произвольно выбранная, симметричная, положительно определенная матрица соответствующего размера (в частности, она может быть выбрана равной единичной матрице,* $G = E_{2n\times 2n}$).

Доказательство теоремы 1 осуществляется по аналогии с [1] с помощью СФЛ вида квадратичной формы

$$V(x^{\varepsilon}, y^{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} x^{\varepsilon} \\ y^{\varepsilon} \end{bmatrix}^{\tau} H \begin{bmatrix} x^{\varepsilon} \\ y^{\varepsilon} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Отметим, что для устойчивой блочной матрицы (3) при некоторых дополнительных ограничениях на малость и структуру возмущающих матриц $B(\varepsilon)$, $\tilde{B}(\varepsilon)$ решение $H > O_{2n\times 2n}$ уравнения (8) всегда существует и единственно.

Следствие 1 (достаточное условие). *Для устойчивой блочной матрицы* (3) *и невырожденных (полного ранга) матриц возмущений* B, $\tilde{B}$ *достаточным условием асимптотической устойчивости с вероятностью* 1 *решений системы* (1) *является отрицательная определенность матрицы* $H_{00} - E_{2n\times 2n}$, *где матрица* H_{00} — *решение следующего матричного уравнения Ляпунова:*

$$\begin{bmatrix} A & \tilde{A} \\ E_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix}^{\tau} H_{00} + H_{00} \begin{bmatrix} A & \tilde{A} \\ E_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} B^{\tau}B & B^{\tau}\tilde{B} \\ \tilde{B}^{\tau}B & \tilde{B}^{\tau}\tilde{B} \end{bmatrix} \tag{10}$$

При доказательстве используется СФЛ вида квадратичной формы

$$V(x^{\varepsilon}, y^{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} x^{\varepsilon} \\ y^{\varepsilon} \end{bmatrix}^{\tau} H_{00} \begin{bmatrix} x^{\varepsilon} \\ y^{\varepsilon} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Следствие 2 (достаточное условие). *Для устойчивой блочной матрицы* (3) *и невырожденных (полного ранга) матриц возмущений* B, $\tilde{B}$ *достаточным условием асимптотической устойчивости с вероятностью* 1 *решений системы* (1) *является выполнение для следа матрицы* H_{00} *следующего неравенства:* $\operatorname{tr} H_{00} < 1$.

Следствие 3 (достаточное условие). *Для устойчивой блочной матрицы* (3) *решения системы* (1) *асимптотически устойчивы с вероятностью* 1, *если матрица*

$$\begin{bmatrix} A & \tilde{A} \\ E_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix}^{\tau} H_0 + H_0 \begin{bmatrix} A & \tilde{A} \\ E_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & \tilde{B} \\ O_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix}^{\tau} H_0 \begin{bmatrix} B & \tilde{B} \\ O_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix} \tag{12}$$

отрицательно определенная, где H_0 — *решение уравнения Ляпунова для невозмущенной системы*

$$\begin{bmatrix} A & \tilde{A} \\ E_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix}^{\tau} H_0 + H_0 \begin{bmatrix} A & \tilde{A} \\ E_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix} = -G. \tag{13}$$

При доказательстве теоремы используется СФЛ вида квадратичной формы

$$V_0(x^\varepsilon, y^\varepsilon) = \begin{bmatrix} x^\varepsilon \\ y^\varepsilon \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} H_0 \begin{bmatrix} x^\varepsilon \\ y^\varepsilon \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Условие устойчивости, доставляемое следствием 3, в ряде случаев близко к необходимому и достаточному условию асимптотической устойчивости с вероятностью 1, содержащемуся в теореме 1.

3.3. Алгебраические условия ограниченности и пребывания на эллипсоидах решений с вероятностью 1. Рассмотрим многообразие

$$\Phi = \left\{ x^\varepsilon, y^\varepsilon : (x^\varepsilon, y^\varepsilon) \in \mathbb{R}^{2n}, \begin{bmatrix} x^\varepsilon \\ y^\varepsilon \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} Q \begin{bmatrix} x^\varepsilon \\ y^\varepsilon \end{bmatrix} = c \right\}, \tag{15}$$

где Q — произвольно выбранная, размера $2n \times 2n$, симметричная, положительно определенная матрица; c — некоторая константа.

Если $Q = H_0$ или $Q = H$, то уравнение (15) представляет собой поверхности уровня функций Ляпунова V_0 и V соответственно. При $c > 0$ многообразие Φ и поверхности уровня являются эллипсоидами (в частном случае — сферами).

Представляет интерес вопрос, при каких условиях решения уравнения (1) с вероятностью 1 описывают движения на многообразии, определяемом уравнением (15) при $c > 0$, т. е. движения на эллипсоидах? Ответ на этот вопрос означает одновременно и ответ на вопрос об ограниченности с вероятностью 1 решений системы (1).

Рассматривая математическое ожидание полной производной по времени от квадратичной формы

$$\begin{bmatrix} x^\varepsilon \\ y^\varepsilon \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} Q \begin{bmatrix} x^\varepsilon \\ y^\varepsilon \end{bmatrix}$$

на решениях системы (7), приходим к следующему выводу.

Теорема 2. *Решения $x^\varepsilon(t)$ системы* (1) *с устойчивой блочной матрицей* (3) *с вероятностью* 1 *принадлежат эллипсоиду* (15) *или находятся внутри его тогда и только тогда, когда выполнены матричные соотношения*

$$\begin{gathered}\begin{bmatrix} A & \tilde{A} \\ E_{n\times n} & \mathrm{O}_{n\times n} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} Q + Q \begin{bmatrix} A & \tilde{A} \\ E_{n\times n} & \mathrm{O}_{n\times n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & \tilde{B} \\ \mathrm{O}_{n\times n} & \mathrm{O}_{n\times n} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} Q \begin{bmatrix} B & \tilde{B} \\ \mathrm{O}_{n\times n} & \mathrm{O}_{n\times n} \end{bmatrix} \leqslant \\ \leqslant \mathrm{O}_{2n\times 2n}, \\ \begin{bmatrix} B & \tilde{B} \\ \mathrm{O}_{n\times n} & \mathrm{O}_{n\times n} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} Q + Q \begin{bmatrix} B & \tilde{B} \\ \mathrm{O}_{n\times n} & \mathrm{O}_{n\times n} \end{bmatrix} = \mathrm{O}_{2n\times 2n}\end{gathered} \tag{16}$$

и $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} Q \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \leqslant c$, *причем знак равенства в первом соотношении* (16) *соответствует случаю пребывания решений на эллипсоиде.*

3.4. Аналог для векторного винеровского процесса. Если система (2) возмущена векторным стандартным винеровским процессом $w(t) = \{w_1(t), \ldots, w_r(t)\}^{\mathrm{T}}$ с независимыми компонентами, так что вместо уравнения (1) имеем уравнение

$$dx^\varepsilon(t) = \left[Ax^\varepsilon(t) + \tilde{A}\int_{t_0}^{t} x^\varepsilon(\tau)\, d\tau \right] dt + \sum_{k=1}^{r} \left[B_k(\varepsilon)\, x^\varepsilon(t) + \tilde{B}_k(\varepsilon) \int_{t_0}^{t} x^\varepsilon(\tau)\, d\tau \right] dw_k(t),$$

$$x^\varepsilon(t_0) = x_0, \tag{17}$$

то применительно к системе (17) надлежит: условие существования положительно определенного решения матричного уравнения (8) в теореме 1 заменить условием существования положительно определенного решения H матричного уравнения

$$\begin{bmatrix} A & \tilde{A} \\ E_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} H + H \begin{bmatrix} A & \tilde{A} \\ E_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{r} \begin{bmatrix} B_k & \tilde{B}_k \\ O_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} H \begin{bmatrix} B_k & \tilde{B}_k \\ O_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix} = -G; \tag{18}$$

уравнение Ляпунова (10) в следствиях 1 и 2 — следующим уравнением Ляпунова

$$\begin{bmatrix} A & \tilde{A} \\ E_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} H_{00} + H_{00} \begin{bmatrix} A & \tilde{A} \\ E_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix} = -\sum_{k=1}^{r} \begin{bmatrix} B_k^{\mathrm{T}} B_k & B_k^{\mathrm{T}} \tilde{B}_k \\ \tilde{B}_k^{\mathrm{T}} B_k & \tilde{B}_k^{\mathrm{T}} \tilde{B}_k \end{bmatrix}; \tag{19}$$

условие (12) в следствии 3 — условием отрицательной определенности матричного соотношения

$$\begin{bmatrix} A & \tilde{A} \\ E_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} H_0 + H_0 \begin{bmatrix} A & \tilde{A} \\ E_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{r} \begin{bmatrix} B_k & \tilde{B}_k \\ O_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} H_0 \begin{bmatrix} B_k & \tilde{B}_k \\ O_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Аналогично вносятся изменения и в теорему 2. Для устойчивой блочной матрицы (3) и при некоторых дополнительных ограничениях на матрицы B_k, $\tilde{B}_k$, $k = 1, 2, \ldots, r$, положительно определенное решение H уравнения (18), как и в скалярном случае, существует и единственно.

1. *Кореневский Д. Г.* Коэффициентный алгебраический критерий асимптотической устойчивости с вероятностью единица решений линейных систем стохастических уравнений Ито // Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости сложных систем.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984.— С. 67—77.
2. *Рудомино-Дусятская И. А.* О среднеквадратической устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений.— Киев, 1983.— 31 с.— Деп. в УкрНИИНТИ, № 507 Ук-Д83.
3. *Рудомино-Дусятская И. А.* Асимптотические свойства систем линейных стохастических дифференциальных уравнений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1984.— 10 с.
4. *Пакшин П. В.* Устойчивость линейных и специальных нелинейных стохастических систем с параметрическими шумами.— В. кн: Динамика неоднородных систем. Материалы семинара.— М. : ВНИИ системных исследований, 1983, с. 26—40.
5. *Рабинович Б. И.* Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов.— М. : Машиностроение, 1975.— 416 с.
6. *Введение* в аэроавтоупругость / Белоцерковский С. М., Кочетков Ю. А., Красовский А. А., Новицкий В. В.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
7. *Создание* и применение математических моделей самолетов / отв. ред. С. М. Белоцерковский.— М. : Наука, 1984.— 143 с.
8. *Астапов И. С.*, *Белоцерковский С. М.*, *Качанов Б. О.*, *Кочетков Ю. А.* О системах интегродифференциальных уравнений, описывающих неустановившиеся движения тел в сплошной среде // Дифференц. уравнения.— 1982.— **18**, № 9.— С. 1628—1637.
9. *Рабинович Б. И.* Прикладные задачи устойчивости стабилизированных объектов.—М. : Машиностроение, 1978.— 232 с.
10. *Шаханова Е. В.* Об одном интегро-дифференциальном уравнении в теории электронных пучков // Функциональный анализ и его приложения в механике и теории вероятностей.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1984.— С. 108—113.
11. *Miller R. K.* Asymptotic stability properties of linear Volterra integro-differential equations // J. Different. Equat. — 1971.— **10**, N 2.— P. 485—506.
12. *Abrahamson D. L.*, *Infante E. F.* A Liapunov functional for linear Volterra integrodifferential equations // Quart. Appl. Math.— 1983.— **41**, N 1.— P. 35—44.
13. *Burton T. A.* Construction of Liapunov Functionals for Volterra Equations // J. Math. Anal. and Appl.— 1982.— **85**, N 1.— P. 90—105.
14. *Burton T. A.* Perturbed Volterra Equations // J. Different. Equat.— 1982.— **43**, N 2.— P. 168—183.
15. *Гихман И. И.* Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений // Предельные теоремы и статистические выводы.— Ташкент : ФАН, 1966.— С. 14—45.
16. *Кушнер Г. Дж.* Стохастическая устойчивость и управление: Перевод с англ.— М. : Мир, 1969.— 200 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 16.05.85,
после доработки — 16.01.86