4. *Дубинский Ю. А.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Итоги науки и техники.— Соврем. пробл. математики / ВИНИТИ.— 1976.— **9**.— С. 5—130.
5. *Вишик М. И.* О разрешимости краевых задач для квазилинейных параболических уравнений высших порядков // Мат. сб.— 1962.— **59**, вып. 2.— С. 289—325.
6. *Миклюков В. М.* Об асимптотических свойствах субрешений квазилинейных уравнений эллиптического типа и отображений с ограниченным искажением // Там же.— 1980.— **111**, вып. 1.— С. 42—66.
7. *Солонников В. А.* О дифференциальных свойствах слабых решений квазилинейных эллиптических уравнений // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния Мат. ин-та.— 1974.— **39**.— С. 110—120.
8. *Гагнидзе А. Г.* О единственности решений краевых задач для общих параболических систем в неограниченных областях // Успехи мат. наук.— 1985.— **40**, № 5.— С. 223—224.

Ин-т прикл. математики и механики
АН УССР, Донецк

Получено 26.06.85,
после доработки — 26.03.86

УДК 517.92

И. Н. Щитов

Асимптотика решений систем с медленными и быстрыми переменными. II

Рассмотрим систему с медленными и быстрыми переменными,

$$dx/dt = \varepsilon X(t, z, x, \varepsilon t), \quad dz/dt = Z(t, z, x, \varepsilon t), \tag{1}$$

которую после замены $\varepsilon t = \tau$ можно представить в виде

$$dx/d\tau = X(\tau/\varepsilon, z, x, \tau), \quad \varepsilon dz/d\tau = Z(\tau/\varepsilon, z, x, \tau). \tag{2}$$

В предположении, что вырожденная система

$$dx/dt = 0, \quad d\tau/dt = 0, \; dz/dt = Z(t, z, x, \tau) \tag{3}$$

имеет интегральное многообразие S, обладающее некоторым свойством притяжения, и существует среднее $Y(x, \tau)$ функции $X(t, z, x, \tau)$, вычисленное «на» многообразии S, в работе с помощью усредненной системы

$$dy/dt = \varepsilon Y(y, \varepsilon t) \tag{4}$$

построена в первом приближении асимптотика решений системы (1) на отрезке $[0, T_0/\varepsilon]$ (для τ соответственно на отрезке $[0, T_0]$). Доказана теорема, содержащая в себе как частные случаи теорему А. Н. Тихонова [1, 2], теорему Л. С. Понтрягина и Л. В. Родыгина [3] и теорему В. М. Волосова [4, 5]. Она обобщает также результаты работы [6].

1. Пусть функции $X(t, z, x, \tau)$ и $Z(t, z, \tau)$ определены и непрерывны в области $Q \subset R_t^1 \times R_z^n \times R_x^m \times R_\tau^1$; обозначим через Ω проекцию Q на $R_x^m \times R_\tau^1$ и положим $Q_{t_0} = Q \cap \{t = t_0\}$, $Q_{x_0,\tau_0} = Q \cap \{x = x_0\} \cap \{\tau = \tau_0\}$ и т. д.

Для решений вырожденной системы $x = \text{const}$, $\tau = \text{const}$, а быстрая составляющая z определяется из системы

$$dz/dt = Z(t, z, x, \tau). \tag{5}$$

Будем считать, что А $(t_0, z_0, x, \tau) \in Q$ существует единственное решение $z = \varphi(t, t_0, z_0, x, \tau)$ системы (5), проходящее через точку (t_0, z_0); это решение определено при всех $t \geqslant t_0$ и лежит в $Q_{x,\tau}$.

Допустим, что $\forall (x, \tau) \in \Omega$ система (5) имеет $k+1$-мерное интегральное многообразие $S_{x,\tau} \subset Q_{x,\tau}$; это означает, что любая интегральная кривая, имеющая с $S_{x,\tau}$ общую точку (t_0, z_0) принадлежит $S_{x,\tau}$ при всех $t \geqslant t_0$. Будем считать, что многообразие $S_{x,\tau}$ задается уравнением

$$z = f(t, p, x, \tau), \quad p \in G, \tag{6}$$

где G — некоторая область в R^k и ранг матрицы $\partial f/\partial p$ равен k; t и p задают при этом координаты на $S_{x,\tau}$.

Рассмотрим интегральное многообразие S вырожденной системы (3), которое задается формулой

$$S = \{(t, z, x, \tau) \in Q : z = f(t, p, x, \tau), \quad p \in G\}. \tag{7}$$

Определение 1. *Интегральное многообразие S системы* (3) *называется равномерно притягивающим в Q, если*

$$\lim_{T\to\infty} \inf_{p\in G} \| \varphi(t_0 + T, t_0, z_0, x, \tau) - f(t_0 + T, p, x, \tau) \| = 0 \tag{8}$$

равномерно по $(t_0, z_0, x, \tau) \in Q$.

Из определения 1 следует, в частности, что каждое интегральное многообразие $S_{x,\tau}$ является равномерно притягивающим в $Q_{x,\tau}$.

Подставляя (6) в (5) и разрешая относительно dp/dt (что возможно, так как $S_{x,\tau}$ — интегральное многообразие), можно прийти к системе

$$dp/dt = [(\partial f/\partial p)^t \, \partial f/\partial p]^{-1} (Z - \partial f/\partial t) = \Phi(t, p, x, \tau), \tag{9}$$

полученной «сведением» системы (5) на $S_{x,\tau}$.

Пусть $p = \theta(t, t_0, p_0, x, \tau)$ — общее решение системы (9). Тогда решения системы (5), лежащие на $S_{x,\tau}$ имеют вид $z = f(t, \theta(t, t_0, p_0, x, \tau), x, \tau)$.

Определение 2. *Функция $Y(x, \tau)$ называется средним в Ω функции $X(t, z, x, \tau)$ вдоль интегрального многообразия S вырожденной системы* (3), *если* $\mathrm{A}(x, \tau) \in \Omega$ *существует равномерный по* t_0, p_0, x, τ *и не зависящий от* t_0 *и* p_0 *предел*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} X(t, f(t, \theta(t, t_0, p_0, x, \tau), x, \tau), x, \tau)\, dt = Y(x, \tau). \tag{10}$$

Определение 3. *Окрестность V многообразия S в Q назовем нормальной, если существует отображение $\Pi : V \to S$ класса C^1, переводящее точки $(t, z, x, \tau) \in V$ в точки $(t, \overline{\Pi}(t, z, x, \tau), x, \tau) \in S$, причем при фиксированных t, x, τ отображение $\overline{\Pi}$ является проекцией $V_{t,x,\tau}$ на многообразие $S_{t,x,\tau}$ вдоль нормали к $S_{t,x,\tau}$.*

Отметим, что ограничение Π на S является тождественным отображением, а дифференциал $d\Pi$ переводит касательные к S векторы в себя, так что справедливо тождество

$$\frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial t}(t, z, x, \tau) + \frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial z}(t, z, x, \tau)\, Z(t, z, x, \tau) = Z(t, z, x, \tau). \tag{11}$$

Известно [6, 7], что окрестность $V_{t,x,\tau}$, нормально проектирующаяся на $S_{t,x,\tau}$, существует, например, если $S_{t,x,\tau}$ — многообразие класса C^2; при этом точка $p \in S_{t,x,\tau}$, в которую переходит точка $z \in V_{t,x,\tau}$, определяется как решение уравнения $(\partial f/\partial p)^t (Z - f(p)) = 0$.

2. Пусть $y(t)$ — решение усредненной системы (4), удовлетворяющее тому же начальному условию, что и медленная составляющая $x(t)$ системы (1). Естественно ожидать, что $x(t)$ и $y(t)$ «близки» для $t \in [0, T_0/\varepsilon]$, а быстрая составляющая $z(t)$ системы (1) с ростом t попадает в некоторую окрестность «эволюционирующего интегрального многообразия» $S_{y(t),\varepsilon t}$ и остается в ней.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*:

1) *функции* $X(t, z, x, \tau)$ *и* $Z(t, z, x, \tau)$ *определены и непрерывны в Q и удовлетворяют условию Липшица по z и x, функция $X(t, z, x, \tau)$ непрерывно дифференцируема по z и ограничена*;

2) *вырожденная система* (3) *имеет равномерно притягивающее интегральное многообразие S вида* (7), *лежащее в Q вместе с нормальной δ_0-окрестностью*;

3) *функция* $f(t, p, x, \tau)$ *определена и непрерывна для* $t \geqslant 0$, $p \in G$ *и* $(x, \tau) \in \Omega$, *непрерывно дифференцируема по* t, p *и удовлетворяет условию Липшица по* p, x *и* τ, *матрица* $\partial f/\partial p$ *имеет ранг* k *и* $\| [(\partial f/\partial p)^t \ \ \partial f/\partial p]^{-1} \| \leqslant M$;

4) *функция* $\Phi(t, p, x, \tau)$ *удовлетворяет условию Липшица по* p, x *и* τ, *функция* $\theta(t, t_0, p_0, x, \tau)$ *непрерывна и непрерывно дифференцируема по* t, t_0 *и* p_0;

5) *в* Ω *существует среднее* $Y(x, \tau)$ *функции* $X(t, z, x, \tau)$ *вдоль* S, *функция* $Y(x, \tau)$ *непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по* x;

6) *существует* $N > 0$ *такое, что* $\forall (t_0, p_0, x, \tau) \in S$ *и* $\forall t \geqslant t_0$

$$\left\| \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial p_0} [X(t, f(t, \theta(t, t_0, p_0, x, \tau), x, \tau), x, \tau)] \, dt \right\| \leqslant N.$$

Тогда если $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$ *решение* $x(t, \varepsilon)$, $z(t, \varepsilon)$ *системы* (1) *определено* $\forall t \in [0, T_0/\varepsilon]$ *и кривая* $(t, x(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon), \varepsilon t)$ *лежит в* Q *вместе с* ρ-*окрестностью; то* $\forall \eta > 0$ *найдутся* $\varepsilon_0 > 0$ *и* $t_1 > 0$ *такие, что* $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *решение* $y(t, \varepsilon)$ *усредненной системы* (4), *удовлетворяющее начальному условию* $y(0) = x(0)$, *определено* $\forall t \in [0, T_0/\varepsilon]$ *и*

$$\| x(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon) \| \leqslant \eta \quad \forall t \in [0, T_0/\varepsilon], \tag{12}$$

$$\inf_{p \in G} \| z(t, \varepsilon) - f(t, p, y(t, \varepsilon), \varepsilon t) \| \leqslant \eta \quad \forall t \in [t_1, T_0/\varepsilon]. \tag{13}$$

Доказательство. 1. Выберем число $\eta > 0$ и будем считать, что $\eta < \delta/2$, постоянная Липшица $L > 1/2$ и $\delta \leqslant \min(\delta_0, 1/8 \cdot \eta [L^2 T \exp LT_0]^{-1})$. Пользуясь тем, что S — равномерно притягивающее интегральное многообразие, выберем $t_1 > 0$ таким, чтобы для любых $(t_0, z_0, x, \tau) \in Q$

$$\inf_{p \in G} \| \varphi(t, t_0, z_0, x, \tau) - f(t, p, x, \tau) \| \leqslant \delta/4 \quad \forall t \geqslant t_0 + t_1. \tag{14}$$

По теореме о непрерывной зависимости решений от параметра можно выбрать $\varepsilon_0 > 0$ так, что $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $\forall t_0 \geqslant 0$ на отрезке $[t_0, t_0 + t_1]$ будут выполняться неравенства

$$\| z(t, \varepsilon) - \varphi(t, t_0, z(t_0, \varepsilon), x(t_0, \varepsilon), \varepsilon t_0) \| \leqslant \delta/4, \tag{15}$$

$$\| f(t, p, x(t, \varepsilon), \varepsilon t) - f(t, p, x(t_0, \varepsilon), \varepsilon t_0 \| \leqslant \delta/4. \tag{16}$$

Покажем, что при таком выборе t_1 и ε_0 для любых $t \in [t_1, T_0/\varepsilon]$ справедливо неравенство

$$\inf_{p \in G} \| z(t, \varepsilon) - f(t, p, x(t, \varepsilon), \varepsilon t) \| < \delta. \tag{17}$$

Предполагая противное, допустим, что найдется $t^* \in [t_1, T_0/\varepsilon]$, для которого $\inf_{p \in G} \| z(t^*, \varepsilon) - f(t^*, p, x(t^*, \varepsilon), \varepsilon t^*) \| = \delta$. Положим $t_0 = t^* - t_1$. Тогда $t_0 \geqslant 0$ и из (14), (15) и (16) следует $\inf_{p \in G} \| z(t_0 + t_1, \varepsilon) - f(t_0 + t_1, p, x(t_0 + t_1, \varepsilon), \varepsilon(t_0 + t_1)) \| \leqslant 3/4\delta$, но это противоречит выбору $t^* = t_0 + t_1$.

Таким образом, если ε_0 достаточно мало, быстрая составляющая $z(t, \varepsilon)$ начиная с $t = t_1$ попадает в δ-окрестность $S_{x(t,\varepsilon),\varepsilon t}$ и остается в ней.

2. Используя оператор проектирования из определения нормальной окрестности, для $t \geqslant t_1$ положим $z_\Pi(t, \varepsilon) = \overline{\Pi}(t, z(t, \varepsilon), x(t, \varepsilon), \varepsilon t)$. Тогда, как легко показать с помощью (11), $dz_\Pi/dt = Z(t, z_\Pi(t, \varepsilon), x(t, \varepsilon), \varepsilon t) + Z^*$; при этом $\| Z^* \|$ можно сделать сколь угодно малой выбором достаточно малых δ и ε_0.

Переходя к переменной p, т. е. вводя функцию $p(t, \varepsilon)$, для которой $z_\Pi(t, \varepsilon) = f(t, p(t, \varepsilon), x(t, \varepsilon), \varepsilon t)$, находим

$$dp/dt = \Phi(t, p(t, \varepsilon) \, x(t, \varepsilon), \varepsilon t) + \Phi^*, \tag{18}$$

где Φ^* обладает теми же свойствами, что и Z^*. Уменьшая, если нужно, δ и ε_0, будем считать, что

$$\| \Phi^* \| \leqslant \gamma = 1/8\eta (NLT_0 \exp LT_0)^{-1}. \tag{19}$$

С помощью $p(t, \varepsilon)$ неравенство (16) можно представить в виде

$$\| z(t, \varepsilon) - f(t, p(t, \varepsilon), x(t, \varepsilon), \varepsilon t) \| \leqslant \delta \quad \forall\, t \in [t_1, T_0/\varepsilon]. \tag{20}$$

3. Введем функцию

$$u(t, x, \tau, \varepsilon) = -\int_t^{T_0/\varepsilon} [X(s, f(s, \theta(s, t, p(t), x, \tau) x, \tau) x, \tau) - Y(x, \tau)]\, ds,$$

которая определена для $t \in [t_1, T_0/\varepsilon]$ и для (x, τ), принадлежащих ρ-окрестности кривой $(x(t, \varepsilon), \varepsilon t)$ в Ω.

Из определения среднего вытекает, что существует функция $\alpha(t) > 0$, удовлетворяющая условию $\alpha(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и такая, что

$$\left\| \int_t^T [X(s, f(s, \theta(s, t, p, x, \tau), x, \tau), x, \tau) - Y(x, \tau)]\, ds \right\| \leqslant T\alpha(T)$$

для $(t, p, x, \tau) \in S$ и $T \geqslant t$.

Если положить $\beta(\varepsilon) = T_0\alpha(T_0/\varepsilon)$, то $\beta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Будем считать ε_0 настолько малым, что $\beta^{1/2}(\varepsilon) < \rho$.

Повторяя рассуждения из [9], можно показать, что для $t \in [t_1, T_0/\varepsilon]$

$$\| \varepsilon u(t, x, \tau, \varepsilon) \| \leqslant \beta(\varepsilon),$$

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t, x, \tau, \varepsilon) - X(t, f(t, p(t), x, \tau), x, \tau) + Y(x, \tau) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant NL(\| x(t) - x \| + | \varepsilon t - \tau |) + N\gamma,$$

а для сглаженной функции

$$\hat{u}(t, x, \tau, \varepsilon) = \int_{R^{n+1}} \Delta(x - x', \tau - \tau', \varepsilon)\, u(t, x', \tau', \varepsilon)\, dx'd\tau',$$

где

$$\Delta(x, \tau, \varepsilon) = \begin{cases} A(\varepsilon)\left(1 - \dfrac{\| x \|^2 + \tau^2}{\beta(\varepsilon)}\right)^2, & \| x \|^2 + \tau^2 \leqslant \beta(\varepsilon), \\ 0, & \| x \|^2 + \tau^2 > \beta(\varepsilon), \end{cases}$$

справедливы оценки

$$\| \varepsilon \hat{u}(t, x, \tau, \varepsilon) \| \leqslant \beta(\varepsilon),$$

$$\left\| \varepsilon \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}(t, x, \tau, \varepsilon) \right\| \leqslant C\beta^{1/2}(\varepsilon), \quad \left\| \varepsilon \frac{\partial \hat{u}}{\partial \tau}(t, x, \tau, \varepsilon) \right\| \leqslant C\beta^{1/2}(\varepsilon),$$

$$\left\| \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t, x, \tau, \varepsilon) - X(t, f(t, p(t), x, \tau), x, \tau) + Y(x, \tau) \right\| \leqslant NL(\| x(t) - x \| +$$

$$+ | \varepsilon t - \tau |) + (N + 2) L\beta^{1/2}(\varepsilon) + N\gamma.$$

4. Перейдем к доказательству неравенств (12) и (13). Пусть $[0, T(\varepsilon)) \subset [0, T_0/\varepsilon]$ — максимальный интервал, на котором определено решение $y(t, \varepsilon)$ усредненной системы (4) и $\| x(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon) \| \leqslant \rho$. С учетом неравенств (19), (20) и полученных выше оценок для $u(t, x, \tau, \varepsilon)$ на $[0, T(\varepsilon))$ имеем

$$\| x(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon) \| \leqslant \left\| \varepsilon \int_0^{t_1} [X(t, z(t), x(t), \varepsilon t) - Y(y(t), \varepsilon t)]\, dt \right\| +$$

$$+ \left\| \varepsilon \int_{t_1}^{t} \left[X(t, z(t), x(t), \varepsilon t) - Y(y(t), \varepsilon t) - \frac{d}{dt}\hat{u}(t, x(t), \varepsilon t, \varepsilon) \right] dt \right\| +$$

$$+\|\varepsilon\hat{u}(t, x(t), \varepsilon t, \varepsilon)\| + \|\varepsilon\hat{u}(t_1, x(t_1), \varepsilon t, \varepsilon)\| \leqslant C_1\varepsilon + \left\| \int_{t_1}^{t} [Y(x(t), \varepsilon t) - \right.$$

$$\left. - Y(y(t), \varepsilon t)]\, dt \right\| + \left\| \varepsilon \int_{t_1}^{t} \left[X(t, f(t, p(t), x(t), \varepsilon t), x(t), \varepsilon t) - Y(x(t), \varepsilon t) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial\hat{u}}{\partial t}(t, x(t), \varepsilon t, \varepsilon) \right] dt \right\| + \left\| \varepsilon^2 \int_{t_1}^{t} \frac{\partial\hat{u}}{\partial\tau}(t, x(t), \varepsilon t, \varepsilon)\, dt \right\| +$$

$$+ \left\| \varepsilon^2 \int_{t_1}^{t} \frac{\partial\hat{u}}{\partial x}(t, x(t), \varepsilon t, \varepsilon) X(t, z(t), x(t), \varepsilon t)\, dt \right\| + L\delta T_0 +$$

$$+ 2\beta(\varepsilon) \leqslant \beta_1(\varepsilon) + (K\gamma + L\delta) T_0 + \varepsilon L \int_0^t \|x(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)\|\, dt,$$

где $\beta_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Отсюда по лемме Гронуолла—Беллмана

$$\|x(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)\| \leqslant (\beta_1(\varepsilon) + K\gamma T_0 + L\delta T_0) \exp LT_0 \leqslant \eta/2L < \eta, \qquad (21)$$

если ε_0 достаточно мало.

В силу максимальности $[0, T(\varepsilon))$ отсюда следует $T(\varepsilon) = T_0/\varepsilon$; это приводит к неравенству (12). Неравенство (13) непосредственно вытекает из (20) и (21). Теорема доказана.

Замечание 1. Полученная теорема легко переносится на систему более общего вида $dx/dt = \varepsilon X(t, z, x, \varepsilon t, \varepsilon)$, $dz/dt = Z(t, z, x, \varepsilon t, \varepsilon)$.

3. Рассмотрим некоторые частные случаи.

А. Если $k = 0$, т. е. многообразие $S_{x,\tau}$ сводится к единственному решению $z = f(t, x, \tau)$ системы (5), то из теоремы 1 после небольшого уточнения вытекает следующий результат (сформулируем его в терминах системы (2)).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

1) *функции $X(t, z, x, \tau)$ и $Z(t, z, x, \tau)$ определены и непрерывны в Q и удовлетворяют условию Липшица по z и x, функция $X(t, z, x, \tau)$ ограничена;*

2) *$\forall (x, \tau) \in \Omega$ система (5) имеет равномерно притягивающее решение $z = f(t, x, \tau)$, лежащее в $Q_{x,\tau}$ вместе с δ_0-окрестностью;*

3) *функция $f(t, x, \tau)$ определена и непрерывна при $t \geqslant 0$, $(x, \tau) \in \Omega$, непрерывно дифференцируема по t и удовлетворяет условию Липшица по x и τ;*

4) *в Ω существует среднее $Y(x, \tau)$ функции $X(t, z, x, \tau)$ вдоль S, функция $Y(x, \tau)$ удовлетворяет условию Липшица по x.*

Тогда если решение $y(\tau)$ усредненной системы $dy/d\tau = Y(y, \tau)$ определено $\forall\tau \in [0, T_0]$ и лежит в Ω вместе с ρ-окрестностью, то существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ решение $x(\tau, \varepsilon)$, $z(\tau, \varepsilon)$ системы (2), удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = y(0) = x_0$, $z(0) = z_0$, где $(0, z_0, x_0, 0) \in Q$, определено для $\tau \in [0, T_0]$ и для любого $\tau_1 > 0$ при $\varepsilon \to 0$

$$\sup_{\tau\in[0,T_0]} \|x(\tau, \varepsilon) - y(\tau)\| = o(1), \qquad \sup_{\tau\in[\tau_1,T_0]} \|z(\tau, \varepsilon) - f(\tau/\varepsilon, y(\tau), \tau)\| = o(1).$$

Б. Пусть правые части системы (2) не зависят от «быстрого времени» τ/ε, а многообразие S образовано точками покоя системы (5), т. е. $z = f(x, \tau)$, где $f(x, \tau)$ — корень уравнения $Z(z, x, \tau) = 0$, и пусть $z = f(x, \tau)$ — асимптотически устойчивое (а значит, и равномерно притягивающее [10]) решение системы (5). Тогда $Y(x, \tau) = X(f(x, \tau), x, \tau)$ и теорема 2 переходит в теорему А. Н. Тихонова [1, 2].

В. Если $k = n$, т. е. S совпадает со всем Q, то среднее в смысле определения 2 сводится к среднему вдоль траекторий вырожденной системы в смысле [4], а теорема 1 переходит в теорему В. М. Волосова об усреднении [4, 5].

Г. Пусть правые части системы (2) не зависят от τ/ε и интегральное многообразие S определяется семейством квазипериодических решений системы (5), т. е. $z = f(\omega(x, \tau) t + \varphi_0, x, \tau)$, где функция $f(\varphi, x, \tau) = f(\varphi_1, \ldots, \varphi_k, x, \tau)$ периодична с периодом π по каждому из аргументов φ_i; в этом случае $S_{t,x,\tau}$ — k-мерный тор.

Система, «сведенная» на S, имеет вид $d\varphi/dt = \omega(x, \tau)$ и если S является равномерно притягивающим многообразием и определено среднее (равномерное)

$$Y(x, \tau) = \lim_{T \to 8} \frac{1}{T} \int_0^T X(f(\omega(x, \tau) t + \varphi_0, x, \tau), x, \tau)\, dt,$$

то справедливы утверждения, аналогичные утверждениям теоремы 2, т. е. при $\varepsilon \to 0$

$$\sup_{\tau \in [0, T_0]} \| x(\tau, \varepsilon) - y(\tau) \| = o(1), \quad \sup_{\tau \in [\tau_1, T_0]} \| z(\tau, \varepsilon) - f(\varphi_\Pi(\tau, \varepsilon), y(\tau), \tau) \| = o(1),$$

где $\varphi_\Pi(\tau, \varepsilon)$ — проекция $z(\tau, \varepsilon)$ на $S_{y(\tau), \tau}$.

В частности, если $k = 1$, т. е. $z = f(\omega(x, \tau) t + \varphi_0, x, \tau)$ — периодическое решение системы (5), то среднее определено, и если характеристические показатели системы в вариациях для этого решения имеют (кроме одного, равного нулю) отрицательные действительные части, то многообразие $S_{x,\tau}$ будет, как известно [11], равномерно притягивающим, поэтому из теоремы 1 можно вывести теорему Л. С. Понтрягина и Л. В. Родыгина [3].

4. П р и м е р. Рассмотрим систему

$$\varepsilon \frac{d^2\alpha}{d\tau^2} + a(\alpha, \beta, \tau) \frac{d\beta}{d\tau} + n_1 \frac{d\alpha}{d\tau} = f_0(\alpha, \beta, \tau) + \varepsilon f_1\left(\alpha, \beta, \frac{d\alpha}{d\tau}, \frac{d\beta}{d\tau}, \tau\right),$$

$$\varepsilon \frac{d^2\beta}{d\tau^2} - b(\alpha, \beta, \tau) \frac{d\alpha}{d\tau} + n_2 \frac{d\beta}{d\tau} = g_0(\alpha, \beta, \tau) + \varepsilon g_1\left(\alpha, \beta, \frac{d\alpha}{d\tau}, \frac{d\beta}{d\tau}, \tau\right], \tag{22}$$

В таком виде могут быть записаны уравнения движения ряда гироскопических систем [12, 13]. Малый параметр ε в системе (22) появляется в связи с тем, что проекция кинетического момента на ось вращения гироскопа значительно больше проекций на остальные оси.

Считая, что $ab \neq 0$, $\lambda = n_1 + n_2 > 0$, $\omega^2(\alpha, \beta, \tau) = 4a(\alpha, \beta, \tau) b(\alpha, \beta, \tau) - (n_1 - n_2)^2 > 0$, введем вместо α и β новые неизвестные r, φ, α_0 и β_0 по формулам

$$\alpha = r \cos\varphi + \alpha_0, \quad \frac{d\alpha}{d\tau} = -\frac{r}{\varepsilon}(\lambda \cos\varphi - \omega \sin\varphi), \quad \beta = \frac{r}{a}(n_2 \cos\varphi - \omega \sin\varphi) + \beta_0, \quad \frac{d\beta}{d\tau} = -\frac{r}{\varepsilon a}[(n_2\lambda + \omega^2)\cos\varphi - 2\lambda\omega \sin\varphi].$$

Легко проверить, что для новых переменных получается система вида (2):

$$\varepsilon dr/d\tau = -\lambda r + \varepsilon R, \quad \varepsilon d\varphi/d\tau = \omega + \varepsilon\Phi, \quad d\alpha_0/d\tau = -g_0/b + \varepsilon A,$$
$$d\beta_0/d\tau = f_0/a + \varepsilon B, \tag{23}$$

где R, Φ, A и B — некоторые функции аргументов τ, r, φ, α_0 и β_0. С учетом замечания 1 к системе (23) применимы результаты, изложенные в предыдущих пунктах.

Система (5) принимает в данном случае вид $dr/dt = -\lambda r$, $d\varphi/dt = \omega(\alpha_0, \beta_0, \tau)$. Она имеет равномерно притягивающее интегральное многообразие $r = 0$ и поэтому $\alpha \approx \alpha_0$, $\beta \approx \beta_0$, а медленные составляющие α_0 и β_0 определяются из системы $d\alpha_0/d\tau = -g_0(\alpha_0, \beta_0, \tau)/b(\alpha_0, \beta_0, \tau)$, $d\beta_0/d\tau = f_0(\alpha_0, \beta_0, \tau)/a(\alpha_0, \beta_0, \tau)$, которая совпадает с уравнениями прецессионной теории.

Вводя в систему (22) зависимость от $t = \tau/\varepsilon$ и используя усредненную систему, можно учесть влияние высокочастотных возмущений.

1. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных // Мат. сб.— 1952.— **31**, № 3.— С. 575—586.
2. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М. : Наука, 1973.— 272 с.
3. *Понтрягин Л. С., Родыгин Л. В.* Приближенное решение одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // Докл. АН СССР.— 1960.— **131**, № 2.— С. 255—258.
4. *Волосов В. М.* О методе усреднения // Там же.— 1961.— **137**, № 1.— С. 21—24.
5. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем.— М. : Изд-во Моск. ун-та.— 1971.— 508 с.
6. *Задирака К. В.* Исследование решения системы нелинейных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при некоторых производных // Укр. мат. журн.— 1958.— **10**, № 2.— С. 121—127.
7. *Понтрягин Л. С.* Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий.— М. : Наука, 1976.— 173 с.
8. *Хирш М.* Дифференциальная топология.— М. : Мир, 1979.— 280 с.
9. *Щитов И. Н.* Асимптотика решений систем с медленными и быстрыми переменными // Укр. мат. журн.— 1985.— **37**, № 2.— С. 237—243.
10. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.— М. : Мир, 1980.— 302 с.
11. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.— М. : Наука, 1967. — 472 с.
12. *Климов Д. М., Харламов С. А.* Динамика гироскопа в кардановом подвесе.— М. : Наука, 1978.— 208 с.
13. *Новожилов И. В.* Приближенные методы исследования гироскопических систем // Развитие механики гироскопических и инерциальных систем.— М. : Наука, 1973.— С. 368—378.

Ленингр. ин-т киноинженеров

Получено 08.07.85