$$\cap L_{r_{21}}(\Gamma_1), \quad [\tilde{u}]_6 = \| u_4 \|_{r_{21}, \Gamma_1}, \quad [B_6\tilde{u}, \tilde{v}] = \int_{\Gamma_1} b_{21}(x, u_4)\, v_4 ds,$$

$$W = \bigcap_{i=1}^{6} X_i, \quad B = \sum_{i=1}^{6} B_i.$$

Доказательство завершается применением той же, что и в теореме 3, теоремы о разрешимости задачи (II), выполнимость всех уловий которой легко проверяется.

1. *Митропольский Ю. А., Нижник Л. П., Кульчицкий В. Л.* Нелинейные задачи теплопроводности с производной по времени в граничном условии.— Киев, 1974.— 32 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; ИМ-74-15).
2. *Нижник Л. П., Тараборкин Л. А.* Краевые задачи для управления теплопроводности с производной по времени в условиях сопряжения // Укр. мат. журн.— 1982.— **34**, № 1.— С. 121—126.
3. *Kačur J.* Nonlinear parabolic equations with the mixed and nonstationary boundary conditions // Math. Slovaca.— 1980.— **30**, N 3.— P. 213—237.
4. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М. : Мир, 1972. — 587 с.
5. *Barbu V.* Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces.— Bukarest : Leyden, 1976.— 352 p.

Ин-т электросварки АН УССР, Киев

Получено 03.07.85

УДК 517.948

Фам Ки Ань

Приближенное решение нелинейных многоточечных краевых задач в резонансном случае

Рассматривается краевая задача

$$\dot{x} = A(t)\, x + f(t, x, \dot{x}), \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} M_i x(t_i) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = \omega, \tag{2}$$

где $A(t)$ — непрерывная на $[0, \omega]$ матрица размерности $n \times n$, $x, f \in \mathbb{R}^n$, M_i — заданные вещественные матрицы размерности $n \times n$. Пусть $U(t)$ — фундаментальная матрица соответствующего линейного однородного уравнения $\dot{U} = A(t) U$; $U(0) = E$ — единничая матрица.

В отличие от [1, 2], будем предполагать, что

$$H \equiv \sum_{i=1}^{k} M_i U(t_i) = 0 \tag{3}$$

и матрица $M \equiv \sum_{i=1}^{k} t_i M_i U(t_i)$ неособенная. Особенность (резонансность) задачи (1), (2) при условии (3) состоит в том, что линейное однородное уравнение $\dot{x} = A(t)\, x$ при краевом условии (2) имеет ненулевые решения. Заметим, что нелинейная периодическая граничная задача $\dot{x} = f(t, x, \dot{x})$, $x(0) = x(\omega)$ является частным случаем задачи (1), (2) (при $A \equiv 0$, $U \equiv E$, $M_i = (\delta_{1i} - \delta_{ik}) E$, $i, = 1, 2, \ldots, k$, $H = 0$, $M = -\omega E$). В настоящей работе задача (1), (2) решается методом, предложенным в [3] и развитым в [4, 5].

Сведем задачу (1), (2) к следующему операторному виду:

$$\mathcal{A}x = F(x), \tag{4}$$

где $\mathcal{A}, F: X \to Y$, $\mathcal{A}x = \dot{x} - A(t)x$, $F(x) = f(t, x, \dot{x})$, $Y = C([0, \omega], \mathbb{R}^n)$, $\|y\| = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant \omega} \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |y_j(t)|$, $X = \left\{x \in C^1([0, \omega], \mathbb{R}^n) : \sum\limits_{i=1}^{k} M_i x(t_i) = 0\right\}$, $|||x||| = \|x\| + \|\dot{x}\|$.

Положим $X_1 = \left\{x \in X : \sum\limits_{i=1}^{k} M_i U_i \int\limits_0^{t_i} U^{-1}(t)\, x(t)\, dt = 0\right\}$, где $U_i = U(t_i)$, $Y_1 = \left\{y \in Y : \sum\limits_{i=1}^{k} M_i U_i \int\limits_0^{t_i} U^{-1}(t)\, y(t)\, dt = 0\right\}$, $X_2 = \{x \in X : x = U(t)\,\xi;\ \xi \in \mathbb{R}^n\}$, $Y_2 = \{y \in Y : y = U(t)\,\eta;\ \eta \in \mathbb{R}^n\}$. В пространстве n-мерных векторов и в пространстве $(n \times n)$-матриц вводятся нормы $|(v_1, v_2, \ldots, v_n)| = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |v_j|$ и $|(v_{ij})_{ij,=1}^n| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |v_{ij}|$ соответственно.

Лемма 1. *$\mathcal{A}: X \to Y$ является линейным ограниченным фредгольмовым оператором (индекса нуль). Пространства X, Y разлагаются в прямые суммы $X = X_1 \oplus X_2$, $Y = Y_1 \oplus Y_2$, причем $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = X_2$ конечномерно, $\operatorname{Im} \mathcal{A} = Y_1$ замкнуто, $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = \operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathcal{A} = n$. Сужение $\hat{\mathcal{A}}$ оператора $\mathcal{A}$ на X_1 имеет ограниченный обратный:*

$$\hat{\mathcal{A}}^{-1} y = U(t)\, M^{-1} \left\{\sum_{i=1}^{k} M_i U_i \int\limits_0^{t_i} s U^{-1}(s)\, y(s)\, ds + \sum_{i=1}^{k} t_i M_i U_i \int\limits_{t_i}^{t} U^{-1}(s)\, y(s)\, ds\right\}. \tag{5}$$

Более того, справедлива оценка

$$\|\hat{\mathcal{A}}^{-1}\| \leqslant \rho = 1 + \rho_1 \left(1 + \max_{0 \leqslant t \leqslant \omega} |A(t)|\right), \tag{6}$$

где

$$\rho_1 = \left\{|M^{-1}| \left(\sum_{i=1}^{k} |M_i|\,|U_i| \int\limits_0^{t_i} s\,|U^{-1}(s)|\, ds + \sum_{i=1}^{k} t_i\, |M_i|\,|U_i| \int\limits_0^{t_i} |U^{-1}(s)|\, ds\right) + \int\limits_0^{\omega} |U^{-1}(s)|\, ds\right\} \max_{0 \leqslant t \leqslant \omega} |U(t)|. \tag{7}$$

Доказательство. 1. $X = X_1 \oplus X_2$, $Y = Y_1 \oplus Y_2$. Пусть $x \in X_1 \cap X_2$. Тогда $x = U(t)\,\xi$ и $0 = \sum\limits_{i=1}^{k} M_i U_i \int\limits_0^{t_i} U^{-1}(s)\, U(s)\, \xi ds = M\xi$. Отсюда следует, что $\xi = 0$ и, следовательно, $x = 0$. Далее, для каждого $x \in X$ положим $\xi = M^{-1} \sum\limits_{i=1}^{k} M_i U_i \int\limits_0^{t_i} U^{-1}(t)\, x(t)\, dt$, $v = U(t)\,\xi \in X_2$, $u = x - v$. Имеем $\sum\limits_{i=1}^{k} M_i U_i \times \int\limits_0^{t_i} U^{-1}(t)\, u(t)\, dt = \sum\limits_{i=1}^{k} M_i U_i \int\limits_0^{t_i} U^{-1}(t)\, x(t)\, dt - M\xi = 0$, следовательно, $u \in X_1$. Тем самым $X = X_1 \oplus X_2$. Аналогично $Y = Y_1 \oplus Y_2$.

2. $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = X_2$, $\operatorname{Im} \mathcal{A} = Y_1$. Пусть $x \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$. Тогда $\dot{x} = A(t)\, x$. Отсюда следует $x = U(t)\, x(0) \in X_2$. Обратно, если $x \in X_2$, то $x = U(t)\,\xi$. Поэтому $\dot{x} = A(t)\, U(t)\, \xi = A(t)\, x$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} M_i x(t_i) = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} M_i U_i\right) \xi = 0$, т. е. $x \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$. Таким образом, $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = X_2$. Возьмем любой $y \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$. Найдется такой $x \in X$,

что $\mathcal{A}x = y$, т. е. $\dot{x} = A(t)x + y$. Имеем $x(t_i) = U_i x(0) + U_i \int\limits_0^{t_i} U^{-1}(s) y(s) ds$.

Поскольку $x \in X$, получим $0 = \sum\limits_{i=1}^{k} M_i x(t_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} M_i U_i \int\limits_0^{t_i} U^{-1}(s) y(s) ds$. Отсюда вытекает, что $y \in Y_1$. Обратно, пусть $y \in Y_1$. Положим

$$x(t) = U(t)\xi + \int\limits_0^t U(t) U^{-1}(s) y(s) ds. \qquad (8)$$

Легко видеть что $x \in X$, $\mathcal{A}x = y$, следовательно, $y \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$. Таким образом, доказано, что $\operatorname{Im} \mathcal{A} = Y_1$ замкнуто, $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = X_2$ конечномерно и $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = \operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathcal{A} = n$, что означает фредгольмовость (индекса нуль) оператора $\mathcal{A}$. Нетрудно проверить, что $\mathcal{A}$ непрерывен и $\|\mathcal{A}\| \leqslant 1$.

3. Выберем ξ в (8) так, чтобы $x \in X_1$, т. е.

$$0 = \sum_{i=1}^{k} M_i U_i \int\limits_0^{t_i} U^{-1}(s) \left\{U(s)\xi + U(s) \int\limits_0^{s} U^{-1}(\tau) y(\tau) d\tau\right\} ds =$$

$$= M\xi + \sum_{i=1}^{k} M_i U_i \int\limits_0^{t_i} \int\limits_0^{s} U^{-1}(\tau) y(\tau) d\tau\, ds = M\xi - \left\{\sum_{i=1}^{k} M_i U_i \int\limits_0^{t_i} s U^{-1}(s) y(s) ds - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{k} t_i M_i U_i \int\limits_0^{t_i} U^{-1}(s) y(s) ds\right\}.$$

Отсюда получим

$$\xi = M^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k} M_i U_i \int\limits_0^{t_i} s U^{-1}(s) y(s) ds - \sum_{i=1}^{k} t_i M_i U_i \int\limits_0^{t_i} U^{-1}(s) y(s) ds\right\}. \qquad (9)$$

Подставив (9) в (8), получим

$$\hat{\mathcal{A}}^{-1} y = U(t) M^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k} M_i U_i \int\limits_0^{t_i} s U^{-1}(s) y(s) ds - \sum_{i=1}^{k} t_i M_i U_i \int\limits_0^{t_i} U^{-1}(s) y(s) ds\right\} +$$

$$+ U(t) \int\limits_0^{t} U^{-1}(s) y(s) ds. \qquad (10)$$

После несложного преобразования придем к соотношению (5).

4. Из (10) следует

$$|\hat{\mathcal{A}}^{-1} y| \leqslant \left\{|M^{-1}| \left(\sum_{i=1}^{k} |M_i| |U_i| \int\limits_0^{t_i} s |U^{-1}(s)| ds + \sum_{i=1}^{k} t_i |M_i| |U_i| \int\limits_0^{t_i} |U^{-1}(s)| ds\right) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{t} |U^{-1}(s)| ds\right\} |U(t)| \|y\|.$$

Таким образом, $\|\hat{\mathcal{A}}^{-1} y\| \leqslant \rho_1 \|y\|$, где ρ_1 определяется по формуле (7). Далее $\left|\frac{d}{dt}(\hat{\mathcal{A}}^{-1} y)\right| = |y + A(t)(\hat{\mathcal{A}}^{-1} y)| \leqslant \|y\| + \max\limits_t |A(t)| \|\hat{\mathcal{A}}^{-1} y\|$. Итак $|||\hat{\mathcal{A}}^{-1} y||| = \|\hat{\mathcal{A}}^{-1} y\| + \left\|\frac{d}{dt}(\hat{\mathcal{A}}^{-1} y)\right\| \leqslant \rho \|y\|$, где ρ определяется из соотношения (6). Лемма доказана.

Определим линейные ограниченные проекторы $P, Q : Y \to Y$ формулами $Qy = U(t) M^{-1} \sum\limits_{i=1}^{k} M_i U_i \int\limits_0^{t_i} U^{-1}(s) y(s) ds$, $Py = y - Qy$. Ясно, что $\operatorname{Im} P =$

$= \operatorname{Ker} Q = Y_1$; $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Im} Q = Y_2$,

$$\| Q \| \leqslant \chi \equiv | M^{-1} | \sum_{i=1}^{k} | M_i | | U_i | \int_0^{t_i} | U^{-1}(s) | ds \max_{0 \leqslant t \leqslant \omega} | U(t) |, \quad \| P \| \leqslant 1 + \chi. \quad (11)$$

Справедлива следующая теорема (ср. с [3, 5]).

Теорема 1. *Пусть оператор $F: X \to Y$ непрерывно дифференцируем по Фреше в некотором открытом множестве, содержащем замкнутый шар $S \subset X$ с центром x_0, радиусом $r > 0$. Пусть для всех $x, y \in S$ $\| PF'(x) \| \leqslant \alpha$, $\| QF'(x) \| \leqslant \beta$, $\| [QF'(x)]_{X_2}^{-1} \| \leqslant \gamma$, $\| QF'(x) - QF'(y) \| \leqslant L ||| x - y |||$. Если коэффициенты α, β, радиус r и начальное приближение x_0 таковы, что $q = 2\alpha\beta\gamma \| \hat{\mathcal{A}}^{-1} \| + L\delta\gamma/2 < 1$, $2\delta(1-q)^{-1} < r$, где невязка $\delta = \beta\gamma \| \hat{\mathcal{A}}^{-1} \| \| \mathcal{A} x_0 - PF(x_0) \| + \gamma \| QF(x_0) \|$, то последовательность $\{x^{(m)}\}$, определенная по формулам $u^{(m+1)} = \hat{\mathcal{A}}^{-1} PF(x^{(m)})$; $\tilde{x}^{(m)} = u^{(m+1)} + v^{(m)}$, $v^{(m+1)} = v^{(m)} - [QF'(\tilde{x}^{(m)})]_{X_2}^{-1} QF(\tilde{x}^{(m)})$; $x^{(m+1)} = u^{(m+1)} + v^{(m+1)}$, $u^{(m)} \in X_1$, $v^{(m)} \in X_2$, $m \geqslant 0$, будет сходиться к некоторому решению x^* уравнения (4). При этом справедлива оценка $||| x^{(m)} - x^* ||| \leqslant 2\delta(1-q)^{-1} q^m < rq^m$.*

Положим $\Delta(R) = \{(t, \xi, \eta) : t \in [0, \omega];\ \xi, \eta \in \mathbb{R}^n;\ |\xi| \leqslant R;\ |\eta| \leqslant R\}$, $\Omega = \{x \in X : ||| x ||| < R\}$.

Лемма 2. *Пусть функция $f(t, \xi, \eta)$ и ее частные производные $f'_\xi(t, \xi, \eta)$, $f'_\eta(t, \xi, \eta)$ непрерывны по совокупности переменных в $\Delta(R)$. Более того, пусть для всех (t, ξ, η), $(t, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \in \Delta(R)$: $| f'_\xi(t, \xi, \eta) | \leqslant a$, $| f'_\xi(t, \xi, \eta) - f'_\xi(t, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) | \leqslant l(|\xi - \tilde{\xi}| + |\eta - \tilde{\eta}|)$, $| f'_\eta(t, \xi, \eta) | \leqslant a$, $| f'_\eta(t, \xi, \eta) - f'_\eta(t, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) | \leqslant l(|\xi - \tilde{\xi}| + |\eta - \tilde{\eta}|)$.*

Тогда оператор $F: \Omega \subset X \to Y$ непрерывно дифференцируем по Фреше, $\| F'(x) \| \leqslant a$, $\| F'(x) - F'(y) \| \leqslant l ||| x - y |||$, $x, y \in \Omega$. Кроме того, сужение $QF'(x)$ на X_2 имеет вид

$$[QF'(x)]_{X_2} = U(t) M^{-1} V(x) U^{-1}(t), \quad (12)$$

где $V(x) = \sum_{i=1}^{k} M_i U_i \int_0^{t_i} U^{-1}(t) [f'_\xi(t, x, \dot{x}) + f'_\eta(t, x, \dot{x}) A(t)] U(t)\, dt$.

Доказательство. Для любых $x \in \Omega$, $h \in X$ имеем $F'(x) h = f'_\xi(t, x, \dot{x}) h + f'_\eta(t, x, \dot{x}) \dot{h}$. Следовательно, $| F'(x) h | \leqslant a(|h + |\dot{h}|)$. Таким образом, $\| F'(x) \| \leqslant a$. Далее $| [F'(x) - F'(y)] h | \leqslant | f'_\xi(t, x, \dot{x}) - f'_\xi(t, y, \dot{y}) | | h | + | f'_\eta(t, x, \dot{x}) - f'_\eta(t, y, \dot{y}) | | \dot{h} | \leqslant l(|x - y| + |\dot{x} - \dot{y}|)(|h| + \dot{h}|)$. Отсюда вытекает $\| F'(x) - F'(y) \| \leqslant l ||| x - y |||$. Наконец, если $h \in X_2$, то $F'(x) h = [f'_\xi(t, x, \dot{x}) + f'_\eta(t, x, \dot{x}) A(t)] U(t) \xi$. Поэтому $[QF'(x)]_{X_2} h = U(t) M^{-1} \times \left(\sum_{i=1}^{k} M_i U_i \int_0^{t_i} U^{-1}(s) [f'_\xi + f'_\eta A(s)] U(s)\, ds \right) U^{-1}(t) h$, откуда следует (12). Лемма доказана.

В дальнейшем предполагается выполненным следующее условие (A): для всех $x \in \Omega$ матрица $V(x)$ неособенна, более того, $| V^{-1}(x) | \leqslant \gamma_0$, $x \in \Omega$.

Замечание 1. Условие (А) гарантирует существование равномерно ограниченного обратного к сужению $QF'(x)$ на X_2 и $\| [QF'(x)]_{X_2}^{-1} \| \leqslant \gamma \equiv \gamma_0 | M | \max_{0 \leqslant t \leqslant \omega} | U(t) | | U^{-1}(t) | (1 + \max_{0 \leqslant t \leqslant \omega} | A(t) |)$. Укажем два частных случая, когда условие (А) будет выполнено.

Лемма 3. *Пусть $n = 1$ и существуют такие интегрируемые на $[0, t_i]$ функции $b_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, что $M_i [f'_\xi(t, \xi, \eta) + f'_\eta(t, \xi, \eta) A(t) - b_i(t)] \geqslant 0$ $\forall t \in [0, t_i]$, $\forall \xi, \eta : |\xi| \leqslant R$, $|\eta| \leqslant R$. Кроме того, пусть $\lambda \equiv$*

$= \sum_{i=1}^{k} M_i \int_0^{t_i} b_i(t)\,dt \exp \int_0^{t_i} A(s)\,ds > 0$. *Тогда условие* (*A*) *будет выполнено, причем* $\gamma_0 = \lambda^{-1}$.

Лемма 4. *Пусть* $f(t, \xi, \eta) = B(t)\xi + C(t)\eta + g(t, \xi, \eta)$, *где* $B(t)$, $C(t)$ — *непрерывные матрицы размерности* $n \times n$, $g(t, \xi, \eta)$ — *непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных вектор-функция такие, что:*

1) *матрица* $V_0 = \sum_{i=1}^{k} M_i U_i \int_0^{t_i} U^{-1}(s)\,[B(s) + C(s)A(s)]U(s)ds$ *неособенна:*

2) $\forall (t, \xi, \eta) \in \Delta(R) \,|\, g'_\xi(t, \xi, \eta)| \leqslant \varepsilon$, $|g'_\eta(t, \xi, \eta)| \leqslant \varepsilon$.

Тогда при достаточно малом ε *условие* (*A*) *будет выполнено, причем*

$$\gamma_0 = |V_0^{-1}| \left\{1 - \varepsilon |V_0^{-1}| \sum_{i=1}^{k} |M_i||U_i| \int_0^{t_i} |U^{-1}(t)|(1 + |A(t)|)|U(t)|\,dt\right\}^{-1}.$$

Справедливость лемм 3,4 проверяется непосредственно.

Применим теперь теорему 1 к задаче (1), (2) с учетом леммы 2. Положим $\alpha = (1 + \chi)a$, $\beta = \chi a$, $L = \chi l$, где χ — определяется по формуле (11). Далее, $\rho = 1 + \rho_1(1 + \max_{0 \leqslant t \leqslant \omega} |A(t)|)$, ρ_1 определяется по формуле (7), $\gamma = \gamma_0 |M^{-1}| \max_{0 \leqslant t \leqslant \omega} |U(t)||U^{-1}(t)|$. Пусть $x^0 \in \Omega$, $r = R - \||x^{(0)}\||$, $S = \{x \in X : \||x - x^0\|| \leqslant r\}$, $f^{(0)}(t) = f(t, x^{(0)}, \dot{x}^{(0)})$, $\delta = \beta\gamma\rho \max_{0 \leqslant t \leqslant \omega} |\dot{x}^{(0)} - A(t)x^{(0)} - f^{(0)} + U(t)M^{-1} \sum_{i=1}^{k} M_i U_i \int_0^{t_i} U^{-1}(s) f^{(0)}(s)\,ds| + \gamma \max_t |U(t)||M^{-1} \sum_{i=1}^{k} M_i U_i \int_0^{t_i} U^{-1}_{(s)} f^{(0)}(s)ds|$.

Теорема 2. *Пусть вектор-функция* $f(t, \xi, \eta)$ *удовлетворяет условиям леммы 2 и условию* (*A*). *Если начальное приближение* $x^{(0)} \in \Omega$ *и число* a (*см. лемму* 2) *таковы, что* $q = 2\alpha\beta\gamma\rho + L\delta\gamma/2 < 1$, $2\delta(1 - q)^{-1} < r$, *то последовательность* $\{x^{(m)}\}$, *построенная по формулам*

$$y^{(m)}(t) = f^{(m)}(t) - U(t)M^{-1} \sum_{i=1}^{k} M_i U_i \int_0^{t_i} U^{-1}(s) f^{(m)}(s)\,ds,$$

$$u^{(m+1)}(t) = U(t)M^{-1} \left\{\sum_{i=1}^{k} M_i U_i \int_0^{t_i} sU^{-1}(s)\,y^{(m)}(s)ds + \sum_{i=1}^{k} t_i M_i U_i \int_{t_i}^{t} U^{-1}(s) y^{(m)}(s)ds\right\},$$

$$\tilde{x}^{(m)}(t) = u^{(m+1)}(t) + U(t)\xi^{(m)},$$

$$\xi^{(m+1)} = \xi^{(m)} - \left\{\sum_{i=1}^{k} M_i U_i \int_0^{t_i} U^{-1}(s)\,[\tilde{f}^{(m)}_\xi + \tilde{f}^{(m)}_\xi A(s)]\,U(s)\,ds\right\}^{-1} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{k} M_i U_i \int_0^{t_i} U^{-1}(s)\,\tilde{f}^{(m)}(s)\,ds,$$

$$x^{(m+1)}(t) = u^{(m+1)}(t) + U(t)\,\xi^{(m+1)},$$

где $f^{(m)}(t) = f(t, x^{(m)}, \dot{x}^{(m)})$, $\tilde{f}^{(m)}(t) = f(t, \tilde{x}^{(m)}, \dot{\tilde{x}}^{(m)})$, $\tilde{f}^{(m)}_\xi = \frac{\partial f}{\partial \xi}(t, \tilde{x}^{(m)}, \dot{\tilde{x}})$, $\tilde{f}^{(m)}_\eta = \frac{\partial f}{\partial \eta}(t, \tilde{x}^{(m)}, \dot{\tilde{x}}^{(m)})$, *сходится к некоторому решению* $x^* \in S \subset \Omega$ *задачи* (1), (2). *При этом справедлива* $\||x^{(m)} - x^*\|| \leqslant 2\delta(1 - q)^{-1} q^m < rq^m$.

Замечание 2. Формулировка теоремы 2, а также предложенный выше алгоритм построения решений задачи (1), (2) значительно упрощаются в случае $A(t) = 0$ ($U(t) \equiv E$).

Пример. Рассматривается трехточечная краевая задача

$$\dot{x} = \varepsilon (\dot{x}^2 - 4x + 0{,}01) + 2t, \quad t \in [0, 1], \tag{13}$$

$$3x(0) - 4x(0{,}5) + x(1) = 0, \tag{14}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Имеем $n = 1$, $k = 3$, $\omega = 1$, $A(t) \equiv 0$, $U(t) \equiv 1$, $M_1 = 3$, $M_2 = -4$, $M_3 = 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 0{,}5$, $t_3 = 1$, $H = 0$, $M = -1$, $\chi = 3$, $f(t, \xi, \eta) = \varepsilon(\eta^2 - 4\varepsilon + 0{,}01) + 2t$, $f'_\xi = -4\varepsilon$, $f'_\eta = 2\varepsilon\eta$. При $R=4$ получаем $a=8\varepsilon$, $l=2\varepsilon$, а $[QF'(x)]_{X_2} = -4\varepsilon$. При $\varepsilon = 0$ задача (13), (14) имеет решение $x(t) = t^2$. Примем его за начальное приближение $x^{(0)} = t^2$, $|||x^{(0)}||| = 3$, $r = 1$, $\tilde{f}^{(0)} = 0{,}01\varepsilon + 2t$, $\alpha = 32\varepsilon$, $\beta = 24\varepsilon$, $\gamma = (4\varepsilon)^{-1}$, $L = 6\varepsilon$, $\delta = 0{,}0025$, $\rho = 5$, $q = 1920\varepsilon + 0{,}001875$. Если ε мало, например $\varepsilon = 10^{-4}$, то $q < 1$ и $2\delta + q < 1$, или $2\delta(1 - q)^{-1} < r = 1$. Итак, все условия теоремы 2 выполнены. Имеем $x^{(0)} = t^2$, $u^{(0)} = t^2 + 1/6$, $v^{(0)} = -1/6$, $y^{(1)} = 2t$, $u^{(1)} = t^2 + 1/6$, $\tilde{x}^{(0)} = u^{(1)} + v^{(0)} = x^{(0)}$, $\tilde{f}^{(0)} = f^{(0)} = 0{,}01\varepsilon + 2t$, $v^{(1)} = -1/6 + 0{,}0025$, $x^{(1)} = t^2 + 0{,}0025$. Таким образом, после одной итерации получим точное решение задачи (13), (14).

1. *Самойленко А. М., Кенжебаев К., Лаптинский В. Н.* Об одном методе построения решений линейных многоточечных краевых задач // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1983.— № 9.— С. 10—13.
2. *Габрель О. М.* Решение многоточечной задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений проекционно-итеративным методом // Укр. мат. журн.— 1983.— 35, № 1.— С. 77—80.
3. *Фам Ки Ань.* О сходимости итерационных методов в условиях неединственности решений операторных уравнений : Автореф. дис. ... канд физ.-мат. наук.— Киев, 1980.— 20 с.
4. *Фам Ки Ань, Ву Зуй Тик.* Об одном итерационном методе решения общих периодических граничных задач // Укр. мат. журн.— 1983.— 35, № 3. С. 348—352.
5. *Pham Ky Anh.* On the Seidel — Newton method for solving quasilinear operator equations // Acta Math. Vietnamica.— 1982.—7, №2.—P. 111—126. (Р. Ж. Математика, 1985. 3Б 1130).

Ханой. ун-т

Получено 10.03.86

УДК 517.944

А. Е. Шишков

Поведение обобщенных решений смешанных задач для квазилинейных параболических уравнений высокого порядка в неограниченных областях

В данной работе устанавливаются энергетические априорные оценки обобщенных решений начально-краевых задач для квазилинейных дивергентных параболических уравнений высокого порядка в неограниченных по пространственным переменным областях с некомпактными границами. Эти оценки, зависящие от геометрии границы области и аналогичные оценкам, выражающим принцип Сен-Венана в теории упругости, являются новыми и в линейной ситуации. Для линейных параболических уравнений второго порядка такие оценки установлены в [1, 2]. Там же даны их различные применения. В квазилинейной ситуации оценки указанного типа способом, не допускающим обобщения на уравнения высокого порядка, получены в [3].

В неограниченной области Q, лежащей в слое $H_T = \{(x, t) : 0 < t < T < \infty\}$ евклидова пространства $R^{n+1}_{x,t}$ и имеющей некомпактную границу $\partial Q = \Gamma_0 \cup \Gamma_T \cup \Gamma$ (Γ_0 (Γ_T) $= \partial Q \cap \{(x, t) : t = 0\,(T)\}$) рассматривается начально-краевая задача

$$\partial u/\partial t + \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x, t, u, \nabla_x u, \ldots, \nabla_x^m u) = 0, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = 0, \tag{2}$$