то $f \in L_2$ *и* $\forall n \in N$

$$E_n^2(f)_2 = \psi^2(n) E_n^2(f^\psi) + \sum_{k=n+1}^{\infty} (\psi^2(k) - \psi^2(k-1)) E_k^2(f^\psi)_2.$$

С другой стороны, если $f \in L_2$, *то для того чтобы* $f \in L^{\varphi,\psi} L_2$, *необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} (\psi^{-2}(k) - \psi^{-2}(k-1)) E_k^2(f)_2$. *Если этот ряд сходится, то* $f \in L^{\varphi,\psi} L_2$ *и* $\forall n \in N$

$$E_n^2(f^\psi)_2 = \psi^{-2}(n) E_n^2(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} (\psi^{-2}(k) - \psi^{-2}(k-1)) E_k^2(f)_2.$$

Доказательство этой теоремы, как и теоремы 1, вытекает из леммы 1. Чтобы вывести из этой леммы первую часть утверждения теоремы, следует положить $\alpha_k = \psi^2(k)$ и $c_k = |c_k(f^\psi)|^2$; чтобы получить вторую часть теоремы, нужно положить $\alpha_k = \psi^{-2}(k)$ и $c_k = |c_k(f)|^2$.

Понятно, что все выводы, которые были изложены после доказательства теоремы 1, относятся также и к теореме 3. В частности, из утверждения второй части теоремы 3 вытекает, что $\mathrm{A} f \in L_2$ ψ-производная при $\psi(k) \equiv E_k(f_2)$ не может принадлежать L_2.

1. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и приближение их суммами Фурье.— Киев, 1983.— 57 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.69).
2. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье // Докл. АН СССР.— 1984.— **277**, № 5.— С. 1074—1077.
3. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций.— Киев : Наук. думка, 1987.— 268 с.
4. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.— М. : Наука, 1976.— 320 с.
5. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976.— 304 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Получено 25.03.86

УДК 517.946.9:517.947.43

Л. А. Тараборкин, О. Б. Глущенко

Смешанные нелинейные задачи для параболических уравнений с нестационарными граничными условиями и условиями сопряжения

1. В работах [1, 2] подробно изучены возникающие в приложениях задачи для уравнения теплопроводности, содержащие производную по времени от искомой функции в граничных условиях и в условиях сопряжения соответственно, причем нелинейность заключалась лишь в функциях, задающих свободные члены. В работе [3] с помощью громоздкой методики, основанной на методе Ротэ, рассмотрена аналогичная задача для нелинейного параболического уравнения дивергентного вида второго порядка без условий сопряжения.

В настоящей работе исследуется разрешимость смешанных задач для нелинейного параболического уравнения дивергентного вида второго порядка с нелинейными граничными условиями и условиями сопряжения, содержащими дифференцирование по временной переменной.

Применяемая методика основана на методе монотонных операторов [4] с учетом подхода, использованного в работах [1, 2]; она кратчайшим путем приводит к цели и допускает очевидный перенос на случай параболического уравнения высшего порядка.

2 Сначала рассмотрим задачу (называемую далее кратко задачей (I)) в следующей постановке: в ограниченной области $\Omega \subset E^N$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$ решить нелинейное параболическое уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) + b_0(x,u) = f_0(x,t), \quad x \in \Omega, \ t \in (0,T), \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\partial u(x,t)/\partial t = -\partial u/\partial \nu - b_1(x,u) + f_1(x,t), \ x \in \Gamma_1, \ t \in (0,T), \quad (2)$$

$$0 = -\partial u/\partial \nu - b_2(x,u), \ x \in \Gamma_2, \ t \in (0,T), \quad (3)$$

где $\partial u/\partial x \equiv (\partial u/\partial x_1, \ldots, \partial u/\partial x_N)$, $x \in \Omega$, $\partial u/\partial \nu = \sum_{i=1}^{N} a_i(x, u, \partial u/\partial x) \cos(\vec{n}, x_i)$ — производная по конормали к $\partial\Omega$, $\vec{n}$ — орт внешней нормали, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$, с начальными условиями

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad u(x,0) = u_{10}(x), \quad x \in \Gamma_1. \quad (4)$$

Относительно функций, входящих в постановку задачи (I), сделаем следующие предположения.

1. Функции $a_i(x,\xi)$, $i = 1, \ldots, N$, $b_j(x,s)$, $j = 0, 1, 2$, непрерывны по всем своим переменным.
2. $\sum_{i=1}^{N} \xi_i a_i(x,\xi) \geqslant C_1 |\xi|^p - C_2$, $x \in \Omega$, $p > 1$, $|\xi| < \infty$.
3. $sb_j(x,s) \geqslant C_1 |s|^{p_j} - C_2$, $p_j > 1$, $j = 0, 1, 2$.
4. $\sum_{i=1}^{N} (\xi_i - \eta_i)[a_i(x,\xi) - a_i(x,\eta)] \geqslant 0$, $x \in \Omega$.
5. Функции b_j — неубывающие по s; это, в частности, означает, что $[b_j(x,s) - b_j(x,t)](s-t) \geqslant 0$, $s, t \in E^1$.
6. Функции $f_i(x,t)$, $i = 0, 1$, суммируемы с квадратом, т. е. при фиксированном t $f_0(x,t) \in L_2(\Omega)$, $f_1(x,t) \in L_2(\Gamma_1)$.
7. Порядок роста функций a_i, b_j по переменным $\xi \in E^{N+1}$, $s \in E^1$ соответственно не выше полиномиального, т. е.

$$|a_i(x,\xi)| \leqslant C(1 + |\xi|^{p-1}), \quad p > 1, \quad i = 1, \ldots, N, \quad (5)$$

$$|b_j(x,s)| \leqslant C(1 + |s|^{p_j-1}), \quad p_j > 1, \quad j = 0, 1, 2. \quad (6)$$

Здесь и далее C с индексом или без индекса обозначает положительную константу.

3. Сведем задачу (1) к абстрактной задаче Коши в некотором банаховом пространстве. В связи с этим нам понадобятся соболевские пространства $W_p^q(\mathcal{L})$ функций, определенных на областях или многообразиях, и пространства $L_r(\mathcal{L})$ интегрируемых в степени r функций. Положим $r_j = \max\{p_j, 2\}$, $j = 0, 1, 2$. Введем в рассмотрение пространство пар функций

$$V = \left\{ \tilde{v} \equiv \begin{pmatrix} v \\ v_1 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} v \in W_p^1(\Omega) \cap L_{r_0}(\Omega); \quad v_1(x) = v(x), \ x \in \Gamma_1; \\ v(x) \in W_p^{1/p'}(\partial\Omega) \cap L_{r_1}(\Gamma_1) \cap L_{r_2}(\Gamma_2), \quad x \in \partial\Omega \end{array} \right\}$$

с нормой

$$\|\tilde{v}\|_V = \|v\|_{p,\Omega}^{(1)} + \|v\|_{r_0,\Omega} + \|v_1\|_{r_1,\Gamma_1} + \|v\|_{r_2,\Gamma_2}, \quad (7)$$

где в правой части стоят нормы в пространствах $W_p^1(\Omega)$, $L_{r_0}(\Omega)$, $L_{r_1}(\Gamma_1)$, $L_{r_2}(\Gamma_2)$ соответственно. Очевидно, что так построенное пространство V представляет собой банахово пространство, являющееся подпространством гильбертова пространства $H = L_2(\Omega) \oplus L_2(\Gamma_1)$, образованного как прямая сумма пространств интегрируемых с квадратом функций. Более того, V плотно вкладывается в H, поскольку пространство функций

$$C^2(\Omega, \Gamma_1) = \left\{ \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi_1 \end{pmatrix} : \varphi \in C^2(\bar{\Omega}),\ \varphi_1 = \varphi|_{\Gamma_1} \right\}$$

плотно в H [1] и $C^2(\Omega, \Gamma_1) \subset H$. Отождествляя гильбертово пространство H с его сопряженным, стандартным образом получаем цепочку непрерывных плотных вложений $V \subset H \subset V^*$, где через V^* обозначено сопряженное к V пространство.

Определение 1. *Оператор $A : V \to V^*$, порожденный задачей* (I), *определим с помощью формы*

$$[A\tilde{u}, \tilde{v}] = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial v}{\partial x_i} a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \int_\Omega b_0(x, u)\, v dx + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} b_i(x, u_i)\, v_i ds,$$

$$\tilde{u}, \tilde{v} \in V, \quad u_2 = u|_{\Gamma_2}, \quad v_2 = v|_{\Gamma_2}, \tag{8}$$

где через $[\cdot,\cdot]$ *обозначено каноническое спаривание между элементами* V^* *и* V.

Свойства оператора A, являющиеся основными при исследовании разрешимости задачи (I), сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Оператор* $A : V \to V^*$: а) *ограничен*; б) *семинепрерывен*; в) *монотонен*; г) *коэрцитивен*.

Доказательство. а). По определению оператора A с учетом предположения 7 имеем

$$|[A\tilde{u}, \tilde{v}]| \leqslant \left| \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial v}{\partial x_i} a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx \right| + \left| \int_\Omega b_0(x, u)\, v dx \right| +$$

$$+ \sum_{i=1}^2 \left| \int_{\Gamma_i} b_i(x, u_i)\, v_i ds \right| \leqslant C_1 \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| \Bigg| 1 + |u|^{p-1} +$$

$$+ \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-1} \Bigg| dx + C_2 \int_\Omega (1 + |u|^{p_0 - 1}) |v|\, dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^2 C_{2+i} \int_{\Gamma_i} (1 + |u_i|^{p_i - 1}) |v_i|\, ds. \tag{9}$$

Воспользовавшись в правой части (9) неравенством Гельдера, получим

$$|[A\tilde{u}, \tilde{v}]| \leqslant C \left\{ \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{p,\Omega} \left(1 + \| |u|^{p-1} \|_{q,\Omega} + \left\| \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-1} \right\|_{q,\Omega} \right) + \right.$$

$$+ \|v\|_{r_0,\Omega} (1 + \| |u|^{p_0-1} \|_{s_0,\Omega}) + \|v_1\|_{p_1,\Gamma_1} (1 + \| |u|^{p_1-1} \|_{s_1,\Gamma_1}) +$$

$$\left. + \|v_2\|_{r_2,\Gamma_2} (1 + \| |u|^{p_2-1} \|_{s_2,\Gamma_2}) \right\}, \tag{10}$$

где $1/p + 1/q = 1$, $1/r_j + 1/s_j = 1$, $j = 0, 1, 2$. Однако $\tilde{u}, \tilde{v} \in V$ и, в частности, если $\tilde{u}$ берутся из ограниченного множества в V, то $\| |u|^{p-1} \|_{q,\Omega} = \|u\|_{p,\Omega}^{p-1} \leqslant C$ и $\left\| \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-1} \right\|_{q,\Omega} = \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{p,\Omega}^{p-1} \leqslant C$ (так как $u \in W_p^1(\Omega)$) и аналогично $\| |u|^{p_0-1} \|_{s_0,\Omega} \leqslant C$, $\| |u|^{p_j-1} \|_{s_j,\Gamma_j} \leqslant C$, $j = 1, 2$, ввиду $u \in L_{r_0}(\Omega)$, $u|_{\Gamma_j} \in L_{r_j}(\Gamma_j)$ и определения r_j. Таким образом, все слагаемые в правой части неравенства (10), через которые оценивается $\|A\tilde{u}\|_{V^*}$, ограничены константой, что и требовалось доказать.

Для полноты изложения доказательству отдельных свойств оператора A предпошлем их определения.

О п р е д е л е н и е 2. *Оператор* $\mathfrak{A}:\mathfrak{X}\to\mathfrak{X}^*$, *отображающий рефлексивное банахово пространство* $\mathfrak{X}$ *в сопряженное к нему* $\mathfrak{X}^*$, *называется семинепрерывным, если функция* $\lambda\to[\mathfrak{A}(u+\lambda v), w]$ *для любых* $u, v, w\in\mathfrak{X}$ *непрерывна как функция из* E^1 *в* E^1.

б). Воспользуемся «(ε, δ)-определением» непрерывности вещественной функции. Пусть $\delta>0$, $|\lambda-\lambda_0|<\delta$ (λ_0 фиксированное); тогда согласно определению оператора A имеем

$$|[A(u+\lambda v), w]-[A(\tilde{u}+\lambda_0\tilde{v}), \tilde{w}]|\leqslant|[A(\tilde{u}+\lambda\tilde{v})-A(\tilde{u}+\lambda_0\tilde{v}), \tilde{w}]|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_\Omega\sum_{i=1}^N\frac{\partial w}{\partial x_i}\left[a_i\left(x, u+\lambda v, \frac{\partial(u+\lambda v)}{\partial x}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-a_i\left(x, u+\lambda_0 v, \frac{\partial(u+\lambda_0 v)}{\partial x}\right)\right]dx\right|+\left|\int_\Omega[b_0(x, u+\lambda v)-\right.$$

$$\left.-b_0(x, u+\lambda_0 v)]\,wdx\right|+\sum_{i=1}^2\left|\int_{\Gamma_i}[b_i(x, u_i+\lambda v_i)-b_i(x, u_i+\lambda_0 v_i)]\,w_i ds\right|\leqslant$$

$$\leqslant\|\tilde{w}\|_V\varepsilon,$$

поскольку, согласно предположению, функции a_i, b_i непрерывны по всем своим переменным.

О п р е д е л е н и е 3. *Оператор* $\mathfrak{A}:\mathfrak{X}\to\mathfrak{X}^*$, *отображающий рефлексивное банахово пространство* $\mathfrak{X}$ *в сопряженное к нему* $\mathfrak{X}^*$, *называется монотонным, если* $[\mathfrak{A}(u)-\mathfrak{A}(v), u-v]\geqslant0$ *для любых* $u, v\in\mathfrak{X}$.

в). Согласно определению оператора A и с учетом предположений 4 и 5 имеем

$$[A\tilde{u}-A\tilde{v}, \tilde{u}-\tilde{v}]=\int_\Omega\sum_{i=1}^N\frac{\partial(u-v)}{\partial x_i}\left[a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)-\right.$$

$$\left.-a_i\left(x, v, \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]dx+\int_\Omega[b_0(x, u)-b_0(x, v)](u-v)\,dx+$$

$$+\sum_{i=1}^2\int_{\Gamma_i}[b_i(x, u_i)-b_i(x, v_i)](u_i-v_i)\,ds\geqslant0,\ \tilde{u}, \tilde{v}\in V,$$

т. е. порожденный задачей (1) оператор A является монотонным.

О п р е д е л е н и е 4. *Оператор* $\mathfrak{A}:\mathfrak{X}\to\mathfrak{X}^*$, *отоброжающий рефлексивное банахово пространство* $\mathfrak{X}$ *в сопряженное к нему* $\mathfrak{X}^*$, *называется коэрцитивным, если* $[\mathfrak{A}(u), u]/\|u\|_{\mathfrak{X}}\to\infty$ *при* $\|u\|_{\mathfrak{X}}\to\infty$.

г). В данном случае согласно предположениям 2 и 3 имеем

$$[A\tilde{u}, \tilde{u}]=\int_\Omega\sum_{i=1}^N\frac{\partial u}{\partial x_i}a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx+\int_\Omega b_0(x, u)\,udx+$$

$$+\sum_{i=1}^2\int_{\Gamma_i}b_i(x, u_i)\,u_i ds\geqslant C_1\left\{\int_\Omega\left(\left(\sum_{i=1}^N\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p\right)+|u|^{p_0}\right)dx+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^2\int_{\Gamma_i}|u_i|^{p_i}ds\right\}-C_2.$$

Рассмотрим отношение

$$\frac{(\|u\|_{p,\Omega}^{(1)})^p+\|u\|_{p_0,\Omega}^{p_0}+\sum_{i=1}^2\|u_i\|_{p_i,\Gamma_i}^{p_i}}{\|\tilde{u}\|_V}\geqslant$$

$$\geqslant \frac{(\| u \|_{p,\Omega}^{(1)})^m + \| u \|_{p_0,\Omega}^m + \sum_{i=1}^{2} \| u_i \|_{p_i,\Gamma_i}^m}{\| u \|_{p,\Omega}^{(1)} + \| u \|_{p_0,\Omega} + \sum_{i=1}^{2} \| u_i \|_{p_i,\Gamma_i}}, \tag{11}$$

где $m = \min \{p, p_0, p_1, p_2\} > 1$. Обозначив для удобства слагаемые в правой части (11) через x_i, $i = 1, \ldots, 4$, получим

$$\frac{\sum_{i=1}^{4} x_i^m}{\sum_{r=1}^{4} x_i} \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i^m}{4 \max_i \{x_i\}} \to \infty$$

при $\max_i \{x_i\} \to \infty$. Следовательно, $[A\tilde{u}, \tilde{u}]/\| \tilde{u} \|_V \to \infty$ при $\| \tilde{u} \|_V \to \infty$ и тем самым оператор A коэрцитивен.

4. С помощью введенного в определении 1 оператора A вопрос о разрешимости исходной задачи (I) сводится к вопросу о разрешимости некоторой нелинейной эволюционной задачи в банаховом пространстве V. Это сведение осуществимо ввиду следующего определения.

Определение 5. *Обобщенным решением исходной задачи* (I) *назовем функцию* $u(x, t)$, *для которой составленная с ее помощью вектор-функция* $U(t) — \mathrm{col}\,(u(x, t), u(x, t)|_{\Gamma_1}) : [0, T] \to V$ *является решением абстрактной задачи Коши* (*называемой в дальнейшем задачей* (II))

$$\frac{dU(t)}{dt} + AU(t) = f(t), \tag{12}$$

$$U(0) = U_0 \tag{13}$$

с монотонным семинепрерывным коэрцитивным оператором $A : V \to V^*$.

Последнее определение корректно в том смысле, что оно действительно обобщает понятие решения в классическом смысле, что несложно проверить, применив формулу Грина.

Теперь можно воспользоваться общими результатами о разрешимости абстрактной задачи (II) при различных комбинациях, налагаемых на исходную задачу ограничений [4, 5]. Сначала сформулируем теорему существования, условия которой обеспечивают в некотором смысле минимальные требования на оператор A из задачи (II).

Теорема 2. *Обобщенное решение задачи* (I) $u(x, t)$ *существует и единственно, если выполняются предположения* 1 — 6 *и дополнительно*

$$f_0 \in W_1^1(0, T; L_2(\Omega)),\ f_1 \in W_1^1(0, T; L_2(\Gamma_1)),\ \mathrm{col}(u_0, u_{10}) \in V,\ u_0 \in L_{2p_0-2}(\Omega) \bigcap_{i=1}^{2} L_{2p_i-2}(\Gamma_i).$$

При этом решение имеет такую гладкость; $u(x, t) \in W_\infty^1(0, T); L_2(\Omega))$, $u_1(x, t) \equiv u(x, t)|_{\Gamma_1} \in W_\infty^1(0, T; L_2(\Gamma_1))$.

Доказательство. По теореме 1 оператор A, порожденный задачей (I) (см. определение 1) является монотонным, семинепрерывным и коэрцитивным. Далее из условий относительно функций $f_1(x, t)$, $f_2(x, t)$ непосредственно следует, что $f \equiv \mathrm{col}\,(f_1, f_2) \in W_1^1(0, T; H)$. Определив $U_0 \equiv \mathrm{col}\,(u_0, u_{10})$, получим $AU_0 \in H = L_2(\Omega) \oplus L_2(\Gamma_1)$. Таким образом, выполнены все условия теоремы о разрешимости задачи (II) (см. [5, с. 140]) и тем самым существует и единственно обобщенное решение исходной задачи, принадлежащее указанным в условии данной теоремы пространствам.

При формулировке и доказательстве теоремы 2 не использовалось предложение 7 об ограничениях на рост функций, задающих нелинейности, поскольку в соответствующей теореме о разрешимости задачи (II) не требуется ограниченность порожденного исходной задачей оператора. Если же дополнительно потребовать выполнение предположения 7 о полиномиальном порядке роста функций, задающих нелинейности, то можно в качестве функций, задающих начальные условия, брать произвольные функции из H. Соответствующая конструкция относится к случаю, когда пространство V представляет собой пересечение конечного числа рефлексивных банаховых пространств

$$V = \bigcap_{i=1}^{m} V_i, \quad \| v \|_V = \sum_{i=1}^{m} \| v \|_{V_i}, \tag{14}$$

причем $V_i \subset H \subset V_i^*$, $V \subset H \subset V^*$, все вложения плотны и непрерывны, а оператор A в задаче (II) представлен в виде суммы некоторых операторов $A_i : V_i \to V_i^*$:

$$A(v) = \sum_{i=1}^{m} A_i(v), \quad v \in V. \tag{15}$$

Теорему о разрешимости задачи (I) докажем для простоты в случае, когда «стационарная» часть граничного условия (на Γ_2) однородна, т. е. $b_2(x, u) \equiv \equiv 0$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия предположений* $1 - 7$ *и дополнительно* $f_0(x, t) \in L_q(0, T; L_2(\Omega)) + L_{q_0}(0, T; L_{r_0}(\Omega)) + L_{q_1}(0, T; L_2(\Omega))$, $f_1(x, t) \in L_q(0, T; L_2(\Gamma_1)) + L_{q_0}(0, T; L_2(\Gamma_1)) + L_{q_1}(0, T; L_{r_1}(\Gamma_1))$, *где* $1/p_i + + 1/q_i = 1$, $i = 0, 1, 2$, $1/p + 1/q = 1$, $r_i = \max\{2, p_i\}$. *Тогда обобщенное решение задачи* (I) $u(x, t)$ *существует и единственно, причем* $u \in L_p(0, T; W_p^1(\Omega)) \cap L_{p_0}(0, T; L_{p_0}(\Omega)) \cap L_\infty(0, T; L_2(\Omega))$, $u_1 \equiv u|_{\Gamma_1} \in L_{p_1}(0, T; L_{p_1}(\Gamma_1)) \cap \cap L_\infty(0, T; L_2(\Gamma_1))$.

Доказательство. Введем в рассмотрение следующие пространства: (далее по определению $u_1 \equiv u|_{\Gamma_1}$): $V_1 = \{\tilde{u} : \tilde{u} \in [W_p^1(\Omega) \oplus W_p^{1/q}(\Gamma_1)] \cap H = = W_p^1(\Omega) \cap L_2(\Omega) \oplus W_p^{1/q}(\Gamma_1) \cap L_2(\Gamma_1)$ с полунормой $[\tilde{u}]_1 = \| u \|_{p,\Omega}^{(1)}$ $V_2 = = L_2(\Omega) \cap L_{p_0}(\Omega) \oplus L_2(\Gamma_1)$ с полунормой $[\tilde{u}]_2 = \| u \|_{p_0,\Omega}$, $V_3 = L_2(\Omega) \oplus \oplus L_2(\Gamma_1) \cap L_{p_1}(\Gamma_1)$ с полунормой $[\tilde{u}]_3 = \| u_1 \|_{p_1,\Gamma_1}$. Введем также (нелинейные) операторы $A_i : V_i \to V_i^*$, действие которых задается с помощью следующих форм: $[A_1\tilde{u}, \tilde{v}] = \int\limits_\Omega \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\partial v}{\partial x_i} a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx$, $[A_2\tilde{u}, \tilde{v}] = \int\limits_\Omega b_0(x, u)\, v dx$, $[A_3\tilde{u}, \tilde{v}] = \int\limits_{\Gamma_1} b_1(x, u_1)\, v_1 ds$. Несложно показать (фактически это было сделано при доказательстве теоремы 1), что для операторов A_i выполнены условия $\| A_i\tilde{u} \|_{V_i^*} \leqslant C_1 [\tilde{u}]_i^{p_i - 1} + C_2$, $[A_i\tilde{u}, \tilde{u}] \geqslant C_3 [\tilde{u}]_i^{p_i} - C_4$, $i = 1, \ldots, 3$. Осталось ввести оператор, порожденный исходной задачей, по формуле (15), функцию $f = \mathrm{col}(f_0, f_1)$ и, использовав теорему о разрешимости задачи (II) (см. [4, с. 179]), завершить доказательство.

5. Изложенная методика изучения задачи (I) с нестационарными граничными условиями позволяет без существенных затруднений рассмотреть следующую задачу (называемую далее задачей (III)) с нестационарными смешанными условиями сопряжения: пусть область Ω разбита некоторой достаточно гладкой поверхностью γ, $\gamma \cap \partial\Omega = \varnothing$, на две подобласти: «внутреннюю» Ω_1 и «внешнюю» Ω_2, причем сама поверхность состоит из двух частей: $\gamma_1 \cup \gamma_2 = \gamma$, $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \varnothing$. В каждой из подобластей Ω_k, $k = 1, 2$, требуется решить уравнение типа (1):

$$\frac{\partial u_k(x, t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ik}\left(x, u_k, \frac{\partial u_k}{\partial x}\right) + b_{0k}(x, u_k) = f_{0k}(x, t), \quad x \in \Omega_k,$$

$$t \in (0, T), \tag{16}$$

при граничных условиях того же типа, что и прежде, которые в новых обозначениях имеют вид

$$u_4(x,t) \equiv u_2(x,t), \quad x \in \Gamma_1,$$
$$\partial u_4(x,t)/\partial t = -\partial u_2(x,t)/\partial v_2 - b_{21}(x,u_4) + f_2(x,t), \quad x \in \Gamma_1, \tag{17}$$
$$0 = -\partial u_2(x,t)/\partial v_2 - b_{22}(x,u_2), \quad x \in \Gamma_2, \tag{18}$$

и следующих условиях сопряжения на разделяющей поверхности γ:

$$u_2(x,t) = u_1(x,t,), \quad x \in \gamma, \quad u_3(x,t) \equiv u_1(x,t), \quad x \in \gamma_1,$$
$$\partial u_3(x,t)/\partial t = \partial u_2(x,t)/\partial \nu_2 - \partial u_1(x,t)/\partial \nu_1 - b_{11}(x,u_3) + f_1(x,t), \quad x \in \gamma_1, \tag{19}$$
$$\partial u_2(x,t)/\partial \nu_2 - \partial u_1(x,t)/\partial \nu_1 = b_{12}(x,u_1), \quad x \in \gamma_2,$$

с начальными условиями

$$u_k(x,0) = u_{k0}(x), \quad x \in \Omega_k, \quad k = 1,2; \qquad x \in \gamma_1, \quad k = 3; \qquad x \in \Gamma_1, \quad k = 4. \tag{20}$$

Предположим также, что входящие в постановку задачи (III) функции удовлетворяют соответствующим образом модифицированным условиям предположений 1—7. В частности,

$$|a_{ik}(x,\xi)| \leqslant C\cdot(1 + |\xi|^{p_k-1}), \quad p_k > 1, \quad i = 1,\ldots N, \quad k = 1,2, \tag{5'}$$
$$|b_{jk}(x,s)| \leqslant C\cdot(1 + |s|^{p_{jk}-1}), \quad p_{jk} > 1, \quad j = 0,1,2, \quad k = 1,2, \tag{6'}$$

$$[b_{jk}(x,s) - b_{jk}(x,t)](s-t) \geqslant 0 \quad t,s \in E^1, \quad \sum_{i=1}^{N} \xi_i a_{ik}(x,\xi) \geqslant C_1|\xi|^{p_k} - C_2,$$

$$x \in \Omega_k, \quad s b_{jk}(x,s) \geqslant C_1|s|^{p_{jk}} - C_2, \quad \sum_{i=1}^{N} (\xi_i - \eta_i)[a_{ik}(x,\xi) - a_{ik}(x,\eta)] \geqslant 0, \quad x \in \Omega_k.$$

Кроме того, обозначим $r_{jk} = \max\{p_{jk}, 2\}$, $j = 0, 1$, $k = 1, 2$.

Для исследования задачи (III) рассмотрим следующее пространство четверок функций: $W = \{\tilde{u} : u_k \in W^1_{p_k}(\Omega_k) \cap L_{r_{0k}}(\Omega_k), \quad k = 1,2; \quad u_1 = u_2, \quad x \in \gamma; \quad u_3 \equiv u_1|_{\gamma_1}, \; u_3 \in L_{r_{11}}(\gamma_1); \; u_1|_{\gamma_2} \in L_{r_{21}}(\gamma_2); \; u_4 \equiv u_2|_{\Gamma_1}, \; u_4 \in L_{r_{12}}(\Gamma_1); \; u_2|_{\Gamma_2} \in L_{r_{22}}(\Gamma_2)\}$ с нормой, соответствующей (7):

$$\|\tilde{u}\|_W = \sum_{k=1}^{2} \{\|u_k\|^{(1)}_{p_k,\Omega_k} + \|u_k\|_{r_{0k},\Omega_k}\} + \|u_3\|_{r_{11},\gamma_1} + \|u_4\|_{r_{12},\Gamma_1} +$$
$$+ \|u_1|_{\gamma_2}\|_{r_{21},\gamma_2} + \|u_2|_{\Gamma_2}\|_{r_{22},\Gamma_2}. \tag{21}$$

Очевидно, что W — банахово пространство, которое плотно и непрерывно вкладывается в гильбертово пространство $H_4 = L_2(\Omega_1) \oplus L_2(\Omega_2) \oplus L_2(\gamma_1) \oplus \oplus L_2(\Gamma_1)$ (ср. с [2]), так что $W \subset H_4 \subset W^*$.

Определение 6. *Оператор* $B : W \to W^*$, *порожденный задачей* (III), *определим через форму*

$$[B\tilde{u}, \tilde{v}] = \sum_{k=1}^{2} \int_{\Omega_k} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} a_{jk}\left(x, u_k, \frac{\partial u_k}{\partial x}\right) \partial x + \sum_{k=1}^{2} \int_{\Omega_k} b_{0k}(x,u_k) v_k dx +$$
$$+ \sum_{j=1}^{2} \left\{ \int_{\gamma_j} b_{1j}(x, u_{4-j}) v_{4-j} ds + \int_{\Gamma_j} b_{2j}(x, u_{2(3-j)}) v_{2(3-j)} ds \right\}, \; \tilde{u}, \tilde{v} \in W.$$

Так определенный оператор B вследствие предположений 1—7 обладает всеми свойствами, указанными в теореме 1 для оператора A. Поэтому естественно ввести определение обобщенного решения задачи (III), аналогичное определению 5.

Определение 7. *Обобщенным решением задачи* (III) *назовем пару функций* $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ *таких, что составленная из них вектор-функция* $U(t) = \mathrm{col}\,(u_1(x, t), u_2(x, t), u_1(x, t)|_{\gamma_1}, u_2(x, t)|_{\Gamma_1}) : [0, T] \to W$ *является решением абстрактной задачи Коши* (II).

Таким образом, задача (III) со смешанными нестационарными условиями сопряжения сведена к абстрактной задаче Коши (II), так что аналогично изложенному ранее применительно к задаче (I) можно применить теорию разрешимости такой задачи.

Теорема 4. *Существует и единственно обобщенное решение задачи* (III), *если относительно функций, входящих в ее формулировку, выполняются* (*с соответствующими модификациями*) *условия предположений* 1 — 6 *и дополнительно к ним* $\tilde{u}_0 = \mathrm{col}\,(u_{10}, u_{20}, u_{30}, u_{40}) \in W$, $u_{k0} \in L_{2p_{k0}-2}(\Omega_k)$, $k = 1, 2$; $u_{30} \in L_{2p_{11}-2}(\gamma_1)$; $u_{40} \in L_{2p_{21}-2}(\Gamma_1)$; $u_{10}|_{\gamma_2} \in L_{2p_{12}-2}(\gamma_2)$; $u_{20}|_{\Gamma_2} \in L_{2p_{22}-2}(\Gamma_2)$; $f_{0k} \in W_1^1(0, T; L_2(\Omega_k))$, $f_1 \in W_1^1(0, T); L_2(\gamma_1))$, $f_2 \in W_1^1(0,T; L_2(\Gamma_1))$. При этом решение $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ задачи (III) таково, что $u_k(x, t) \in W_\infty^1(0, T; L_2(\Omega_k))$; $u_1(x, t)|_{\gamma_1} \in W_\infty^1(0, T; L_2(\gamma_1))$; $u_2(x, t)|_{\Gamma_1} \in W_\infty^1(0,T; L_2(\Gamma_1))$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Теорема 5. *Пусть относительно функций, входящих в постановку задачи* (III), *выполнены предположения* 1 — 7 *и, кроме этого,* $\gamma \equiv \gamma_1$ *и* $b_{22} \equiv 0$, $f_{0k} \in L_{q_k}(0, T; L_2(\Omega_k)) + L_{q_{0k}}(0, T; L_{r_{0k}}(\Omega_k)) + L_{q_{1k}}(0, T; L_2(\Omega_k))$, $k = 1, 2$, $f_1 \in L_{q_1}(0, T; L_2(\gamma)) + L_{q_2}(0, T; L_2(\gamma)) + L_{q_{01}}(0, T; L_2(\gamma)) + L_{q_{02}}(0, T; L_2(\gamma)) + L_{q_{11}}(0, T; L_{r_{11}}(\gamma))$, $f_2 \in L_{q_2}(0, T; L_2(\Gamma_1)) + L_{q_{02}}(0, T; L_2(\Gamma_1)) + L_{q_{21}}(0, T; L_{r_{21}}(\Gamma_1))$. *Тогда существует и единственно обобщенное решение задачи* (III) $u_k(x, t)$, $k = 1, 2$, *причем*

$$u_k(x, t) \in L_{p_k}(0, T; W_{p_k}^1(\Omega_k)) \cap L_{p_{0k}}(0, T; L_{p_0}(\Omega_k)) \cap L_\infty(0, T; L_2(\Omega_k)),$$

$$u_k(x, t)|_\gamma \in L_{p_k}(0, T; L_{p_k}(\gamma)) \cap L_\infty(0, T; L_2(\gamma)), \quad u_2(x, t)|_{\Gamma_1} \in L_{p_2}(0, T;$$

$$L_{p_2}(\Gamma_1)) \cap L_\infty(0,T; L_2(\Gamma_1)).$$

Доказательство. Приведем лишь схему доказательства, поскольку оно аналогично доказательству теоремы 3 и основано на использовании конструкции суммы монотонных операторов. Введем следующие банаховы пространства X_i, полунормы $[\cdot]_i$ на них и соответствующие (монотонные, семинепрерывные, коэрцитивные) операторы $B_i : X_i \to X_i^*$:

$$X_1 = \{\tilde{u} \in [W_{p_1}^1(\Omega_1) \oplus L_2(\Omega_2) \oplus W_{p_1}^{1/q_1}(\gamma) \oplus L_2(\Gamma_1)] \cap H_4 : u_3 = u_1|_\gamma\},$$

$$X_2 = \{\tilde{u} \in [L_2(\Omega_1) \oplus W_{p_2}^1(\Omega_2) \oplus W_{p_2}^{1/q_2}(\gamma) \oplus W_{p_2}^{1/q_2}(\Gamma_1)] \cap H_4 : u_3 = u_2|_\gamma, u_4 =$$

$$= u_2|_{\Gamma_1}\}, \quad [\tilde{u}]_i = \| u_i \|_{p_i, \Omega_i}^{(1)}, \quad [B_i\tilde{u}, \tilde{v}] = \int\limits_{\Omega_i} \sum_{j=1}^N \frac{\partial v_i}{\partial x_j} a_{ij}\left(x, u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x}\right) dx,$$

$$i = 1, 2, \quad x_3 = L_2(\Omega_1) \cap L_{p_{01}}(\Omega_1) \oplus L_2(\Omega_2) \oplus L_2(\gamma) \oplus L_2(\Gamma_1),$$

$$[\tilde{u}]_3 = \| u_1 \|_{p_{01}, \Omega_1}, \quad [B_3 u, v] = \int\limits_{\Omega_1} b_{01}(x, u_1) v_1 dx, \quad X_4 = L_2(\Omega_1) \oplus L_2(\Omega_2) \cap$$

$$\cap L_{p_{02}}(\Omega_2) \oplus L_2(\gamma) \oplus L_2(\Gamma_1), \quad [\tilde{u}]_4 = \| u_2 \|_{p_{02}, \Omega_2}, \quad [B_4\tilde{u}, \tilde{v}] = \int\limits_{\Omega_2} b_{02}(x, u_2) v_2 dx,$$

$$X_5 = L_2(\Omega_1) \oplus L_2(\Omega_2) \oplus L_2(\gamma) \cap L_{r_{11}}(\gamma) \oplus L_2(\Gamma_1), \quad [\tilde{u}]_5 = \| u_3 \|_{r_{11}\gamma},$$

$$[B_5\tilde{u}, \tilde{v}] = \int\limits_\gamma b_{11}(x, u_3) v_3 ds, \quad X_6 = L_2(\Omega_1) \oplus L_2(\Omega_2) \oplus L_2(\gamma) \oplus L_2(\Gamma_1) \cap$$

$$\cap L_{r_{21}}(\Gamma_1), \quad [\tilde{u}]_6 = \| u_4 \|_{r_{21}, \Gamma_1}, \quad [B_6\tilde{u}, \tilde{v}] = \int_{\Gamma_1} b_{21}(x, u_4) v_4 ds,$$

$$W = \bigcap_{i=1}^{6} X_i, \quad B = \sum_{i=1}^{6} B_i.$$

Доказательство завершается применением той же, что и в теореме 3, теоремы о разрешимости задачи (II), выполнимость всех уловий которой легко проверяется.

1. *Митропольский Ю. А., Нижник Л. П., Кульчицкий В. Л.* Нелинейные задачи теплопроводности с производной по времени в граничном условии.— Киев, 1974.— 32 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; ИМ-74-15).
2. *Нижник Л. П., Тараборкин Л. А.* Краевые задачи для управления теплопроводности с производной по времени в условиях сопряжения // Укр. мат. журн.— 1982.— **34**, № 1.— С. 121—126.
3. *Kačur J.* Nonlinear parabolic equations with the mixed and nonstationary boundary conditions // Math. Slovaca.— 1980.— **30**, N 3.— P. 213—237.
4. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М. : Мир, 1972. — 587 с.
5. *Barbu V.* Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces.— Bukarest : Leyden, 1976.— 352 p.

Ин-т электросварки АН УССР, Киев Получено 03.07.85

УДК 517.948

Фам Ки Ань

Приближенное решение нелинейных многоточечных краевых задач в резонансном случае

Рассматривается краевая задача

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x, \dot{x}), \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} M_i x(t_i) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = \omega, \tag{2}$$

где $A(t)$ — непрерывная на $[0, \omega]$ матрица размерности $n \times n$, $x, f \in \mathbb{R}^n$, M_i — заданные вещественные матрицы размерности $n \times n$. Пусть $U(t)$ — фундаментальная матрица соответствующего линейного однородного уравнения $\dot{U} = A(t)U$; $U(0) = E$ — единничая матрица.

В отличие от [1, 2], будем предполагать, что

$$H \equiv \sum_{i=1}^{k} M_i U(t_i) = 0 \tag{3}$$

и матрица $M \equiv \sum_{i=1}^{k} t_i M_i U(t_i)$ неособенная. Особенность (резонансность) задачи (1), (2) при условии (3) состоит в том, что линейное однородное уравнение $\dot{x} = A(t)x$ при краевом условии (2) имеет ненулевые решения. Заметим, что нелинейная периодическая граничная задача $\dot{x} = f(t, x, \dot{x})$, $x(0) = x(\omega)$ является частным случаем задачи (1), (2) (при $A \equiv 0$, $U \equiv E$, $M_i = (\delta_{1i} - \delta_{ik})E$, $i, = 1, 2, \ldots, k$, $H = 0$, $M = -\omega E$). В настоящей работе задача (1), (2) решается методом, предложенным в [3] и развитым в [4, 5].