УДК 62-50

*М. М. Копец*

# Оптимальное управление линейной системой с запаздыванием в управлении в гильбертовом пространстве

Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_0(t)u(t) + B_1(t)u(t-h), \tag{1}$$

в которой значения абстрактных функций $x(t)$ и $u(t)$ принадлежат соответственно гильбертовым пространствам $H$ и $H_1$, $A(t)$ — линейный замкнутый оператор в пространстве $H$, удовлетворяющий следующим условиям:

а) его область определения $D(A(t)) \equiv D(A)$ не зависит от $t$ и является всюду плотной в пространстве $H$;

б) операторнозначная функция $R(\lambda, A(s)) = (A(s) - \lambda I)^{-1}$ существует при $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$ и $\| R(\lambda, A(t)) \| \leqslant C(1 + |\lambda|)^{-1}$ при $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, $C$ — положительная постоянная;

в) для всех $t, \tau \geqslant 0$ имеем $\| (A(t) - A(\tau)) A_\alpha(\tau) \| \leqslant C_1 |t - \tau|^\alpha$, где $C_1$ и $\alpha$ — положительные постоянные.

При выполнении этих условий существует операторнозначная функция $S(t, \tau)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $\partial S(t, \tau) / \partial t = A(t) S(t, \tau)$ и начальному условию $S(\tau, \tau) = I$ при $t \geqslant \tau$ [1, с. 276]

Относительно операторов $B_0(t)$ и $B_1(t)$ предположим, что они непрерывны по $t$ в смысле равномерной топологии и при каждом $t \geqslant 0$ являются линейными ограниченными операторами, действующими из $H_1$ в $H$. Параметр $t$ означает время. Уравнение (1) рассматривается на отрезке $[0, T]$. Считаем, что уравнение $u(t)$ является элементом пространства $L_2([0, T], H_1)$ [2, с. 172]. Постоянная $h > 0$ характеризует время запаздывания. Под производной функции $x(t)$ понимаем ее сильную производную. Начальные условия для уравнения (1) заданы следующим образом:

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0), \tag{3}$$

где $\varphi(t) \in L_2([-h, 0), H_1)$.

Решение $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2), (3), можно представить с помощью соотношения

$$x(t) = S(t, 0)x_0 + \int_0^t S(t, \tau) B_0(\tau) u(\tau) d\tau + \int_0^t S(t, \tau) B_1(\tau) u(\tau - h) d\tau,$$

или в эквивалентной форме

$$x(t) = z_0 + \int_0^t S(t, \tau) B_0(\tau) u(\tau) d\tau + \int_0^{t-h} S(t, \tau + h) B_1(\tau + h) u(\tau) d\tau, \tag{4}$$

где $z_0 = S(t, 0)x_0 + \int_h^0 S(t, \tau + h) B_1(\tau + h) \varphi(\tau) d\tau$.

Пусть $U$ — некоторое фиксированное замкнутое множество в пространстве $H_1$. Если для почти всех $t \in [0, T]$ выполняется соотношение $u(t) \in U$, то управление $u(t)$ называется допустимым, а соответствующее решение $x(s)$ уравнения (1), заданное формулой (4), называется допустимой траекторией. На множестве допустимых управлений рассмотрим задачу минимизации функционала

$$I_1(x) = (l, x(T)) + \int_0^T (l_0(t), x(t)) dt, \tag{5}$$

где $l$ — заданный элемент пространства $H$, $l_0(t)$ — заданная непрерывная на отрезке $[0, T]$ абстрактная функция со значениями в пространстве $H$, символ $(\cdot, \cdot)$ означает скалярное произведение в пространстве $H$. Допустимое управление $u^0(t)$, на котором реализуется минимум функционала (5), назовем оптимальным управлением, а соответствующую допустимую траекторию — оптимальной траекторией. В работе [3, с. 236] для скалярной функции введено понятие точки Лебега. Это понятие естественным образом обобщается на случай абстрактной функции. Будем говорить, что точка $t \in [0, T]$ является точкой Лебега абстрактной функции $u(\tau)$, если выполняется соотношение $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{1}{\varepsilon} \int\limits_t^{t+\varepsilon} \| u(\tau) - u(t) \| d\tau = 0$.

В работе [4] доказано, что если $u(\tau)$ — ограниченная измеримая функция на отрезке $[0, T]$, то почти всякая точка отрезка $[0, T]$ есть ее точка Лебега. Теперь получим необходимые условия оптимальности для рассматриваемой задачи минимизации. Пусть $u^0(\tau)$ — оптимальное управление. Вариацию допустимого управления $\bar{u}(\tau)$ определим следующим образом:

$$\bar{u}(\tau) = \begin{cases} u^0(\tau), & \text{если } 0 < \tau < t \text{ или } t + \varepsilon < \tau < T, \\ v, & \text{если } t < \tau < t + \varepsilon, \end{cases}$$

где $v$ — некоторый элемент множества $U$, $t$ — точка Лебега функции $u^0(\tau)$ на отрезке $[0, T]$. Пусть $\bar{x}(\tau)$ и $x^0(\tau)$ — траектории, соответствующие управлениям $\bar{u}(\tau)$ и $u^0(\tau)$. Предположим, что точка Лебега $t$ функции $u^0(\tau)$ принадлежит отрезку $[0, T - h)$. Тогда, аналогично [4], можно получить следующие соотношения:

$$\bar{x}(\tau) = x^0(\tau) + \varepsilon [S(\tau, t) B_0(t) + S(\tau, t + h) B_1(t + h)] (v - u^0(t)) + R(t, \tau, \varepsilon) \tag{6}$$

при $t + \varepsilon < \tau < T - h$, где $\| R(t, \tau, \varepsilon) \| \leqslant \delta(\varepsilon) \cdot \varepsilon$ и $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \delta(\varepsilon) = 0$. Очевидно, $\bar{x}(\tau) = x^0(\tau)$ при $0 < \tau < t$. Наконец, при $t < \tau < t + \varepsilon$ будем иметь

$$\bar{x}(\tau) = x^0(\tau) + (\tau - t) [S(\tau, t) B_0(t) + S(\tau, t + h) B_1(t + h)] \times \\ \times (v - u^0(t)) + R_1(t, \tau, \varepsilon), \tag{7}$$

где функция $R_1(t, \tau, \varepsilon)$ ограничена подобно $R(t, \tau, \varepsilon)$ из соотношения (6). Если точка Лебега $t$ функции $u^0(\tau)$ принадлежит отрезку $[T - h, T]$, то аналогичным способом получим следующие соотношения:

$$\bar{x}(\tau) = x^0(\tau) + \varepsilon S(\tau, t) B_0(t) (v - u^0(t)) + R_2(t, \tau, \varepsilon) \tag{8}$$

при $t + \varepsilon < \tau < T$, $\bar{x}(\tau) = x^0(\tau)$ при $T - h < \tau < t$,

$$\bar{x}(\tau) = x^0(\tau) + (\tau - t) S(\tau, t) B_0(t) (v - u^0(t)) + R_3(t, \tau, \varepsilon) \tag{9}$$

при $t < \tau < t + \varepsilon$, где $R_2(t, \tau, \varepsilon)$ и $R_3(t, \tau, \varepsilon)$ можно оценить аналогично $R(t, \tau, \varepsilon)$ в соотношении (6). Рассмотрим следующую функцию:

$$g(t) = - S^*(T, t) l - \int\limits_t^T S^*(\tau, t) l_0(\tau) d\tau. \tag{10}$$

Легко проверить, что она удовлетворяет уравнению

$$\dot{g}(t) = - A^*(t) g(t) + l_0(t) \tag{11}$$

и граничному условию

$$g(T) = - l. \tag{12}$$

Используя теперь соотношения (6) — (9) и рассуждая аналогично [4], нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Если $u^0(t)$ и $x^0(t)$ — оптимальные управление и траектория для задачи* (1) — (3), (5), *а функция $g(t)$, заданная формулой* (10), *является решением задачи* (11), (12), *то выполняются соотношения*

$$(g(t), B_0(t)u^0(t)) + (g(t+h), B_1(t+h)u^0(t)) = \\ = \sup_{v\in U} [(g(t), B_0(t)v) + (g(t+h), B_1(t+h)v)] \tag{13}$$

*для почти всех* $t\in[0, T-h)$ *и*

$$(g(t), B_0(t)u^0(t)) = \sup_{v\in U} (g(t), B_0(t)v) \tag{14}$$

*для почти всех* $t\in[T-h, T]$.

Дальше рассмотрим вместо функционала (5) функционал

$$I_2(x) = \| x(T) - f \|, \tag{15}$$

где $f$ — заданный элемент из пространства $H$. Предположим, что не существует такого допустимого управления, для которого $x(T) = f$. Тогда $g_1 = f - x(T) \neq 0$ на множестве допустимых управлений. Рассмотрим функцию

$$g(t) = S^*(T, t) g_1. \tag{16}$$

Очевидно, она удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\dot g(t) = -A^*(t) g(t), \quad g(T) = g_1. \tag{17}$$

Теперь легко можно получить следующий аналог теоремы 1.

Теорема 2. *Если $u^0(t)$ и $x^0(t)$ — оптимальные управление и траектория для задачи* (1) — (3), (15), *а функция $g(t)$, заданная формулой* (16) *при $g_1 = f - x^0(T)$, является решением задачи* (17), *то для почти всех $t\in[0, T-h)$ выполняется соотношение* (13), *а для почти всех $t\in[T-h, T]$ — соотношение* (14).

Наконец, если рассмотреть функционал

$$I_3(x) = \int_0^T \| x(t) - f_0(t) \|^2 dt, \tag{18}$$

где $f_0(t)$ — заданная непрерывная на отрезке $[0, T]$ абстрактная функция со значениями в пространстве $H$, и ввести функцию

$$g(t) = \int_t^T S^*(\tau, t)[f_0(\tau) - x^0(\tau)] d\tau \tag{19}$$

($x^0(\tau)$ — оптимальная траектория), то легко проверить, что функция $g(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$\dot g(t) = -A^*(t) g(t) + x^0(t) - f_0(t), \quad g(T) = 0 \tag{20}$$

и необходимые условия оптимальности для последней задачи минимизации будут следующими.

Теорема 3. *Если $u^0(t)$ и $x^0(t)$ — оптимальные управление и траектория для задачи* (1) — (3), (18), *функция $g(t)$, заданная формулой* (19), *удовлетворяет соотношениям* (20), *то для почти всех $t\in[0, T-h)$ выполняется соотношение* (13), *а для почти всех $t\in[T-h, T]$ — соотношение* (14).

Полученные результаты являются обобщением на случай управления с запаздыванием некоторых результатов работы [4], в которой рассмотрена линейная система без запаздывания. Как и в работе [4], эти результаты можно применить к исследованию задач оптимального управления системами, описываемыми дифференциальными уравнениями в частных производных. Примеры таких систем можно найти в [4].

1. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1967.— 464 с.
2. *Балакришнан А. В.* Прикладной функциональный анализ.— М. : Наука, 1980.— 384 с.

3. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной.— М. : Наука, 1974.— 480 с.
4. *Friedman A.* Optimal control in Banach spaces // J. Math. Anal. and Appl.— 1967.— 19, N 1.— P. 35—55.

Киев. политехн. ин-т

Получено 02.07.85,
после доработки — 30.01.86

УДК 517.956

*В. А. Маловичко*

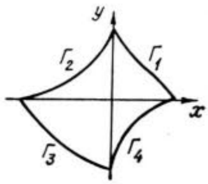
# О краевых задачах для одного класса систем дифференциальных уравнений четвертого порядка

В настоящей работе изучается разрешимость краевых задач для системы дифференциальных уравнений

$$Lu(x, y) \equiv MMu(x, y) + C(x, y)\,u = f(x, y), \tag{1}$$

где $M\mathbf{u}(x, y) \equiv [A(x, y)\,\mathbf{u}_x]_x + [B(x, y)\,\mathbf{u}_y]_y$; $x, y \in R^1$; $\mathbf{u}$, $\mathbf{f}$ — $N$-мерные векторы; $C$ — симметричная положительно определенная в $R^2$ матрица размерности $N \times N$;

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix};$$




$A_1$, $B_1$ — симметричные матрицы размерности $m \times m$; $A_2$, $B_2$ — симметричные матрицы размерности $(N - m) \times (N - m)$; $0 \leqslant m \leqslant N$, причем для любого вектора $\mathbf{z} \in R^N$, $\mathbf{z} \neq 0$, выполняются соотношения

$$\begin{gathered} xA(x, y)\,\mathbf{zz} > 0, \quad x \neq 0, \quad A(0, y) = 0, \\ yB(x, y)\,\mathbf{zz} > 0, \quad y \neq 0, \quad B(x, 0) = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Систему (1) будем рассматривать в односвязной области $\Omega$, содержащей точку $(0, 0)$ и ограниченную кусочно гладкими кривыми $\Gamma_1$, $\Gamma_3$ и гладкими кривыми $\Gamma_2$, $\Gamma_4$ (рисунок).

Обозначим через $\Omega_k$, $k = 1, 2, 3, 4$, часть $\Omega$, лежащую в $k$-й четверти плоскости $xOy$. В области $\Omega_1 \cup \Omega_3$ оператор $M$ является эллиптическим, а в области $\Omega_2 \cup \Omega_4$ — гиперболическим. Отметим, что уравнения типа (1), но с другими операторами $M$ и в других областях, изучались в работах [1 — 3].

Пусть $(l_1(x, y), l_2(x, y))$ — вектор единичной внешней нормали к границе $\Gamma$ области $\Omega$ в точке $(x, y) \in \Gamma$. Будем считать, что кривые $\Gamma_2$, $\Gamma_4$ являются характеристиками оператора $M$, т. е.

$$A(x, y)\, l_1^2(x, y) + B(x, y)\, l_2^2(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4. \tag{3}$$

Относительно гладкости коэффициентов системы (1) предполагаем, что $A, B \in C^3(\overline{\Omega})$, $C \in C(\overline{\Omega})$.

Задача 1. В области $\Omega$ найти решение $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)}$ системы (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} = \mathbf{u}_l|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} = 0, \tag{4}$$

$$\mathbf{u}^{(1)}|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} = M\mathbf{u}^{(2)}|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} = 0, \tag{5}$$

где $\mathbf{u}^{(1)} = (u_1, \ldots, u_m, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{u}^{(2)} = (0, \ldots, 0, u_{m+1}, \ldots, u_N)$, $\mathbf{u}_l = A\mathbf{u}_x l_1 + B\mathbf{u}_y l_2$

Введем обозначения: $W$ — множество вектор-функций из $C^4(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих краевым условиям (4), (5); $H_+$ — гильбертово пространство,