УДК 513.88

Ву Куок Фонг

Асимптотическая почтипериодичность и компактифицирующие представления полугрупп

1. В работе [1] введено понятие сильно сжимающего* марковского оператора в пространстве $L_1(X, \Sigma, \mu)$, где (X, Σ, μ) — пространство с σ-конечной мерой, и для таких операторов установлена теорема об асимптотическом спектральном разложении. Обобщим этот результат, опираясь на теорию асимптотически почти периодических представлений, построенную в [2] (см. также [3]).

Пусть S — топологическая абелева полугруппа, $\mathbf{B}$ — комплексное банахово пространство, $T: S \to L(\mathbf{B})$ — представление полугруппы S в $\mathbf{B}$ (т. е. сильно непрерывный гомоморфизм полугруппы S в $L(\mathbf{B})$). Если ввести на S направление: $s \leqslant t \Leftrightarrow \exists u\colon t = s + u$, то представление T называется асимптотически почти периодическим (а. п.п.) при условии, что каждая поднаправленность направленности $T(s)$ содержит сильно сходящуюся поднаправленность. Для а. п. п. представлений справедлива следующая теорема об отщеплении граничного спектра [2, 3]: $\mathbf{B} = B_0 \dot{+} B_1$, где $B_0 = \{x \mid \lim\limits_s T(s)\, x = 0\}$, B_1 — замыкание линейной оболочки весовых векторов, соответствующих унитарным весам; $T \mid B_1$ — представление обратимыми изометриями, причем $(T(s) \mid B_1)^{-1}$ входят в сильное замыкание $\operatorname{Im}(T \mid B_1)$. Подпространства B_0 и B_1 называются внутренним и граничным соответственно. Соответствующий проектор P ($\operatorname{Im} P = B_1$, $\ker P = B_0$) называется граничным.

Назовем представление T компактифицирующим (ср. с [1]), если существует компакт $F \subset B$ такой, что

$$\lim_s d(T(s)\, x, F) = 0, \quad x \in \mathbf{B}, \quad \|x\| = 1, \tag{1}$$

где $d(\cdot, F)$ — расстояние до F. Любое компактифицирующее представление ограничено. Переходя к эквивалентной норме, можно считать, что $\|T(s)\| \leqslant 1 \forall s \in S$.

Теорема 1. *Для того чтобы представление T было компактифицирующим, необходимо и достаточно, чтобы оно было а. п. п. и его граничное подпространство было конечномерным, т. е. существовала конечная биортогональная система $\{x_i\}_{i=1}^r \subset \mathbf{B}$, $\{g_j\}_{j=1}^r \subset \mathbf{B}^*$, для которой*

$$\lim_s \left\| T(s) \left(x - \sum_{i=1}^r g_i(x)\, x_i \right) \right\| = 0, \quad x \in \mathbf{B}. \tag{2}$$

При желании векторы x_i и функционалы g_j можно взять весовыми. Тогда (2) примет вид

$$\lim_s \left\| T(s)\, x - \sum_{i=1}^r g_i(x)\, \chi_i(s)\, x_i \right\| = 0, \quad x \in \mathbf{B}, \tag{3}$$

* Мы заменим далее этот термин на «компактифицирующий».

где χ_i^* — соответствующие унитарные веса. Примером к теореме 1 может служить полугруппа степеней оператора, удовлетворяющего условиям теоремы Иосида — Какутани [4].

Доказательству теоремы 2 предпошлем две леммы.

Лемма 1. *Любое изометрическое компактифицирующее представление конечномерно.*

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что компакт F совпадает с множеством предельных точек орбит $\{T(s)x\}$, $\|x\| = 1$. Сужение $T(s)|F$, будучи изометрией компакта, суръективно [5]. Поэтому $d(T(s)x, F) = d(x, F)$, $\|x\| = 1$, откуда $d(x, F) = 0$, т. е. $x \in F$. Таким образом, единичная сфера содержится в F и, следовательно, компактна.

Замечание. Приведенное доказательство (и, тем самым, утверждение леммы) справедливо в любом нормированном (необязательно полном) пространстве.

Лемма 2. *Если T — компактифицирующее представление, то из любой поднаправленности $T(s_\alpha)x$, $\|x\| = 1$, можно выделить сходящуюся поднаправленность.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что никакая точка компакта F не является предельной для направленности $\{T(s_\alpha)x\}$. Тогда для каждой точки $z \in F$ существует окрестность $U(z)$ и элемент $\alpha_z \in S$, такие, что $U(z)$ не пересекается с $\{T(s_\alpha)x\}_{\alpha > \alpha_z}$. Так как F — компакт, то существует конечная система $U(z_1), \ldots, U(z_N)$, покрывающая F. Выберем β большим $\alpha_{z_1}, \ldots, \alpha_{z_N}$. Тогда $\bigcup_{i=1}^{N} U(z_i)$ не пересекается с $\{T(s_\alpha)x\}_{\alpha > \beta}$. Это противоречит (1).

Следствие. *Если T — компактифицирующее представление, то для любой конечной системы векторов $x_1, \ldots, x_r$ и любой поднаправленности $\{s_\alpha\}$ существует поднаправленность $\{s_{\alpha_\gamma}\}$ такая, что все поднаправленности $\{T(s_{\alpha_\gamma})x_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant r$, сходятся.*

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим подпространство $B_0 = \{x \mid \lim_s \|T(s)x\| = 0\}$, инвариантное относительно всех $T(s)$. Если $B_0 = \mathbf{B}$, то представление T сходится к нулю и тем более является а. п. п. Если $B_0 \neq \mathbf{B}$, рассмотрим фактор-пространство $\hat{B} = \mathbf{B}/B_0$. Введем в $\mathbf{B}$ полунорму $l(x) = \lim_s \|T(s)x\| \leqslant \|x\|$, (предел существует, так как $\|T(s)\| \leqslant 1$, $s \in S$). Поскольку $B_0 = \ker l$, то полунорма l порождает на $\hat{B}$ норму, которую обозначим через $\hat{l}$. Операторы $\hat{T}(s)$, индуцированные в $\hat{B}$, являются, очевидно, изометрическими в норме $\hat{l}$. Более того, $\hat{T}$ представляет собой компактифицирующее представление: в качестве соответствующего компакта можно взять $\hat{G} = \{\hat{x} \mid x \in G\}$, где $G = \{\lambda x \mid 1 \leqslant \lambda \leqslant 2, x \in F\}$. В силу леммы 1 (и замечания к ней) фактор-пространство $\hat{B}$ конечномерно. Таким образом, $\operatorname{codim} B_0 = r < \infty$. Поэтому существует дополнение M ($\mathbf{B} = B_0 \dotplus M$), $\dim M = r$. Выберем в M базис $\{x_i\}_{i=1}^r$. Координаты $f_i(x)$ вектора $x \in M$ в этом базисе можно продолжить до линейных функционалов во всем $\mathbf{B}$ (не меняя обозначения). Система $\{x_i\}_{i=1}^r$, $\{f_i\}_{i=1}^r$ биортогональна, поэтому $f_i\left(x - \sum_{j=1}^{r} f_j(x)x_j\right) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant r$, откуда $x - \sum_{j=1}^{r} f_j(x)x_j \in B_0$, и, следовательно,

$$\lim_s \left(T(s)x - \sum_{j=1}^{r} f_j(x)T(s)x_j\right) = 0, \quad x \in B. \tag{4}$$

Пусть $\{s_\alpha\}$ — произвольная поднаправленность. В силу следствия леммы 2 существует поднаправленность $\{s_{\alpha_\gamma}\}$ такая, что $\{T(s_{\alpha_\gamma})x_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant r$, сходятся. Вместе с (4) это означает, что поднаправленность $T(s_{\alpha_\gamma})$ сильно сходится. Таким образом, T — а. п. п. представление, при этом $B_1 \approx M$ и, следовательно, $\dim B_1 < \infty$.

Пусть, обратно, T — а. п. п. представление и его граничное подпространство B_1 конечномерно. Пусть F — единичный шар в B_1. Тогда F — компакт, и по теореме об отщеплении граничного спектра выполняется требуемое равенство (1). Теорема 1 доказана.

Отметим, что для любого компактифицирующего представления действие в граничном подпространстве B_1, будучи изометрическим, порождает некоторое действие полугруппы S гомеоморфизмами на множестве крайних точек единичного шара в B_1. Это обстоятельство открывает в ряде случаев возможность более конкретного (динамического) описания подпредставления $T|B_1$.

2. Пусть в вещественном банаховом пространстве B задан замкнутый тотальный конус * C и компактифицирующее представление T неотрицательно, т. е. все $T(s) \geqslant 0$ ($\Leftrightarrow T(s)\, C \subset C$). Тогда граничный проектор ** P также будет неотрицательным (см. [2, 3]). В граничном подпространстве B_1 конус $C_1 = C \cap B_1 = PC$ будет также замкнутым и тотальным. Поскольку $\dim B_1 < \infty$, то C_1 — телесный конус в $\operatorname{Re} B_1$. Рассмотрим пересечение Γ множества крайних лучей конуса C_1 с единичной сферой. Представление T действует на Γ гомеоморфизмами, так как операторы $T(s) \mid \operatorname{Re} B_1$ являются порядковыми автоморфизмами и одновременно обратимыми изометриями. Предположим теперь, что конус C миниэдрален. Тогда и конус C_1 миниэдрален. Но замкнутый телесный миниэдральный конус в конечномерном пространстве является координатным конусом, т. е. множество Γ в этом случае есть базис в B_1. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть T — неотрицательное компактифицирующее представление в вещественном банаховом пространстве B с замкнутым тотальным миниэдральным конусом. Тогда существует конечная биортогональная система $\{x_i\}_{i=1}^r \subset \mathbf{B}$, $(x_i \geqslant 0,\ \|x_i\| = 1)$, $\{g_j\}_{j=1}^r \subset B^*$, $g_j \geqslant 0$, такая, что*

$$\lim_s \left\| T(s)\, x - \sum_{i=1}^r g_i(x)\, x_{\sigma(s) i} \right\| = 0, \tag{5}$$

где σ — представление полугруппы S подстановками множества $\{1, \ldots, r\}$.

3. Пусть T — компактифицирующее положительное представление в $L^p(X, \Sigma, \mu)$, где $1 \leqslant p < \infty$, (X, Σ, μ) — пространство с конечной мерой μ (Σ—σ-алгебра измеримых множеств), $T(s)\, 1 = 1$, $\|T(s)\| \leqslant 1$, $s \in S$ (последнее не умаляет общности). Ниже более конкретно, чем в теореме 2, описывается граничное подпространство B_1. Обозначим через ξ_A характеристическую функцию множества $A \in \Sigma$ и положим $\hat{\xi}_A = (\mu(A))^{-1/p}\, \xi_A$.

Теорема 3. *Пусть T — компактифицирующее представление в $L^p(X, \Sigma, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, $\mu(X) < \infty$, $T(s)\, 1 = 1$. Тогда существует конечная система попарно непересекающихся подмножеств $\{A_i\}_{i=1}^r \subset \Sigma$ такая, что для функций $\hat{\xi}_{A_i}$, $1 \leqslant i \leqslant r$, и соответствующей дуальной системы функционалов $\{g_i\}_{i=1}^r$*

$$\lim_s \left\| T(s)\, x - \sum_{i=1}^r g_i(x)\, \hat{\xi}_{A_{\sigma(s) i}} \right\| = 0, \qquad x \in L^p(X, \Sigma, \mu),$$

где σ — некоторое представление полугруппы S подстановками множества $\{1, \ldots, r\}$.

Доказательство. Пусть P — граничный проектор. Так как $P \geqslant 0$, $\|P\| = 1$, то граничное подпространство B_1 — подрешетка в $L^p(X, \Sigma, \mu)$. В самом деле, пусть $x(t) \in B_1$, $y = |x|$. Тогда $y = |Px| \leqslant Py$. Если $y \neq$

---

* По поводу основных понятий и фактов теории банаховых пространств с конусом см. [6].

** Теорема об отщеплении граничного спектра и теорема 1 далее применяются к комплексифицированному представлению.

$\neq Py$, то $(Py)(t) > y(t)$ на множестве положительной меры, откуда $\| Py \| > \| y \|$, что невозможно, так как $\| P \| = 1$. Итак, если $x \in B_1$, то $P|x| = |x|$, т. е. $|x| \in B_1$ и B_1 — подрешетка, содержащая константы. Пусть $\Sigma' = \{A \in \Sigma \mid \xi_A \in B_1\}$. Тогда Σ' — σ-подалгебра σ-алгебры Σ, причем Σ' конечна, так как $\dim B_1 < \infty$. Поэтому если функция $x(t)$ измерима относительно Σ', то $x(t) \in B_1$, будучи конечной линейной комбинацией характеристических функций ξ_A, $A \in \Sigma'$. Обратно, пусть $x(t) \in B_1$. Положим для каждого вещественного α $x_n(t) = n[\inf\{x(t), \alpha\} - \inf\{x(t), \alpha - 1/n\}]$, $n = 1, 2, \ldots$. Функции $x_n(t)$ принадлежат B_1, так как B_1 — подрешетка. При $n \to \infty$ последовательность $\{x_n(t)\}$ поточечно не возрастает и сходится к характеристической функции ξ множества $M = \{t \mid x(t) \geqslant \alpha\}$. Следовательно, $\xi \in B_1$, т. е. $M \in \Sigma'$. Таким образом, B_1 состоит в точности из функций, измеримых относительно Σ'. Пусть $\{A_i\}_{i=1}^r$ — атомы в Σ'. Ясно, что $B_1 = \mathrm{Lin}\{\xi_{A_i}\}_{i=1}^r$. Функции $\hat{\xi}_{A_i}$, $1 \leqslant i \leqslant r$, (и только они) являются точками пересечения единичной сферы с множеством крайних лучей конуса неотрицательных функций в B_1. Остается применить теорему 2.

Замечание. Множество $\Gamma = \{\hat{\xi}_{A_i}\}_{i=1}^r$ разбивается на конечное число попарно непересекающихся циклов $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$. Подмножества $E_j = \bigcup \{A_i : \hat{\xi}_{A_i} \in \Gamma_j\}$, $1 \leqslant j \leqslant k$, попарно не пересекаются и называются эргодическими классами представления T. Благодаря изометричности операторов $T(s)$ на граничном подпространстве B_1 и обратимости $T(s)$ на B_1 в классе неотрицательных операторов имеем $\mu(A_{i_1}) = \mu(A_{i_2})$, если A_{i_1}, A_{i_2} принадлежат одному и тому же эргодическому классу. Следовательно, $T(s)$ переставляют не только $\hat{\xi}_{A_i}$, но и сами характеристические функции ξ_{A_i}.

Переходим к более общему случаю σ-конечной меры μ. Специфика этой ситуации состоит в отсутствии единицы.

Теорема 4. *Пусть T — компактифицирующее представление в $L^p(X, \Sigma, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, где (X, Σ, μ) — пространство с σ-конечной мерой. Тогда существует конечная система функций $x_i \in L^p(X, \Sigma, \mu)$, $\| x_i \| = 1$, с попарно не пересекающимися носителями и дуальная система функционалов $\{g_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant r$, такая, что*

$$\lim_s \left\| T(s)\, x - \sum_{i=1}^{r} g_i(x)\, x_{\sigma(s)i} \right\| = 0, \quad x \in L^p(X, \Sigma, \mu),$$

где σ — некоторое представление полугруппы S подстановками множества $\{1, \ldots, r\}$.

Доказательство. Поскольку B_1 — конечномерная инвариантная подрешетка и сужение $T(s) \mid B_1$ положительно и изометрично, то существует функция $h \geqslant 0$, $h \neq 0$, инвариантная относительно всех $T(s)$, причем каждая функция $x(t) \in B_1$ равна нулю тождественно вне носителя $G = \operatorname{supp} h$. Пусть $\hat{\mu}(A) = \int_A h^p d\mu$, $A \in \Sigma$. Очевидно, $\hat{\mu}$ — конечная мера. В пространстве $L^p(X, \Sigma, \hat{\mu})$ (норму в нем обозначим через $|\cdot|$) рассмотрим аналогично [1] представление $\hat{T}(s)\, x = [T(s)(xh)]/h$. Очевидно, $\hat{T}(s)\, 1 = 1$, $\hat{T}(s) \geqslant 0$ и $\| \hat{T}(s) \| \leqslant 1$, $s \in S$ (поскольку $\| T(s) \| \leqslant 1$). Линейный оператор $\hat{h} : L^p(X, \Sigma, \hat{\mu}) \to L^p(G, \Sigma, \mu)$, действующий путем умножения на h, является обратимой изометрией. Кроме того, $B_1 \subset L^p(G, \Sigma, \mu)$. Следовательно, представление $\hat{T}$ компактифицирующее. Пусть $\hat{B}_1$ — граничное подпространство представления $\hat{T}$. Согласно теореме 3 существует конечная система попарно непересекающихся подмножеств $\{A_i\}_{i=1}^r$, $A_i \subset G$, такая, что $\mathrm{Lin}\{\hat{\xi}_{A_i} \mid 1 \leqslant i \leqslant r\} = \hat{B}_1$, и $\hat{T}(s)\, \hat{\xi}_{A_i} = \hat{\xi}_{A_{\sigma(s)i}}$, где σ — некоторое представление полугруппы S подстановками множества $\{1, \ldots, r\}$. Оператор $\hat{h}$ осуществляет биекцию $\hat{B}_1$ на B_1, откуда следует, что функции $x_i = \hat{h}\hat{\xi}_{A_i}$ образуют базис в B_1. Теорема 4 доказана.

Теорема 4 при $p = 1$ (и $S = Z_+$) дает основной результат [1], причем даже без требования марковости оператора.

1. *Lasota A.*, *Li T. Y.*, *Yorke J. A.* Asymptotic periodicity of the iterates of Markov operators // Trans. Amer. Math. Soc.— 1984.— **286**, N 2.— P. 751—764.
2. *Любич М. Ю.*, *Любич Ю. И.* Спектральная теория почти периодических представлений полугрупп // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 5.— С. 632—636.
3. *Любич Ю. И.* Введение в теорию банаховых представлений групп.— Харьков : Высш. шк., 1985.— 144 с.
4. *Бродский М. С.*, *Мильман Д. П.* О центре выпуклого множества // Докл. АН СССР.— 1948.— **59**, № 5.— С. 837—840.
5. *Данфорд Н.*, *Шварц Дж.* Линейные операторы (общая теория).— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 895 с.
6. *Крейн М. Г.*, *Рутман М. А.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи мат. наук.— 1948.— **3**, № 1.— С. 3—95.

Харьков. ун-т

Получено 24.12.85