УДК 519.41/47

*Д. И Зайцев*

# О свойствах групп, наследуемых их нормальными подгруппами

Говорят, что свойство, которым обладает группа, наследуется теми или иными ее подгруппами, если они также обладают этим свойством. К числу нетривиальных свойств, наследуемых подгруппами конечного индекса группы, относятся условия минимальности и максимальности для нормальных подгрупп (условия $\min - n$, $\max - n$) [1]. Вместе с тем эти условия не наследуются, вообще говоря, произвольными и даже нормальными подгруппами групп. В настоящей работе устанавливается теорема 1 операторного характера, позволяющая, в частности, решать для гиперцентральных групп вопросы о наследуемости условия $\min - n$ нормальными подгруппами, определяющими периодические фактор-группы. Основную роль в доказательстве теоремы 1 играет лемма 1 — операторный аналог известной леммы о нижнем слое абелевой $p$-группы [2, лемма 3.3].

Другой результат этой работы — теорема 2 — связан со свойством нормальной факторизуемости группы. Нормально факторизуемой называют группу, все нормальные подгруппы которой дополняемы. Как известно, свойство нормальной факторизуемости наследуется нормальными подгруппами конечного индекса группы [3, теорема 4]. Развивая способ доказательства, предложенный в [3], доказываем теорему 2, напоминающую по формулировке операторные аналоги теорем С. Н. Черникова и Ю. М. Горчакова о локально разрешимых группах [4—6] и охватывающую теорему 4 из [3].

1. Для абелевой группы $A$ и ее оператора (эндоморфизма) $\xi$ обозначим через $A[\xi^m]$ множество всех таких $a \in A$, что $a\xi^m = 1$ ($m$ — натуральное число). Ясно, что $A[\xi^m]$ — подгруппа в $A$ и $A[\xi] \leqslant A[\xi^2] \leqslant \ldots \leqslant A[\xi^m] \leqslant \leqslant \ldots$ . Символом $\min - \Gamma$, где $\Gamma$ — множество операторов некоторой группы, обозначим условие минимальности для ее $\Gamma$-допустимых подгрупп.

Лемма 1. *Пусть $A$ — абелева группа, $\Gamma$ — некоторое множество ее операторов, содержащее такой элемент $\xi$, что $\xi\gamma = \gamma\xi$ для любого $\gamma \in \Gamma$, и $A = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A[\xi^m]$. Группа $A$ тогда и только тогда удовлетворяет условию $\min - \Gamma$, когда этому условию удовлетворяет ее подгруппа $A[\xi]$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.3 из [2]. Именно, пусть $A[\xi]$ удовлетворяет условию $\min - \Gamma$ и $A_1 \geqslant A_2 \geqslant \ldots \ldots \geqslant A_i \geqslant \ldots$ — убывающая цепь $\Gamma$-допустимых подгрупп группы $A$. Положим $B_{i,m} = (A_i \cap A[\xi^{m+1}])\xi^m$, $i, m = 1, 2, \ldots$ . Это $\Gamma$-допустимые подгруппы из $A[\xi]$, причем $B_{i,m} \geqslant B_{j,n}$, если $i \leqslant j$, $m \leqslant n$. Так как $A[\xi]$ удовлетворяет условию $\min - \Gamma$, то можно так выбрать $i$, $n$, чтобы

$$B_{i,m} = B_{j,n}, \qquad i \leqslant j,\ m \leqslant n. \qquad (1)$$

Отображение $a \to a\xi^k$, $a \in A$, индуцирует вложение фактора $A[\xi^{k+1}]/A[\xi^k]$ в подгруппу $A[\xi]$, поэтому фактор $A[\xi^{k+1}]/A[\xi^k]$ удовлетворяет условию $\min - \Gamma$. Значит, $A[\xi^k]$ при любом $k$ удовлетворяет условию $\min - \Gamma$ и ввиду этого число $i$ в соотношении (1) можно выбрать так, чтобы дополнительно выполнялось условие

$$A_i \cap A[\xi^{m+1}] = A_j \cap A[\xi^{m+1}], \qquad i \leqslant j. \tag{2}$$

Из соотношений (1), (2) выводится соотношение $A_i \cap A[\xi^n] = A_j \cap A[\xi^n]$ при $i \leqslant j$, $m+1 \leqslant n$, которое в силу условия $A = \bigcup\limits_{n=m+1}^{\infty} A[\xi^n]$ приводит к равенству $A_i = A_j$, $i \leqslant j$, означающему, что цепь подгрупп $A_1 \geqslant A_2 \geqslant \ldots$ $\ldots \geqslant A_i \geqslant \ldots$ обрывается. Лемма доказана.

Эта лемма превращается в лемму 3.3 из [2], если в качестве $\xi$ взять эндоморфизм $a \to a^p$, $a \in A$, абелевой $p$-группы $A$ и положить $\Gamma = \{\xi, \Omega\}$, где $\Omega$—некоторое множество операторов группы $A$. В рассматриваемом частном случае $A[\xi]$ — нижний слой группы $A$.

Теорема 1. *Пусть $A$ — группа, $G$ — такая ее гиперцентральная группа автоморфизмов, что $A$ удовлетворяет условию $\min - G$. Предположим также, что $A$ имеет возрастающий ряд нормальных $G$-допустимых подгрупп с конечными факторами. Тогда, если $H \lhd G$ и фактор-группа $G/H$ периодическая, то $A$ удовлетворяет условию $\min - H$.*

Доказательство. Допустим, что $A$ не удовлетворяет условию $\min - H$. Тогда ввиду условия $\min - G$ в $A$ можно найти такую $G$-допустимую подгруппу $B$, не удовлетворяющую условию $\min - H$, что все собственные $G$-допустимые подгруппы из $B$ этому условию удовлетворяют. В частности, $B$ не может, разумеется, иметь собственных $G$-допустимых подгрупп конечного индекса. Пусть $1 = B_0 < B_1 < \ldots B_\alpha < \ldots = B$ — возрастающий ряд нормальных $G$-допустимых подгрупп группы $B$ с конечными факторами, существующий по предположению теоремы. Централизатор $C_B(B_{\alpha+1}/B_\alpha)$ каждого фактора этого ряда в группе $B$ является $G$-допустимой подгруппой конечного индекса, следовательно, $C_B(B_{\alpha+1}/B_\alpha) = B$, т. е. $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ — центральный фактор группы $B$ и, значит, группа $B$ гиперцентральна. Поэтому $B$ отлична от своего коммутанта $B'$ [7, с. 80], и, следовательно, $B'$ удовлетворяет условию $\min - H$, а $B/B'$ не может удовлетворять этому условию.

Рассмотрим группу $B/B'$. Чтобы не усложнять обозначений, будем считать $B' = 1$. Кроме того, можно считать также, что $C_G(B) = 1$. Пусть $D$ — некоторая отличная от единицы конечная $G$-допустимая подгруппа из $B$ и $G_1 = C_G(D)$. Предположение теоремы гарантирует существование такой подгруппы $D$. Так как индекс $|G : G_1|$ конечен, то согласно результату Уилсона [1] $B$ удовлетворяет условию $\min - G_1$. В частности, если $G_1 = 1$, $B$ — черниковская группа и удовлетворяет, конечно, условию $\min - H$ в противоречие с предположением о ней. Следовательно, $G_1 \neq 1$ и, значит, $Z(G) \cap G_1 \neq 1$ [7, с. 35].

Выберем в пересечении $Z(G) \cap G_1$ некоторый отличный от единицы элемент $g$. Справедливо соотношение $D \leqslant C_G(g)$, означающее, в частности, что $C_B(g) \neq 1$. Поскольку $B$ имеет возрастающий ряд $G$-допустимых подгрупп с конечными факторами, то произвольный элемент из $B$ входит в конечную $\langle g \rangle$-допустимую подгруппу и $B$ является объединением своих конечных $\langle g \rangle$-допустимых подгрупп: $B = \bigcup\limits_{i \in I} D_i$. Произвольный член $D_i$ этого объединения обладает однозначно определенным прямым разложением $D_i = S_i \times T_i$, где $S_i$ — $\langle g \rangle$-допустимая подгруппа, каждый $\langle g \rangle$-композиционный фактор которой $\langle g \rangle$-централен, а $T_i$ — $\langle g \rangle$-допустимая подгруппа, не имеющая факторов такого рода. Это так называемое $Z$-разложение подгруппы $D_i$, рассматриваемой как $\langle g \rangle$-модуль; существование его вытекает из [8, теорема 1′] (см. также лемму 2.5 из [9]). Ввиду того, что $g \in Z(G)$ и подгруппы $D_i$ составляют локальную систему подгруппы $B$, $B = S \times T$, где $S = \bigcup\limits_{i \in I} S_i$, $T = \bigcup\limits_{i \in I} T_i$, причем $S$, $T$ — $G$-допустимые подгруппы и $C_B(g) \leqslant$

$\leqslant S$. Так как $B$ не удовлетворяет условию $\min - H$, а все ее собственные $G$-допустимые подгруппы этому условию удовлетворяют, то одна из подгрупп $S$, $T$ тривиальна. В силу соотношений $C_B(g) \neq 1$, $C_B(g) \leqslant S$ получаем $S \neq 1$, $T = 1$, $B = S = \bigcup_{i \in I} S_i$. Таким образом, произвольный элемент $b \in B$ входит в некоторую конечную $\langle g \rangle$-допустимую подгруппу $S_i$, все $\langle g \rangle$-композиционные факторы которой $\langle g \rangle$-центральны и, значит,

$$[b, \underbrace{g, \ldots, g}_{m}] = 1 \qquad (3)$$

при подходящем $m$, зависящем от $b$.

Будем рассматривать $B$ как абелеву группу с множеством операторов $\Gamma = \{\xi, H\}$, где $\xi : b \to [b, g]$, $b \in B$. Соотношение (3) равносильно соотношению $b\xi^m = 1$, поэтому $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B[\xi^m]$. Кроме того, так как $g \in Z(G)$, то $\xi$ перестановочен с каждым элементом из $H$ и $B[\xi] \neq B$, поскольку $B[\xi] = C_B(g)$, $g \neq 1$, $C_G(B) = 1$. Собственная $G$-допустимая подгруппа $B[\xi]$ из $B$ удовлетворяет по предположению условию $\min - H$, а потому и условию $\min - \Gamma$. Применяя к группе $B$, ее эндоморфизму $\xi$ и множеству операторов $\Gamma$ лемму 1, получаем, что $B$ удовлетворяет условию $\min - \Gamma$, равносильному условию $\min - H\langle g \rangle$. Ввиду периодичности фактор-группы $G/H$ индекс $|H\langle g \rangle : H|$ конечен и тогда результат Уилсона [1] показывает, что группа $B$ удовлетворяет также и условию $\min - H$. Таким образом, снова приходим к противоречию с выбором подгруппы $B$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и я. 1. В доказательстве теоремы 1 периодичность фактор-группы $G/H$ использовалась для того, чтобы установить конечность индекса $|H\langle g \rangle : H|$. Поэтому теорема 1 справедлива также и для такой, не обязательно нормальной, подгруппы $H$ группы $G$, что каждый элемент $g \in G$ в некоторой степени $g^n$, $n > 0$, входит в $H$.

2. Предположение о гиперцентральности группы $G$ в теореме 1 существенно. Так, его нельзя заменить, например, локальной нильпотентностью, что подтверждается примером 2 из [10]. Не является лишним и предположение о существовании $G$-допустимого ряда подгрупп группы $A$ (см. пример, построенный в [11]).

С л е д с т в и е 1. *Если $H$—такая нормальная подгруппа гиперцентральной группы $G$, что фактор-группа $G/H$ периодическая и $H$ удовлетворяет условию* $\min - G$, *то подгруппа $H$ черниковская.*

В самом деле, по теореме 1 $H$ удовлетворяет условию $\min - H$, т. е. условию минимальности для своих нормальных подгрупп. Тогда $H$ удовлетворяет условию минимальности и для всех подгрупп [7, с. 65] и потому $H$ — черниковская подгруппа.

С л е д с т в и е 2 [12, т е о р е м а 3]. *Пусть $G$ — локально нильпотентная группа, удовлетворяющая условию* $\min - \infty - n$ *(слабое условие минимальности для нормальных подгрупп) и $H$ — такая ее нормальная подгруппа, что фактор-группа $G/H$ периодическая. Тогда $H$ также удовлетворяет условию* $\min - \infty - n$.

Как известно, группа $G$ гиперцентральна, ее периодическая часть $t(G)$ удовлетворяет условию $\min - G$ и фактор-группа $G/t(G)$ минимаксна [12, теорема 1]. Применяя к подгруппам $t(H)$, $H$ и группе $G$ теорему 1, видим, что $t(H)$ удовлетворяет условию $\min - H$. Так как, кроме того, фактор-группа $H/t(H)$ минимаксна, то $H$ удовлетворяет условию $\min - \infty - n$.

2. Если $M$, $N$ — две нормальные подгруппы группы $G$ и $N < M$, то **образом подгруппы** $H$ группы $G$ в факторе $M/N$ назовем подгруппу $(H \cap M)N/N$ этого фактора. Так определенный образ $H$ в $M/N$ является образом $H$ при последовательном выполнении двух естественных отображений: $H \to H \cap M \to (H \cap M)N/N$, причем эти отображения в известном смысле коммутируют: $H \to HN/N \to HN/N \cap M/N = (H \cap M)N/N$.

Нам понадобится также следующее понятие. Будем говорить, что подгруппа $H$ группы $G$ дополняема в $G$ с абелевым пересечением, если в $G$ существует такая подгруппа $K$, что $G = HK$ и пересечение $H \cap K$ абелево. Если же пересечение $H \cap K$ разрешимо, то $H$ называется дополняемой в $G$

с разрешимым пересечением. Эти понятия сформулированы по образцу принадлежащего С. Н. Черникову понятия $F$-дополняемой подгруппы, т. е. дополняемой с конечным пересечением.

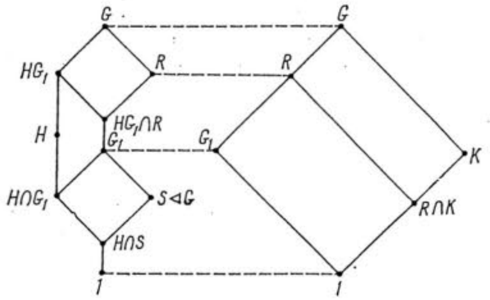
Лемма 2. *Пусть $G$ — группа, $H$ — ее подгруппа,*

$$1 = G_0 < G_1 < \ldots < G_n = G \tag{4}$$

*— конечный ряд нормальных подгрупп группы $G$, все члены $G_i$ которого дополняемы в $G$. Если образ подгруппы $H$ в каждом факторе $G_i/G_{i-1}$ ряда (4) дополняем в нем с абелевым пересечением и дополнением служит некоторая $G$-допустимая подгруппа фактора, то $H$ дополняема в $G$ с разрешимым пересечением. Ступень разрешимости этого пересечения не превышает $n - k$, если в каких-либо $k$ факторах ряда (4) образы подгруппы $H$ дополняемы с единичным пересечением. В частности, при $k = n$ подгруппа $H$ дополняема в группе $G$.*

Доказательство проводится индукцией по длине $n$ ряда (4). При $n = 1$ образом подгруппы $H$ в группе $G_1 = G$ является сама подгруппа $H$ и потому утверждение леммы, очевидно, выполняется. Пусть лемма верна для групп с длиной ряда, равной $n - 1$. Тогда она верна для фактор-группы $G/G_1$ и ее подгруппы $HG_1/G_1$.

Образом подгруппы $H$ в $G_1$ (т. е. в первом факторе ряда (4)) является подгруппа $H \cap G_1$. Она по предположению дополняема в $G_1$ с абелевым пересечением, причем дополнением служит некоторая нормальная подгруппа $S$ группы $G$. Значит, $G_1 = (H \cap G_1) S$, $H \cap G_1 \cap S = H \cap S$ — абелева группа. Так как утверждение леммы выполняется для фактор-группы $G/G_1$ и ее подгруппы $HG_1/G_1$, то $HG_1/G_1$ дополняема в $G/G_1$ с разрешимым пересечением некоторой ее подгруппой $R/G_1 : G/G_1 = HG_1/G_1 \cdot R/G_1$, $HG_1/G_1 \cap R/G_1 = (HG_1 \cap R)/G_1$ — разрешимая группа. Это изображено в левой части следующей диаграммы.




Правая часть диаграммы изображает дополняемость члена $G_1$ ряда (4) в группе $G$ некоторой подгруппой $K$, а также вытекающую отсюда дополняемость подгруппы $G_1$ в подгруппе $R : G = G_1K$, $R = G_1 (R \cap K)$, $G_1 \cap K = 1$.

Покажем, что подгруппа $X = S (R \cap K)$ дополняет с разрешимым пересечением подгруппу $H$ в группе $G$. Для этого нужно установить соотношение

$$G = HX \tag{5}$$

и доказать разрешимость пересечения $H \cap X$. С помощью приведенной диаграммы убеждаемся в справедливости цепочки равенств $G = (HG_1) R = HG_1 (R \cap K) = H ((H \cap G_1) S) (R \cap K) = HS (R \cap K) = HX$, которая означает, что соотношение (5) выполняется. Также с помощью диаграммы получаем

$$H \cap X \cap G_1 = H \cap S (R \cap K) \cap G_1 = H \cap S (R \cap K \cap G_1) = H \cap S \tag{6}$$

и, кроме того, $(H \cap X) G_1 \leqslant HG_1 \cap XG_1 = HG_1 \cap S (R \cap K) G_1 \leqslant HG_1 \cap R$. Из последнего соотношения вытекает, что

$$H \cap X/H \cap X \cap G_1 \simeq (H \cap X) G_1/G_1 \leqslant HG_1 \cap R/G_1. \tag{7}$$

Так как подгруппа $H \cap S$ по условию абелева и фактор-группа $HG_1 \cap \cap R/G_1$ разрешима, то ввиду (6) $H \cap X \cap G_1$ — абелева подгруппа и ввиду (7) фактор-группа $H \cap X/H \cap X \cap G_1$ разрешима. Таким образом, пересечение $H \cap X$ разрешимо. Из приведенных рассуждений следует также и утверждение о ступени разрешимости пересечения $H \cap X$. Лемма доказана.

Пусть $G_1, G_2 \dots, G_m$ — конечное множество нормальных подгрупп некоторой группы $G$, среди которых могут быть и совпадающие подгруппы. Для любого непустого подмножества $\lambda$ множества $\Lambda = \{1, 2, \dots, m\}$ положим $G_\lambda = \bigcap\limits_{i \in \lambda} G_i$. Если $\mu$ — еще одно подмножество из $\Lambda$, то $G_\mu \cap G_\lambda = G_{\mu \cup \lambda}$, и так как $G_\mu$, $G_\lambda$ — нормальные подгруппы в $G$, то $[G_\mu, G_\lambda] \leqslant G_{\mu \cup \lambda}$. Для любого $k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, обозначим через $M_k$ произведение всех подгрупп $G_\lambda$, соответствующих подмножествам $\lambda$ множества $\Lambda$, состоящим из $k$ элементов:

$$M_k = \prod_{|\lambda|=k} G_\lambda, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m. \tag{8}$$

В частности, $M_1 = G_1 G_2 \dots G_m$, $M_m = G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_m$. В группе $G$ возникает конечный ряд нормальных подгрупп

$$1 = M_{m+1} \leqslant M_m \leqslant \dots \leqslant M_k \leqslant \dots \leqslant M_1 \leqslant M_0 = G. \tag{9}$$

В какой степени дополняемость всех членов $M_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, этого ряда определяет дополняемость исходных подгрупп $G_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$? Ответ на этот вопрос дает лемма 3. При ее доказательстве используются построения, которые необходимы также и для доказательства теоремы 2.

Зафиксируем некоторое $i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, и разобьем множество всех подгрупп $G_\lambda$ ($|\lambda| = k$), входящих в запись (8) подгруппы $M_k$, $1 \leqslant k \leqslant m-1$, на два подмножества: первое состоит из таких $G_\lambda$, что элемент $i$ множества $\Lambda$ содержится в $\lambda$, а второе — из таких $G_\lambda$, что $i$ не содержится в $\lambda$. Этому разбиению соответствует разложение $M_k = A_k^{(i)} B_k^{(i)}$ подгруппы $M_k$, где $A_k^{(i)} = \prod\limits_{|\lambda|=k, i \in \lambda} G_\lambda$, $B_k^{(i)} = \prod\limits_{|\lambda|=k, i \notin \lambda} G_\lambda$.

Докажем два соотношения

$$[G_i, B_k^{(i)}] \leqslant M_{k+1}, \ M_k \leqslant G_i B_k^{(i)}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m-1. \tag{10}$$

Так как все подгруппы $G_i$ нормальны в группе $G$, то, пользуясь определением подгрупп $B_k^{(i)}$, $M_k$, получаем $[G_i, B_k^{(i)}] = \Big[G_i, \prod\limits_{|\lambda|=k, i \notin \lambda} G_\lambda\Big] \leqslant \prod\limits_{|\lambda|=k, i \notin \lambda} (G_i \cap \cap G_\lambda) \leqslant \prod\limits_{|\mu|=k+1} G_\mu = M_{k+1}$ и тем самым первое из соотношений (10) доказано. Второе из этих соотношений выполняется, поскольку каждая из подгрупп $G_\lambda$ в записи подгруппы $A_k^{(i)}$ входит ввиду условия $i \in \lambda$ в $G_i$ и потому $M_k = A_k^{(i)} B_k^{(i)} \leqslant G_i B_k^{(i)}$.

Обозначим через $Z_k/M_{k+1}$ центр фактора $M_k/M_{k+1}$ для $1 \leqslant k \leqslant m-2$. Из соотношений (10) следует, что $[G_i, B_k^{(i)} Z_k] \leqslant M_{k+1}$ и $[M_k, G_i \cap B_k^{(i)} Z_k] \leqslant \leqslant [G_i B_k^{(i)}, G_i \cap B_k^{(i)} Z_k] \leqslant [G_i, B_k^{(i)} Z_k] \cdot [B_k^{(i)}, G_i] \leqslant M_{k+1}$. Значит, $G_i \cap B_k^{(i)} Z_k \leqslant Z_k$ и поэтому

$$G_i Z_k \cap B_k^{(i)} Z_k = Z_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m-2. \tag{11}$$

Соотношения (10), (11) приводят к прямому разложению фактора $M_k/Z_k$: $M_k/Z_k = (M_k \cap G_i) Z_k/Z_k \times B_k^{(i)} Z_k/Z_k$, означающему, в частности, что образ подгруппы $G_i$ в факторе $M_k/Z_k$ имеет прямое $G$-допустимое дополнение.

Аналогичное утверждение справедливо и для образа подгруппы $G_i$ в факторе $M_{m-1}/M_m$, поскольку $M_{m-1}/M_m = (M_{m-1} \cap G_i)/M_m \times B_{m-1}^{(i)}/M_m$, как это вытекает (при $k = m-1$) из соотношения (10) и равенства $M_{m-1} \cap \cap G_i \cap B_{m-1}^{(i)} \leqslant G_i \cap G_1 \cap \dots \cap G_{i-1} \cap G_{i+1} \cap \dots \cap G_m = M_m$. Рассмотрим ряд нормальных подгрупп группы $G$, являющийся уплотнением ряда (9):

$$1 = M_{m+1} \leqslant M_m \leqslant M_{m-1} \leqslant Z_{m-2} \leqslant M_{m-2} \leqslant \ldots \leqslant M_2 \leqslant Z_1 \leqslant \leqslant M_1 \leqslant M_0 = G. \quad (12)$$

Как доказано выше, в его факторах $M_k/Z_k$, $1 \leqslant k \leqslant m-2$, $M_{m-1}/M_m$ образы подгруппы $G_i$ имеют прямые $G$-допустимые дополнения. Такое же заключение справедливо также для первого и последнего факторов ряда (12), так как в силу соотношения $M_m \leqslant G_i \leqslant M_1$ образ подгруппы $G_i$ в $M_m$ совпадает с $M_m$, а образ подгруппы $G_i$ в факторе $G/M_1$ тривиален. Замечая, что остальные факторы $Z_k/M_{k+1}$, $1 \leqslant k \leqslant m-2$, ряда (12) абелевы и применяя к этому ряду и подгруппе $G_i$ группы $G$ лемму 2, получаем следующее утверждение.

Лемма 3. *Если все подгруппы $M_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, дополняемы в группе $G$, то каждая из подгрупп $G_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, дополняема в $G$ с разрешимым пересечением. При $m > 2$ ступень разрешимости пересечения не превышает $m-2$, при $m = 1, 2$ подгруппы $G_i$ дополняемы в группе $G$ (с тривиальным пересечением).*

Следствие. *Если некоторая подгруппа $G_i$ не имеет абелевых главных факторов, то из дополняемости всех подгрупп $M_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, вытекает дополняемость подгруппы $G_i$ в группе $G$.*

Действительно, по доказанному выше образы подгруппы $G_i$ во всех факторах ряда (12), кроме, быть может, абелевых факторов $Z_k/M_{k+1}$, $1 \leqslant k \leqslant m-2$, дополняемы $G$-допустимыми подгруппами. Так как $G_i$ не имеет абелевых главных факторов, то образ $(Z_k \cap G_i) M_{k+1}/M_{k+1}$ подгруппы $G_i$ в факторе $Z_k/M_{k+1}$, $1 \leqslant k \leqslant m-2$, равен единице. Поэтому справедливость следствия вытекает из леммы 2.

Теорема 2. *Пусть $G$ — группа, $F$ — некоторая ее конечная группа автоморфизмов. Если все нормальные $F$-допустимые подгруппы группы $G$ дополняемы, то в группе $G$ дополняемы вообще все ее нормальные подгруппы.*

Доказательство. Возьмем в группе $G$ произвольную нормальную подгруппу $H$ и рассмотрим конечное множество подгрупп $G_1, \ldots, G_m$ вида $G_i = H^{\alpha_i}$, где $\alpha_i$ пробегает всю группу $F$, $m = |F|$. Построим, далее, по формуле (8) подгруппы $M_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Эти подгруппы нормальны в $G$ и $F$-допустимы (подгруппы такого рода будем называть $GF$-допустимыми). Так как, кроме того, $Z_k/M_{k+1}$ — центр фактора $M_k/M_{k+1}$, то все члены ряда (12) $GF$-допустимы и тогда они по условию дополняемы в группе $G$. Поэтому в силу леммы 2 дополняемость подгруппы $G_i$ в группе $G$ будет доказана, если установить, что образы подгруппы $G_i$ в каждом факторе ряда (12) дополняемы некоторой $G$-допустимой подгруппой. Для всех факторов, кроме $Z_k/M_{k+1}$, это установлено при доказательстве леммы 3. Рассмотрим теперь фактор $Z_k/M_{k+1}$, причем для простоты обозначений будем полагать $M_{k+1} = 1$. Докажем, что $Z_k$ порождается минимальными $G$-допустимыми подгруппами, т. е. совпадает со своим $G$-цоколем. Пусть $C$ есть $G$-цоколь $Z_k$ и $C \neq Z_k$. Подгруппа $C$ — $GF$-допустима; выберем в $Z_k/C$ некоторый композиционный $GF$-фактор $C_2/C_1$. Согласно результату Уилсона [1] о наследуемости свойства $\min - n$ группы ее подгруппами конечного индекса $C_2/C_1$ содержит некоторую минимальную $G$-допустимую подгруппу $D/C_1$. По условию теоремы подгруппа $C_1$ дополняема в $G: G = C_1 K$, $C_1 \cap K = 1$, где $K$ — некоторая подгруппа из $G$. Тогда $D = C_1 \times (D \cap K)$, где $D \cap K$ — минимальная $G$-допустимая подгруппа, а это противоречит соотношению $C \neq Z_k$. Таким образом, $Z_k$ совпадает со своим $G$-цоколем, поэтому произвольная $G$-допустимая подгруппа из $Z_k$, в том числе и образ в нем подгруппы $G_i$ дополняемы в $Z_k$ некоторой $G$-допустимой подгруппой. Теорема доказана.

Следствие [3, теорема 4]. *Нормальная подгруппа конечного индекса нормально факторизуемой группы нормально факторизуема.*

Действительно, если $H$ — нормальная подгруппа конечного индекса нормально факторизуемой группы $G$, то $G = H \rightthreetimes F$, где $F$ — некоторая конечная подгруппа. Нормальные $F$-допустимые подгруппы из $H$ являются нормальными подгруппами группы $G$, поэтому они дополняемы в $H$ и, значит, по теореме 2 в $H$ должны быть дополняемы все ее нормальные подгруппы.

1. *Wilson J.* Some properties of groups inherited by normal subgroups of finite index // Math. Z.— 1970.— **114**, N 1.— P. 19—21.
2. *Hartley B., Mc Dougall D.* Injective modules and soluble groups satisfying the minimal condition for normal subgroups // Bull. Austral. Math. Soc.— 1971.— **4**, N 1.— P. 113—135.
3. *Зайцев Д. И.* К теории нормально факторизуемых групп // Группы с заданными свойствами подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1973.— С. 78—104.
4. *Зайцев Д. И.* О разрешимых подгруппах локально разрешимых групп // Докл. АН СССР.— 1974.— **214**, № 6.— С. 1250—1253.
5. *Зайцев Д. И.* О локально разрешимых группах конечного ранга // Там же.— 1978.— **240**, № 2.— С. 257—260.
6. *Hartley B.* Finite groups of automorphisms of locally soluble groups // J. Algebra.— 1979.— **57**, N 1.— P. 242—257.
7. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
8. *Зайцев Д. И.* Гиперциклические расширения абелевых групп // Группы, определяемые свойствами системы подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1979.— С. 16—37.
9. *Hartley B., Tomkinson M.* Splitting over nilpotent and hypercentral residuals // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1975.— 78.— P. 215—226.
10. *Зайцев Д. И.* Бесконечно неприводимые нормальные подгруппы // Строение групп и свойства их подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1978.— С. 17—38.
11. *Чарин В. С.* Замечание об условии минимальности для подгрупп // Докл. АН СССР.— 1949.— **66**, № 3.— С. 575—576.
12. *Курдаченко Л. А.* Локально нильпотентные группы со слабым условием минимальности для нормальных подгрупп // Сиб. мат. журн.— 1984.— **25**, № 4.— С. 99—106.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 18.06.85