УДК 517.114:968.2

Г. И. Билущак

Кратный винеровский интеграл в пространстве непрерывных функций бесконечного числа переменных

В работах [1, 2] получено представление решений операторных уравнений и систем в гильбертовом пространстве в виде некоторых общих континуальных интегралов. Решение линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода выражено через интеграл Винера в [3]. В дальнейшем эти результаты обобщались на случай систем интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода [4], что позволило представить в виде кратных винеровских интегралов решения систем дифференциальных уравнений в частных производных [4 — 6].

В данной статье понятие винеровского интеграла в пространстве непрерывных функций бесконечного числа переменных [7] обобщается на случай декартового произведения этих пространств (т. е. рассматривается кратный винеровский интеграл), изучаются преобразования этого интеграла при линейных заменах переменных, а также представляются решения систем линейных интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода и систем дифференциальных уравнений в частных производных через введенные кратные винеровские интегралы.

1. Введем понятие кратного винеровского интеграла в пространстве непрерывных функций бесконечного числа переменных и рассмотрим вопрос о его связи с кратным винеровским интегралом в пространстве непрерывных функций конечного числа переменных.

Пусть C_∞^0 — пространство действительных непрерывных функций $\varphi(t)$, $t=(t_1,\ldots,t_m,\ldots)\in Q_\infty=\{0\leqslant t_k\leqslant 1,\ k=\overline{1,\infty}\}$, с равномерной нормой, удовлетворяющих условию $\varphi(t)|_{t_k=0}=0$, $k=\overline{1,\infty}$, $\mathcal{J}_\infty$ — цилиндрическое множество в C_∞^0 [7].

Рассмотрим декартовы произведения $C_{n,\infty}^0=C_\infty^0\times\ldots\times C_\infty^0$ и $\mathcal{J}_{n,\infty}=$ $=\mathcal{J}_\infty\times\ldots\times\mathcal{J}_\infty$.

Произведение $W(dx) = \prod_{i=1}^{n} W(dx^i)$ винеровских мер в C_∞^0 [7] назовем винеровской мерой в $C_{n,\infty}^0$ с мерой цилиндрических множеств $\mu_W(\mathcal{I}_{n,\infty}) = \prod_{i=1}^{n} \mu_W(\mathcal{I}_\infty^i)$.

Интеграл по введенной мере от функционала $F(x)$, $x \equiv (x_1, \ldots, x_n)$, будем называть кратным винеровским интегралом в $C_{n,\infty}^0$ и обозначать символом $\int\limits_{C_{n,\infty}^0} F(x)\, W(dx)$.

Рассмотрим проектор $P_m = (P_m^1, \ldots, P_m^n)$:

$$x(t) \equiv (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \to x_m(t_{(m)}) \equiv (x_m^1(t_{(m)}), \ldots, x_m^n(t_{(m)})),$$

$$x_m^i(t_{(m)}) = x^i(t_1, \ldots, t_m), \quad (Q_\infty \to Q_m, C_{n,\infty}^0 \to C_{n,m}^0 = C_m^0 \times \ldots \times C_m^0).$$

Функционалу $F(x)$, определенному на $C_{n,\infty}^0$, соответствует на $C_{n,m}^0$ функционал $F_m(x_m) = F(P_m x)$.

Теорема 1. *Пусть $F(x)$ — непрерывный на $C_{n,\infty}^0$ функционал, а функционалы $F_m(x_m)$ ограничены в совокупности интегрируемым функционалом $\Phi(x)$.*

Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_{C_{n,\infty}^0} F(x)\, W(dx) = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{C_{n,m}^0} F_m(x_m)\, W(dx_m), \tag{1}$$

где $W(dx_m)$ — сужение меры $W(dx)$ на $C_{n,m}^0$.

Доказательство. Очевидно, что из непрерывности функционала $F(x)$ на $C_{n,\infty}^0$ вытекает непрерывность функционалов $F_m(x_m)$ на $C_{n,m}^0$.

Поскольку последовательность проекторов $\{P_m\}$ сходится сильно к тождественному отображению I, то $C_{n,m}^0 \xrightarrow[m\to\infty]{} C_{n,\infty}^0$, $W(dx_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} W(dx)$ и $F_m(x_m) \to F(x)$ относительно меры $W(dx)$. По условию $F_m(x_m) \leqslant \Phi(x)$. Тогда в силу теоремы Лебега

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{C_{n,m}^0} F_m(x_m)\, W(dx_m) = \int\limits_{C_{n,\infty}^0} F(x)\, W(dx),$$

что и завершает доказательство теоремы.

2. Рассмотрим преобразования кратного винеровского интеграла в $C_{n,\infty}^0$ при линейных заменах переменных.

Теорема 2. *Пусть $F(y)$—интегрируемый на $C_{n,\infty}^0$ функционал; $a_i(t) \in C_{n,\infty}^0$, $D_t[a_i(t)] \in L_2(Q_\infty)$, $i = \overline{1, n}$.*

Тогда при преобразовании

$$y_i(t) = x_i(t) + a_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \tag{2}$$

справедлива формула

$$\int\limits_{C_{n,\infty}^0} F(y)\, W(dy) = \int\limits_{C_{n,m}^0} F(x_1 + a_1; \ldots; x_n + a_n)\, \rho(x)\, W(dx), \tag{3}$$

где

$$\rho(x) = \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q_\infty} \{D_t[a_i(t)]\}^2 dt - 2\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q_\infty} \{D_t[a_i(t)]\}\, dx_i(t)\right\}.$$

Доказательство. Рассмотрим проектор $P_m: C_{n,\infty}^0 \to C_{n,m}^0$. Тогда преобразованию (2) соответствует в $C_{n,m}^0$ преобразование

$$y_m^i(t_{(m)}) = x_m^i(t_{(m)}) + a_m^i(t_{(m)}), \quad i = \overline{1, n}. \tag{4}$$

Предположим сначала, что функционал $F(x)$ непрерывен, ограничен на $C^0_{n,\infty}$ и равен нулю вне некоторого открытого шара $\Gamma \subset C^0_{n,\infty}$, а функционалы $F_m(x_m)$ ограничены в совокупности интегрируемым функционалом $\Phi(x)$ на $C^0_{n,\infty}$.

Применяя преобразование (4) к интегралу в правой части (1), в силу теоремы 1 [8] получаем

$$\int\limits_{C^0_{n,m}} F_m(y_m)\, W(dy_m) = \int\limits_{C^0_{n,m}} F_m(x^1_m + a^1_m; \ldots; x^n_m + a^n_m)\, \rho_m(x_m)\, W(dx_m), \qquad (5)$$

где

$$\rho_m(x_m) = \exp\Big\{-\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q_m} \{D_{t_{(m)}}[a^i_m(t_{(m)})]\}^2 dt_{(m)} -$$

$$-2\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q_m} \{D_{t_{(m)}}[a^i_m(t_{(m)})]\}\, dx^i_m(t_{(m)})\Big\}. \qquad (6)$$

На основании теоремы 1 в пределе при $m \to \infty$ левая часть (5) переходит в левую часть (3). Подынтегральные функционалы в правой части (6) ограничены в совокупности некоторым интегрируемым функционалом. Следовательно, в пределе при $m \to \infty$ правая часть (6) переходит в правую часть (3). Это доказывает теорему для данного частного случая.

В общем случае, когда $F(x)$ — интегрируемый на $C^0_{n,\infty}$ функционал, завершение доказательства проводится по классической схеме.

Как следствие из теоремы 2 вытекает теорема, обобщающая известную теорему Пэли—Винера [9 — 11].

Теорема 3. *Пусть система вещественных функций* $\alpha_{ij}(t)$, $i=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,N}$, *ортонормирована в* $L_2(Q_\infty)$, *а функция* $F(u_{11},\ldots,u_{1N};\ldots;u_{n1},\ldots,u_{nN})$ *интегрируема по Лебегу в* R_{nN}.

Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_{C^0_{n,\infty}} F\Big[\int\limits_{Q_\infty} \alpha_{11}(t)\, dx_1(t), \ldots, \int\limits_{Q_\infty} \alpha_{1N}(t)\, dx_1(t); \ldots; \int\limits_{Q_\infty} \alpha_{n1}(t)\, dx_n(t), \ldots$$

$$\ldots, \int\limits_{Q_\infty} \alpha_{nN}(t)\, dx_n(t)\Big] W(dx) = \pi^{-nN/2} \int\limits_{R_{nN}} F(u_{11},\ldots,u_{1N};\ldots;u_{n1},\ldots,u_{nN}) \times$$

$$\times \exp\Big\{-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N} u^2_{ij}\Big\} \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{N} dx_i dx_j.$$

Теорема 4. *Пусть* $F(y)$ — *интегрируемый на* $C^0_{n,\infty}$ *функционал;* $K_{ij}(t,s) \in C(Q^2_\infty)$, $K_{ij}(t,s)|_{t_k=0} = 0$, $k=\overline{1,\infty}$, $D_t[K_{ij}(t,s)] \in L_2(Q^2_\infty)$, $i,j = \overline{1,n}$;

$$\Delta = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \sum_{l_1,\ldots,l_\nu=1}^{n} \int\limits_{Q_\infty}^{(\nu)}\!\!\cdots\!\int\limits_{Q_\infty} \Big|\, \| K_{l_i l_j}(t^i, t^j) \|^n_{i,j=1} \Big| \prod_{k=1}^{\nu} dt^k \neq 0,$$

$$t^k = (t^{k_1}_1, \ldots, t^{k_m}_m, \ldots). \qquad (7)$$

Тогда при преобразовании

$$y_i(t) = x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{Q_\infty} K_{ij}(t,s)\, x_j(s)\, ds, \quad i=\overline{1,n}, \qquad (8)$$

справедливо равенство

$$\int\limits_{C^0_{n,\infty}} F(y)\,W(dy) = \int\limits_{C^0_{n,\infty}} F\Big(x_1 + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{Q_\infty} K_{1j}(t,s)\,x_j(s)\,ds; \ldots; x_n +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{Q_\infty} K_{nj}(t,s)\,x_j(s)\,ds\Big)\,\rho(x)\,W(dx), \tag{9}$$

где

$$\rho(x) = |\Delta| \exp\{-\Phi(x)\}, \tag{10}$$

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q_\infty} \sum_{j=1}^{n} \Big\{D_t\Big[\int\limits_{Q_\infty} K_{ij}(t,s)\,x_j(s)\,ds\Big]\Big\}^2 dt -$$

$$-2 \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{Q_\infty} \Big\{D_t\Big[\int\limits_{Q_\infty} K_{ij}(t,s)\,x_j(s)\,ds\Big]\Big\}\,dx_i(t). \tag{11}$$

Преобразованию (18) соответствует в $C^0_{n,m}$ преобразование

$$y^i_m(t_{(m)}) = x^i_m(t_{(m)}) + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{Q_m} K^m_{ij}(t_{(m)}, s_{(m)})\,x^j_m(s_{(m)})\,ds_{(m)}. \tag{12}$$

Применяя преобразование (12) к интегралу в правой части (1), в силу теоремы 1 [4] получаем

$$\int\limits_{C^0_{n,m}} F_m(y_m)\,W(dy_m) = \int\limits_{C^0_{n,m}} F_m\Big[x^1_m + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{Q_m} K^m_{ij}(t_{(m)}, s_{(m)})\,x^j_m(s_{(m)})\,ds_{(m)}; \ldots$$

$$\ldots; x^n_m + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{Q_m} K^m_{ij}(t_{(m)}, s_{(m)})\,x^j_m(s_{(m)})\,ds_{(m)}\Big]\,\rho_m(x_m)\,W(dx_m), \tag{13}$$

где

$$\rho_m(x_m) = |\Delta_m| \exp\{-\Phi_m(x_m)\},$$

$$\Delta_m = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \sum_{l_1,\ldots,l_\nu=1}^{n} \int\limits_{Q_m} \overset{(\nu)}{\cdots} \int\limits_{Q_m} \Big| \| K^m_{l_i l_j}(t^i_{(m)}, t^j_{(m)}) \|^n_{l_i,l_j=1} \Big| \prod_{k=1}^{\nu} dt^k_{(m)},$$

$$t^k_{(m)} = (t^{k_1}_1, \ldots, t^{k_m}_m),$$

$$\Phi_m(x_m) = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q_m} \Big\{\sum_{j=1}^{n} D_{t_{(m)}}\Big[\int\limits_{Q_m} K^m_{ij}(t_{(m)}, s_{(m)})\,x^j_m(s_{(m)})\,ds_{(m)}\Big]\Big\}^2 dt_{(m)} +$$

$$+2 \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{Q_m} \Big\{D_{t_{(m)}}\Big[\int\limits_{Q_m} K^m_{ij}(t_{(m)}, s_{(m)})\,x^j_m(s_{(m)})\,ds_{(m)}\Big]\Big\}\,dx^j_m(t_{(m)}).$$

Предельный переход в (13) при $m \to \infty$ и завершает доказательство теоремы.

Теорема 5. *Пусть $F(y)$ — интегрируемый на $C^0_{n,\infty}$ функционал;*

$$K_{ij}(t,s) = \begin{cases} p_{ij}(t,s) \ \text{на} \ D_1 = \{0 \leqslant s_k < t_k \leqslant 1, \quad k = \overline{1,\infty}\}, \\ \frac{1}{2}\, p_{ij}(t,s) \ \text{на} \ D_2 = \{0 \leqslant s_k = t_k \leqslant 1, \quad k = \overline{1,\infty}\}, \\ 0 \ \text{на} \ D_3 = Q^2_\infty \diagdown (D_1 \cup D_2), \end{cases}$$

$$p_{ij}(t,s) \in C(D_1 \cup D_2), \quad D_t[p_{ij}(t,s)] \in L_2(D_1 \cup D_2), \quad ij = \overline{1,n}.$$

Тогда при преобразовании

$$y_i(t)=x_i(t)+\sum_{j=1}^{n}\int_{Q_\infty}K_{ij}(t,s)\,x_j(s)\,ds,\quad i=\overline{1,n},$$

справедлива формула (9), *где* $\rho(x)$ *определяется формулой* (10) *при*

$$|\Delta|=\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{Q_\infty}p_{ii}(t,t)\,dt\right\},$$

$$\Phi(x)=\sum_{i=1}^{n}\int_{Q_\infty}\left\{\sum_{j=1}^{n}D_t\left[\int_0^t p_{ij}(t,s)\,x_j(s)\,ds\right]\right\}^2dt+$$

$$+\sum_{ij=1}^{n}\int_{Q_\infty}\left\{D_t\left[\int_0^t p_{ij}(t,s)\,x_j(s)\,ds\right]\right\}dx_i(t).$$

Доказательство теоремы 5 аналогично доказательству теоремы 4, только при этом используется теорема 2 [4].

3. Изучим вопрос о представлении решений систем линейных интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода, а также системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Рассмотрим систему линейных интегральных уравнений Фредгольма

$$u_i(t)+\sum_{j=1}^{n}\int_{Q_\infty}K_{ij}(t,s)\,u_j(s)\,ds=f_i(t),\quad i=\overline{1,n}. \tag{14}$$

Теорема 6. *Пусть* $f_i(t)\in C^0_\infty$, $D_t[f_i(t)]\in L_2(Q_\infty)$; $K_{ij}(t,s)\in C(Q^2_\infty)$, $K_{ij}(t,s)|_{t_k=0}=0$, $k=\overline{1,\infty}$, $D_t[K_{ij}(t,s)]\in L_2(Q^2_\infty)$, $i,j=\overline{1,n}$.

Тогда решение системы (14) *выражается формулой*

$$u_i(t)=\int_{C^0_{n,\infty}}x_i(t)\,\rho(x)\,W(dx),\quad i=\overline{1,n},$$

где

$$\rho(x)=|\Delta|\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\int_{Q_\infty}\{D_s[f_i(s)]\}^2ds+\sum_{i=1}^{n}\int_{Q_\infty}D_s[f_i(s)]\,d_sF_i(x,s)-\Phi(x)\right\}, \tag{15}$$

Δ *определено в теореме* 4,

$$F_i(x,s)=x_i(s)+\sum_{j=1}^{n}\int_{Q_\infty}K_{ij}(s,t)\,x_j(t)\,dt,\quad i=\overline{1,n}, \tag{16}$$

$$\Phi(x)=\sum_{i=1}^{n}\int_{Q_\infty}\left\{\sum_{j=1}^{n}D_t\left[\int_{Q_\infty}K_{ij}(t,s)\,x_j(s)\,ds\right]\right\}^2dt+$$

$$+2\sum_{i,j=1}^{n}\int_{Q_\infty}D_t\left[\int_{Q_\infty}K_{ij}(t,s)\,x_j(s)\,ds\right]dx_i(t). \tag{17}$$

Рассмотрим систему линейных интегральных уравнений Вольтерра

$$u_i(t)+\sum_{j=1}^{n}\int_0^t p_{ij}(t,s)\,u_j(s)\,ds=f_i(t),\quad i=\overline{1,n}. \tag{18}$$

Теорема 7. *Пусть* $f_i(t)\in C^0_\infty$, $D_t[f_i(t)]\in L_2(Q_\infty)$; $p_{ij}(t,s)\in C(Q)$, $D_t[p_{ij}(t,s)]\in L_2(Q)$, $Q=\{0\leqslant s_k\leqslant t_k\leqslant 1,\ k=\overline{1,\infty}\}$, $i,j=\overline{1,n}$.

Тогда решение системы (18) *имеет вид*

$$u_i(t) = \int\limits_{C^0_{n,\infty}} x_i(t)\,\rho(x)\,W(dx), \quad i = \overline{1, n},$$

где $\rho(x)$ *определяется формулой* (15) *при*

$$F_i(x, s) = x_i(s) + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{Q_\infty} K_{ij}(s, t)\, x_j(t) dt, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q_\infty} \Big\{\sum_{j=1}^{n} D_t \Big[\int\limits_0^t p_{ij}(t, s)\, x_j(s)\, ds\Big]\Big\}^2 dt +$$

$$+ 2 \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{Q_\infty} \Big\{D_t \Big[\int\limits_0^t p_{ij}(t, s)\, x_j(s)\, ds\Big]\Big\}\, dx_i(t),$$

Δ *определено в теореме* 5. ∎

Доказательство теорем 6 и 7 аналогично доказательству соответствующих теорем в случае конечного числа переменных [3, 4].

Рассмотрим теперь характеристическую задачу

$$D_{t^{n_i}}[u_i(t)] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{\nu_i^\tau = \overline{1, n_i^\tau} \\ \tau = \overline{1, \infty}}} a^{ij}_{\nu_i}(t)\, D_{t^{n_i - \nu_i}}[u_i(t)] = f_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \tag{19}$$

$$\left. \frac{\partial^{e_i^\tau} u_i}{\partial t_\tau^{e_i^\tau}} \right|_{t_\tau = 0} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad l_i^\tau = \overline{0, n_i^\tau - 1}, \quad \tau = \overline{1, \infty}. \tag{20}$$

Теорема 8. *Пусть* $f_i(t) \in C(Q_\infty)$, $a^{ij}_{\nu_i}(t) \in C(Q_\infty)$, $D_t[a^{ij}_{\nu_i}(t)] \in L_2(Q_\infty)$, $i, j = \overline{1, n}$.

Тогда решение задачи (19), (20) *выражается формулой*

$$u_i(t) = \int\limits_0^t \prod_{\tau=1}^{\infty} \frac{(t_\tau - s_\tau)^{n_i^\tau - 1}}{(n_i^\tau - 1)!}\, \varphi_i(s)\, ds,$$

где

$$\varphi_i(t) = \int\limits_{C^0_{n,\infty}} x_i(t)\,\rho(x)\,W(dx), \quad i = \overline{1, n}, \tag{21}$$

$$\rho(x) = \Delta \exp\Big\{- \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q_\infty} \{D_s[f_i(s)]\}^2 ds + 2 \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q_\infty} \{D_s[f_i(s)]\}\, d_s F_i(x, s) - \Phi(x)\Big\}, \tag{22}$$

$$F_i(x, t) = x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{Q_\infty} K_{ij}(t, s)\, x_j(s)\, ds, \quad i = \overline{1, n}, \tag{23}$$

$$\Phi(x) = \sum \int\limits_{Q_\infty} \Big\{\sum D_t \Big[\int\limits_0^t K_{ij}(t, s)\, x_j(s)\, ds\Big]\Big\}^2 dt +$$

$$+ 2 \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{Q_\infty} \Big\{D_t \Big[\int\limits_0^t K_{ij}(t, s)\, x_j(s)\, ds\Big]\Big\}\, dx_i(t), \tag{24}$$

$$K_{ij}(t, s) = \sum_{\substack{\nu_i^\tau = \overline{1, n_i^\tau - 1} \\ \tau = \overline{1, \infty}}} a_{\nu_i}^{ij}(t) \prod_{\tau=1}^{\infty} \frac{(t_\tau - s_\tau)^{\nu_i^\tau - 1}}{(\nu_i^\tau - 1)!}. \qquad (25)$$

Доказательство. Обозначим $D_t n_i [u_i(t)] = \varphi_i(t)$. Используя условия (20) и формулу Коши, сводим задачу (19), (20) к системе интегральных уравнений

$$\varphi_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^t K_{ij}(t, s) \varphi_i(s) ds = f_i(t), \quad i = \overline{1, n},$$

решение которой согласно теореме 7 выражается формулой (21). Отсюда получаем утверждение теоремы.

1. *Далецкий Ю. Л.* О представимости решений операторных уравнений в виде континуальных интегралов // Докл. АН СССР.— 1960.— **134**, № 5.— С. 1010—1013.
2. *Далецкий Ю. Л.* Континуальные интегралы, связанные с некоторыми дифференциальными уравнениями // Там же.— 1961.— **137**, № 2.— С. 268—271
3. *Ostrom T. G.* The solution of linear integral equation by means of wiener integrals // Bull. Amer. Math. Soc.— 1949.— **55**, N 4.— P. 343—354.
4. *Козак П. П.* О представимости решений характеристической задачи для одного линейного интегрального уравнения в виде континуального интеграла // Укр. мат. журн. — 1974.— **26**, № 1.— С. 84—89.
5. *Козак П. П.* Про зображення розв'язку характеристичної задачі для системи лінійних рівнянь вищих порядків у вигляді континуального інтеграла // Допов. АН УРСР. Сер. А.— 1975.— № 3.— С. 198—201.
6. *Козак П. П., Кадоб'янський Р. М.* Зображення розв'язків характеристичної задачі для системи лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків у вигляді інтеграла за вінерівською мірою // Там же.— 1979.— № 10.— С. 792—794.
7. *Билущак Г. И., Козак П. П.* Винеровская мера в пространстве непрерывных функций бесконечного числа переменных // Там же.— 1984.— № 8.— С. 5—8.
8. *Козак П. П.* Деякі зв'язки диференціальних рівнянь з континуальним інтегралом // Там же.— 1972.— № 11.— С. 978—982.
9. *Paley R., Wiener N., Zygmund A.* Notes on radom functions // Math. Z.— 1933.— **37**.— P. 647—668.
10. *Тобиас Т.* О среднеквадратичном приближении линейных функционалов // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук.— 1964.— **13**, № 1.— С. 70—82.
11. *Козак П. П.* О преобразовании кратных винеровских интегралов в пространстве непрерывных функций многих переменных при нелинейном преобразовании переменных // Укр. мат. журн.— 1978.— **30**, № 6.— С. 738—748.

Львов. политехн. ин-т. Получено 11.03.86