1. *Плотников В. А.* Асимптотические методы в задачах оптимального управления: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Л., 1980.— 31 с.
2. *Витюк А. Н.* О существовании решений задачи Гурса для гиперболических дифференциальных включений в частных производных.— Одесса, 1982.— 34 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 5982-82.
3. *Киселевич М.* Теорема типа Н. Н. Боголюбова для гиперболических уравнений // Укр. мат. журн.— 1970.— **22**, № 3.— С. 374—379.

Одес. ун-т Получено 02.07.85

УДК 530.1

Н. В. Жернаков

Интегрирование цепочек Тоды в классе операторов Гильберта — Шмидта

Хорошо известны построения решений бесконечной в обе стороны цепочки Тоды

$$\dot{a}_n(t) = 2^{-1}a_n(t)(b_{n+1}(t) - b_n(t)), \quad \dot{b}_n(t) = a_n^2(t) - a_{n-1}^2(t), \tag{1}$$
$$a_n(t) > 0, \quad b_n(t) \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \cdot = d/dt, \quad t \in [0, \infty),$$

в периодическом случае и при наличии рассеяния, т. е. когда $a_n(t) \to 2^{-1}$, $b_n(t) \to 0$ при $|n| \to \infty$ [1—3]. В данной статье (1) интегрируется в классе последовательностей $a(t) = (a_n(t))_{n\in\mathbb{Z}}$, $b(t) = (b_n(t))_{n\in\mathbb{Z}}$, таких, что при каждом $t \in [0, \infty)$ $a(t) \in l_2$, $b(t) \in l_2$.

Оказывается, что изучение такой цепочки можно свести к решению задачи интерполяции мероморфной функции, которое, в свою очередь, эквивалентно решению линейной алгебраической системы бесконечного числа уравнений с бесконечным числом неизвестных. Предлагаемый подход связан с методом обратной спектральной задачи, применявшимся в [4], с введением вспомогательного спектра и методикой изучения его эволюции, использовавшимися при решении периодической цепочки Тоды [2]. Полученные результаты обобщаются на случай, когда $a_n(t) \to 0$, $b_n(t) \to 0$ при $|n| \to \infty$.

1. Вспомогательный спектр разностного оператора. Рассмотрим разностный оператор Гильберта — Шмидта

$$(L\varphi)(n) = a_{n-1}\varphi(n-1) + b_n\varphi(n) + a_n\varphi(n+1), \quad (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_2,$$
$$(b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_2, \quad (\varphi(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in l_2, \quad a_n > 0, \quad b_n \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Пусть последовательность $0 = \lambda_0 < \ldots < \lambda_n < \ldots < \lambda_1$ — его спектр (ниже, за исключением п. 2, для удобства изложения дополнительно предполагается неотрицательность L). Рассмотрим матрицу Вейля $M(z) = (M_{\alpha,\beta}(z))_{\alpha,\beta=-1,0}$ оператора L (сведения по спектральной теории разностных операторов см. в [7], гл. VII, § 3). Будем называть интервалы $[\lambda_{k+1}, \lambda_k]$ лакунами, а корни уравнения $M_{0,0}(z) = 0$ — вспомогательным спектром. Если занумеровать эти нули функции в порядке убывания $\mu_1 > \mu_2 > \ldots \ldots > \mu_n > \ldots > 0$, то они будут расположены по одному в лакунах $[\lambda_1, \lambda_2]$, $[\lambda_2, \lambda_3], \ldots, [\lambda_{n+1}, \lambda_n], \ldots$, причем с краем лакуны могут совпадать лишь два нуля одновременно, т. е. $((\mu_k = \lambda_k) \Leftrightarrow (\mu_{k+1} = \lambda_k),\ k = 1, 2, \ldots)$. Для элементов матрицы Вейля в области $\mathbb{C}^1 \setminus \{\lambda_k : k = 0, 1, 2, \ldots\}$ справедливо тождество [6]

$$-a_{-1}(M_{0,0}(z)M_{-1,-1}(z) - M_{0,-1}^2(z)) = M_{0,-1}(z). \tag{3}$$

Подставив в последнее μ_k, нетрудно убедиться, что $2a_{-1}M_{0,-1}(\mu_k) - 1 = \delta_k$, где $\varepsilon_k = \pm 1$. Таким образом, с каждым оператором L ассоциируется набор спектральных данных $((\lambda_k)_{k=0}^\infty, (\mu_k)_{k=1}^\infty, (\varepsilon_k)_{k=1}^\infty)$: $(\lambda_k)_{k=0}^\infty$ — спектр оператора, $(\mu_k)_{k=1}^\infty$ — вспомогательный спектр и $(\varepsilon_k)_{k=1}^\infty$ — набор, состоящий из бесконечной подпоследовательности $+1$ и бесконечной подпоследовательности -1. Справедливо и обратное.

Теорема 1. *Пусть заданы 3 последовательности:* 1) $(\lambda_k)_{k=0}^{\infty} \in l_2$, $0 = \lambda_0 < \ldots < \lambda_n < \ldots < \lambda_1$; 2) $(\mu_k)_{k=1}^{\infty}$ $\mu_k \in [\lambda_{k+1}, \lambda_k]$, $k = 1, 2, \ldots$; 3) $(\varepsilon_k)_{k=1}^{\infty}$ *состоящая из бесконечной подпоследовательности $+1$ и бесконечной подпоследовательности -1, и выполнено условие* $((\mu_k = \lambda_k) \Leftrightarrow (\mu_{k+1} = \lambda_k)$, $k = 1, 2, \ldots)$. *Тогда существует единственный разностный оператор вида* (2), *у которого набор спектральных данных совпадает с тремя исходными последовательностями. При этом справедлива формула следов*

$$b_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \mu_k). \tag{4}$$

Отметим, что функция $M_{0,0}(z)$ находится из равенства

$$M_{0,0}(z) = \exp\left(z^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \mu_k)\right) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \mu_k z^{-1}) \exp(\mu_k z^{-1}) \times$$
$$\times \left[-z \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda_k z^{-1}) \exp(\lambda_k z^{-1})\right]^{-1}. \tag{5}$$

Функция $M_{0,-1}(z)$ интерполируется по значениям в точках μ_k, $k = 1, 2, \ldots$, а $M_{-1,-1}(z)$ непосредственно находится из тождества (3).

Спектральный смысл набора $(\mu_k)_{k=1}^{\infty}$ следующий: множества $\{\mu_{l(k)} : \varepsilon_{l(k)} = 1\}$ и $\{\mu_{s(k)} : \varepsilon_{s(k)} = -1\}$ образуют спектр и нули функции Вейля разностных операторов на полуоси $(L_1\varphi)(n) = a_{n-1}\varphi(n-1) + b_n\varphi(n) + a_n\varphi(n+1)$ и $(L_2\varphi)(n) = a_{-n-1}\varphi(n-1) + b_{-n-1}\varphi(n) + a_{-n-2}\varphi(n+1)$, $n = 1, 2, \ldots$, $(\varphi(n))_{n=1}^{\infty} \in l_2$, $a_{-1} = 0$, соответственно.

2. Эволюция матрицы Вейля. Будем рассматривать цепочку Тоды (1) в классе последовательностей $a(t)$, $b(t)$ таких, что $\sup\limits_{[0,T]} \sup\limits_{n \in \mathbb{Z}} \max \times$ $\times (|\dot{a}_n(t)|, |\dot{b}_n(t)|, |a_n(t)|, |b_n(t)|) < \infty$ для всех $T \in (0, \infty)$. Известно, что в этом случае система (1) эквивалентна уравнению Лакса $\dot{L}(t) = [L(t), A(t)]$, где $(L(t)\varphi)(n) = a_{n-1}(t)\varphi(n-1) + b_n(t)\varphi(n) + a_n(t)\varphi(n+1)$, $(A(t)\varphi)(n) = 2^{-1}(a_{n-1}(t)\varphi(n-1) - a_n(t)\varphi(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, — разностные операторы в l_2. Оказывается, что резольвента $R_z(L(t))$ удовлетворяет тому же уравнению, т. е. $\dot{R}_z(L(t)) = [R_z(L(t)), A(t)]$. Подсчитав билинейные формы вида $(A\delta_i, \delta_j)$, $i, j = -1, 0$, (δ_j — последовательность, у которой j-я координата равна 1, а остальные равны 0) справа и слева, получим уравнение эволюции элементов матрицы Вейля $M(z, t)$ оператора $L(t)$:

$$\dot{M}_{0,0}(z,t) = (b_0(t) - z) M_{0,0}(z,t) + 2a_{-1}(t) M_{0,-1}(z,t) - 1,$$
$$\dot{M}_{0,-1}(z,t) = 2^{-1}(b_0(t) - b_{-1}(t)) M_{0,-1}(z,t) + a_{-1}(t)(M_{-1,-1}(z,t) - M_{0,0}(z,t)), \tag{6}$$
$$\dot{M}_{-1,-1}(z,t) = (z - b_{-1}(t)) M_{-1,-1}(z,t) + 2a_{-1}(t) M_{0,-1}(z,t) + 1.$$

3. Уравнение эволюции вспомогательного спектра. Пусть $a(t) \in l_2$, $b(t) \in l_2$ — решения цепочки Тоды (1). В каждый момент времени с такими последовательностями свяжем оператор $L(t)$ (см. (2)), а с последним — набор спектральных данных $((\lambda_k(t))_{k=0}^{\infty}, (\mu_k(t))_{k=1}^{\infty}, (\varepsilon_k(t))_{k=1}^{\infty})$.

Поскольку (1) описывает изоспектральную деформацию $L(t)$, то $\lambda_k(t) \equiv \equiv \lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$ Можно показать, что $\mu_k(t)$ является дифференцируемой функцией времени внутри лакуны. Подставляя $\mu_k(t)$ в третье уравнение системы (6), получаем

$$\dot{\mu}_k(t) = \varepsilon_k(t) \left(\left. \frac{\partial M_{0,0}(z,t)}{\partial z} \right|_{z = \mu_k(t)} \right)^{-1}. \tag{7}$$

Поясним качественную картину движения вспомогательного спектра. Оказывается, что если $\mu_k(0)$ не совпадает с краем лакуны, то точка $\mu_k(t)$ в течение некоторого времени движется по ней монотонно. Допустим, что в соседних лакунах $[\lambda_{k+1}, \lambda_k]$ и $[\lambda_k, \lambda_{k-1}]$ знаки равны $\varepsilon_k(t) = 1$ и $\varepsilon_{k-1}(t) = -1$. Тогда $\mu_k(t)$ и $\mu_{k-1}(t)$ эволюционируют навстречу одна другой и за конечное время достигают края лакуны λ_k.

После этого знаки в лакунах изменяются на противоположные и точки расходятся. Таким образом, наблюдается эффект поляризации: в каждой лакуне устанавливается знак + и в дальнейшем не изменяется.

4. Задача интерполяции мероморфной функции. Уравнения эволюции вспомогательного спектра можно проинтегрировать. Процедура перехода от (7) к интегралам движения представляет собой модификацию схемы, предложенной Кацем и ван Мербеке в периодическом случае [2].

Теорема 2. *Пусть $a(t) \in e_2$, $b(t) \in e_2$ — решение цепочки Тоды* (1), *а $(\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$, $(\mu_k(t))_{k=1}^{\infty}$, $(\varepsilon_k(t))_{k=1}^{\infty}$ — соответствующий им набор спектральных данных и $f(z, t)$ — мероморфная от z^{-1} функция:*

$$f(z, t) = \exp\left(z^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k(t)(\lambda_k - \mu_k(t))\right)\prod_{k=1}^{\infty}(1 - \mu_k(t) z^{-1})\exp(\mu_k(t) z^{-1}). \quad (8)$$

Тогда справедливы равенства

$$f(\lambda_k, t) = \exp\left(-\int_0^t b_0(\tau)\, d\tau\right) e^{\lambda_k t} f(\lambda_k, 0),$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_k(t)}{\lambda_k}\right)^{\varepsilon_k(t)} = \exp\left(-\int_0^t b_0(\tau)\, d\tau\right)\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_k(0)}{\lambda_k}\right)^{\varepsilon_k(0)}. \quad (9)$$

Общая конструкция построения решения рассматриваемой цепочки содержится в теореме 3.

Теорема 3. *Для начальных данных $a(0) \in l_2$, $b(0) \in l_2$ цепочка* (1) *имеет единственное решение $a(t) \in l_2$, $b(t) \in l_2$. Оно находится по следующей схеме:*

I *По $a(0)$, $b(0)$ вычислим набор спектральных данных $((\lambda_j)_{j=0}^{\infty}$, $(\mu_j(0))_{j=1}^{\infty}$, $(\varepsilon_j(0))_{j=1}^{\infty})$. С помощью формулы* (7) *зададим $f(z, 0)$.*

II. *Проинтерполируем функцию $f(z, t)$ вида* (7) *по значениям в точках λ_k, $k = 1, 2, \ldots$,*

$$f(\lambda_k, t) = C(t) e^{\lambda_k} f(\lambda_k, 0)$$

и равенству

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_k(t)}{\lambda_k}\right)^{\varepsilon_k(t)} = C(t)\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\mu_k(0)}{\lambda_k}\right)^{\varepsilon_k(0)}.$$

Для такой задачи решение существует и единственно, т. е. $(\mu_k(t))_{k=1}^{\infty}$, $(\varepsilon_k(t))_{k=1}^{\infty}$ и константа $C(t)$ восстанавливаются однозначно.

III. *Пусть набор $((\lambda_j)_{j=0}^{\infty}$, $(\mu_j(t))_{j=1}^{\infty}$, $(\varepsilon_j(t))_{j=1}^{\infty})$ найден. Построим матрицу Вейля $M(z, t)$. С помощью обратного преобразования Стилтьеса восстановим матричную меру $d\Sigma(\lambda, t)$. Коэффициенты $a_n(t)$, $b_n(t)$ находятся путем псевдоортогонализации $1, \lambda, \lambda^2, \ldots$ по $d\Sigma(\lambda, t)$* [7].

Замечания к теореме 3.1. При вычислении $a_n(t)$, $b_n(t)$ можно избежать решения обратной задачи (п. III). Для этого при каждом $k \in \mathbb{Z}$ рассмотрим последовательности $a^k(0) = (a_{n+k}(0))_{n\in\mathbb{Z}}$ и $b_k(0) = (b_{n+k}(0))_{n\in\mathbb{Z}}$ и применим к ним процедуру, описанную в пп. I и II. В результате восстановим вспомогательный спектр $(\mu_j^k(t))_{j\in\mathbb{Z}}$. Найдем $b_k(t)$ из формулы следов (4), а $a_k(t)$ — из уравнения $\dot{a}_k(t) = 2^{-1} a_k(t)(b_{k+1}(t) - b_k(t))$.

2. Можно показать, что решение задачи интерполяции мероморфной функции эквивалентно решению линейной системы $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k(t)}{\lambda_k - \mu_j(0)} = 0$ $(\varepsilon_j(0) = 1)$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(t) e^{\lambda_k t}}{\lambda_k - \mu_j(0)} = -1$ $(\varepsilon_j(0) = -1)$, $\sum_{k=0}^{\infty} s_k(t) = 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} |s_k(t)| < \infty$.

Зная $(s_k(t))_{k=0}^{\infty}$, мероморфную функцию $f(z, t)$ и $C(t)$ восстанавливаем по формулам

$$f(z, t) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k(t) e^{\lambda_k t}}{\lambda_k - z} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k(t)}{\lambda_k - z} \right)^{-1}, \quad C(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k t} s_k(t).$$

5. Асимптотика. С помощью эффекта поляризации (см. п. 2) и формулы следов (4) можно доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть* $a_n(t) \in l_2$, $b_n(t) \in l_2$ *являются решениями цепочки Тоды* (1). *Тогда* $a(t) \to 0$, $b(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Отметим, что с помощью рассматриваемой методики можно изучить конечную и полубесконечную цепочку Тоды. Первая сводится к задаче интерполяции рациональной функции, вторая формально вкладывается в изложенную выше схему, если $\varepsilon_j(0)$, за исключением конечного числа, равны 1. Так же могут быть получены уже известные асимптотические формулы для конечной цепочки Тоды [2] и в полубесконечном случае [8].

1. *Теория* солитонов. Метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский.— М. : Наука, 1980.— 320 с.
2. *Кас М., van Moerbeke*. On some periodic Toda lattice // Proc. Nat. Ocad. Sci.— 1975.— **72**, N 4.— P. 1627—1629.
3. *Тода М*. Теория нелинейных решеток.— М. : Мир, 1982.— 262 с.
4. *Березанский Ю. М*. Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной спектральной задачи // Докл. АН СССР.— 1985.— **281**, № 1.— С. 16—19.
5. *Жернаков Н. В*. Прямая и обратная задача для периодической якобиевой матрицы // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 6.— С. 785—788.
6. *Березанский Ю. М*. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 800 с.
7. *Deift, Li, Tomei*. Toda flow with infinetly many variables // J. Funct. Anal.— 1985.— **64**.— P. 358—402.

Киев. ун-т

Получено 10.02.87

УДК 517.98

П. П. Забрейко, А. Н. Ломакович

Об одном обобщении теоремы Вольтерра

Известная теорема Вольтерра утверждает, что спектральный радиус линейного интегрального оператора

$$Ax(t) = \int_a^t k(t, s) x(s) \, ds \tag{1}$$

с непрерывным ядром $k(t, s)$ в классических пространствах C и L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, соответственно непрерывных на $[a, b]$ и интегрируемых по Лебегу со степенью p на $[a, b]$ функций равен нулю. В других терминах эта теорема формулируется как утверждение об однозначной разрешимости в пространстве непрерывных или соответственно интегрируемых со степенью