УДК 517.53

В. С. Бойчук

Об одном классе целых функций

В настоящей статье приводится полное изложение результата, анонсированного в [1]. Напомним некоторые определения.

Непрерывно дифференцируемая на $[0; \infty)$ функция $l(r)$ называется обобщенным уточненным порядком, если $0 \leqslant \rho_1(l) = \varliminf_{r\to\infty} l(r) \leqslant \varlimsup_{r\to\infty} l(r) = \rho_2(l) < \infty$, $\lim_{r\to\infty} rl'(r)\ln r = 0$. Если $p < \rho_1(l) \leqslant \rho_2(l) < p+1$, где $p = p(l)$ — целое число, то $l(r)$ называется уточненным порядком в смысле Бутру. Всюду далее под $l(r)$ будем понимать уточненный порядок в смысле Бутру и будем считать $\rho_1 = \rho_1(l)$, $\rho_2 = \rho_2(l)$, $p = p(l)$.

Множество $G \subset R^2$ называется C^ε-множеством ($\varepsilon > 0$), если существует такое покрытие этого множества кружками $\{z : |z - z_j| \leqslant r_j\}$, что $\sum_{|z_j|\leqslant r} r_j^\varepsilon = o(r^\varepsilon)$, $r\to\infty$.

Множество $G \subset R^2$ называется C^0-множеством, если оно является C^ε-множеством для каждого $\varepsilon > 0$. Легко видеть, что объединение конечного числа C^0-множеств является C^0-множеством. Всюду далее под C^0 будем понимать некоторое C^0-множество.

Теорема 1. *Для любого уточненного порядка в смысле Бутру $l(r)$ и любой ограниченной 2π-периодической ρ-тригонометрически выпуклой для каждого $\rho \in [\rho_1; \rho_2]$ функции $h(\theta)$ существует целая функция $f(z)$, удовлетворяющая соотношению*

$$\ln|f(re^{i\theta})| = h(\theta)\, r^{l(r)} + o(r^{l(r)}), \quad r\to\infty, \quad re^{i\theta} \notin C^0. \tag{1}$$

Результат, близкий к теореме 1, получен А. А. Кондратюком [2]. Именно, здесь в условиях теоремы 1 строится целая функция, индикатор которой совпадает с $h(\theta)$. При этом под индикатором целой функции понимается некоторый ряд Фурье. Из (1) видно, что указанный результат А. А. Кондратюка содержится в теореме 1.

Схема доказательства теоремы 1 следующая. Сначала строим субгармоническую функцию $u(z)$, растущую как правая часть (1) при $z = re^{i\theta} \to \infty$, $z \notin C^0$. Затем аппроксимируем функцию $u(z)$ логарифмом модуля некоторой целой функции вне C^0. Последняя и будет искомой целой функцией.

Обозначим через $U(l)$ класс субгармонических в плоскости функций $u(z)$, удовлетворяющих условию $\max\{u(z) : |z| = r\} = O(r^{l(r)})$, $r\to\infty$.

Теорема 2. *Для любого уточненного порядка в смысле Бутру $l(r)$ и любой ограниченной 2π-периодической ρ-тригонометрически выпуклой для каждого $\rho \in [\rho_1; \rho_2]$ функции $h(\theta)$ существует функция $u(z) \in U(l)$ такая, что*

$$u(re^{i\theta}) = h(\theta)\, r^{l(r)} + o(r^{l(r)}), \quad r\to\infty, \quad re^{i\theta} \notin C^0. \tag{2}$$

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Пусть μ — распределение масс (мера) в плоскости и $\mu(z; r)$ — масса круга $K(z; r) = \{\zeta : |\zeta - z| \leqslant r\}$. Определим класс $\mathfrak{M}(l)$ ($\mathfrak{M}_0(l)$) распределений масс в плоскости следующим образом: $\mu \in \mathfrak{M}(l)$ ($\mu \in \mathfrak{M}_0(l)$) тогда и только тогда, когда $\mu(0; 1) = 0$ и $\mu(0; r) = O(r^{l(r)})$ ($\mu(0; r) = o(r^{l(r)})$) при

$r \to \infty$. Каждому распределению масс $\mu \in \mathfrak{M}(l)$ соответствует канонический потенциал [3] $I(z;\mu) = \int\limits_{R^2} H(z,\zeta,p)\,d\mu(\zeta)$, где $H(z,\zeta,p) = \ln|E(z/\zeta,p)|$, а $E(v,p)$ — первичный множитель Вейерштрасса рода p. Канонический потенциал представляет собой функцию, субгармоническую в плоскости.

Следующее утверждение является основой для доказательства теоремы 2.

Лемма 1. *Пусть* $\mu \in \mathfrak{M}_0(l)$. *Тогда* $I(z;\mu) = o(|z|^{l(|z|)})$ *при* $z \to \infty$, $z \notin C^0$.

Доказательство леммы 1 проведем в несколько этапов.

Пусть μ — мера, фигурирующая в лемме 1. Существует медленно растущая функция $\gamma(r) < 1/4$, $r \geqslant 0$, для которой

$$\gamma(r) = o(1), \quad r \to \infty, \tag{3}$$

$$\mu(0;r) = o(\gamma(r)\,r^{l(r)}), \quad r \to \infty. \tag{4}$$

Обозначим через $A(z;\gamma)$ и $B(z;\gamma)$ множества точек ζ, лежащих вне круга $K(z;\gamma(|z|)|z|)$ и удовлетворяющих соответственно неравенствам $|\zeta| \leqslant |z|$, $|\zeta| > |z|$.

Лемма 2. *Выполняются неравенства* $(z, \zeta \neq 0)$:

$$|H(z,\zeta,p)| < \begin{cases} \ln \dfrac{|z|}{\gamma(|z|)|\zeta|} + p\left|\dfrac{z}{\zeta}\right|^p, & \zeta \in A(z;\gamma), \\ \dfrac{2^p(p+2)}{\gamma(|z|)}\left|\dfrac{z}{\zeta}\right|^{p+1}, & \zeta \in B(z;\gamma). \end{cases}$$

Доказательство леммы 2 элементарно.

Зафиксируем $z \neq 0$ и обозначим через $I_1(z;\mu;\gamma)$ и $I_2(z;\mu;\gamma)$ интегралы от $H(z,\zeta,p)$ по сужениям меры μ соответственно на круг $K(z;\gamma(|z|)|z|)$ и его внешность. Тогда

$$I(z;\mu) = I_1(z;\mu;\gamma) + I_2(z;\mu;\gamma). \tag{5}$$

Лемма 3. *В условиях леммы* 1 $I_2(z;\mu;\gamma) = o(|z|^{l(|z|)})$, $z \to \infty$.

Доказательство. Интегрируя по частям и учитывая лемму 2, находим

$$|I_2(z;\mu;\gamma)| \leqslant \int\limits_{+0}^{|z|}\left(\ln\frac{|z|}{\gamma(|z|)\,t} + p\frac{|z|^p}{t^p}\right)d\mu(0;t) +$$

$$+ \frac{2^p(p+2)}{\gamma(|z|)}|z|^{p+1}\int\limits_{|z|}^{\infty}\frac{d\mu(0;t)}{t^{p+1}} \leqslant (p^2+1)|z|^p\int\limits_{+0}^{|z|}\frac{\mu(0;t)}{t^{p+1}}\,dt +$$

$$+ \frac{2^p(p+2)^2|z|^{p+1}}{\gamma(|z|)}\int\limits_{|z|}^{\infty}\frac{\mu(0;t)}{t^{p+2}}\,dt.$$

Применяя к двум последним слагаемым правило Лопиталя и используя (4) и определение медленно растущей функции, получаем утверждение леммы 3.

Перейдем к оценке первого слагаемого в правой части (5). Проведем эту оценку методом ε-нормальных точек Хеймана [4]. Пусть $\varepsilon > 0$, $\gamma(r)$ — положительная на $[0;\infty)$ функция, удовлетворяющая условию $\gamma(r) < 1/4$, $r \geqslant 0$, и условию (3). Точка $z \neq 0$ называется (ε,γ)-нормальной относительно меры $\mu \in \mathfrak{M}(l)$, если для каждого $t \in (0; 2\gamma(|z|)|z|]$ выполняется $\mu(z;t) \leqslant |z|^{l(|z|)-\varepsilon}\gamma^{-\varepsilon/2}(|z|)\,t^{\varepsilon}$.

Лемма 4. *Пусть* z — (ε,γ)-*нормальная точка относительно меры* $\mu \in \mathfrak{M}(l)$. *Тогда для каждого* α, $0 < \alpha \leqslant 2$, *выполняется неравенство*

$$\int\limits_{K(z;\alpha\gamma(|z|)|z|)}|H(z,\zeta,p)|\,d\mu(\zeta) \leqslant \alpha^{\varepsilon}|z|^{l(|z|)}\gamma^{\varepsilon/2}(|z|)\left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln\frac{2}{\alpha\gamma(|z|)} + p2^p\right).$$

При доказательстве леммы 4 учитывается то обстоятельство, что $|\ln|(\zeta - z)/\zeta|| = \ln|\zeta/(\zeta - z)|$ при $\zeta \in K(z; \alpha\gamma(|z|)|z|)$ и используются условие (ε, γ)-нормальности и интегрирование по частям.

Лемма 5. *Множество $G = G(\varepsilon, \gamma, \mu)$ не (ε, γ)-нормальных точек относительно меры $\mu \in \mathfrak{M}(l)$ является C^ε-множеством.*

Доказательство. Для каждой точки $z \in G$ существует положительное число $t_z \leqslant 2\gamma(|z|)|z|$ такое, что

$$\mu(z; t_z) > |z|^{l(|z|)-\varepsilon}\gamma^{-\varepsilon/2}(|z|)\, t_z^\varepsilon. \tag{6}$$

Используем теперь следующее утверждение.

Лемма 6 (Альфорс [5] Ландкоф [6]). *Если множество $G \subset R^m$ покрыто шарами ограниченного радиуса так, что каждая его точка является центром шара, то из этого покрытия можно выделить не более чем счетную подсистему шаров, которая покрывает это множество, причем каждая точка из R^m покрывается шарами этой подсистемы не более, чем q-кратно, где q — число, зависящее от m.*

Применяя эту лемму к покрытию множества G кружками $K(z; t_z)$, получаем подсистему $K(z_j; t_{z_j})$, покрывающую G и для которой $\sum\limits_{2^n \leqslant |z_j| < 2^{n+1}} \mu(z_j; t_{z_j}) \leqslant q\mu(0; 2^{n+2})$, $n \in N$. Отсюда, учитывая (3), (6), условие $\mu \in \mathfrak{M}(l)$ и известное свойство обобщенного уточненного порядка

$$(kr)^{l(kr)} \leqslant k^{\rho_2+\delta} r^{l(r)}, \quad k \geqslant 1, \quad \delta > 0, \quad r \geqslant r_1(\delta), \tag{7}$$

находим

$$\sum_{2^n \leqslant |z_j| < 2^{n+1}} t_{z_j}^\varepsilon < \frac{2^{2\rho+2+\varepsilon} q\eta^{\varepsilon/2} L}{2^\varepsilon - 1}(2^{\varepsilon(n+1)} - 2^{\varepsilon n}), \tag{8}$$

где η — произвольное положительное число, $L = L(\mu)$ и $n \geqslant n_1$. Пусть $2^s \leqslant r < 2^{s+1}$, $s \geqslant n_1$. Складывая неравенства (8) по n, $n_1 \leqslant n \leqslant s$, имеем

$$\sum_{2^{n_1} \leqslant |z_j| \leqslant r} t_{z_j}^\varepsilon < \frac{4^{\rho+1+\varepsilon} q\eta^{\varepsilon/2} L r^\varepsilon}{2^\varepsilon - 1}.$$

Из последнего неравенства вытекает утверждение леммы 5.

Из лемм 3—5 следует лемма 1. Из последней, в свою очередь, вытекает следующее утверждение.

Лемма 7. *Пусть ν — заряд, вариация которого принадлежит $\mathfrak{M}_0(l)$. Тогда $I(z; \nu) = o(|z|^{l(|z|)})$, $z \to \infty$, $z \in C^0$.*

Доказательство теоремы 2. В [7] доказано, что для любого обобщенного уточненного порядка $l(r)$ существует эквивалентный ему (т. е. отличающийся от $l(r)$ на $o(\ln^{-1} r)$ при $r \to \infty$) дважды непрерывно дифференцируемый обобщенный уточненный порядок $l_1(r)$, удовлетворяющий условию

$$r^2 l''(r) \ln r = o(1), \quad r \to \infty. \tag{9}$$

Отметим, что в [1] формулируется более сильный, чем этот, результат, а именно, утверждается, что $l_1(r)$ для каждого $n = 2, 3, \ldots$ удовлетворяет условию $r^n l_1^n(r) \ln r = o(1)$, $r \to \infty$.

Таким образом, можно считать, что $l(r)$ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условию (9). Также можно считать, что $l(r) = \rho_1$ при $0 \leqslant r \leqslant 1$.

На луче $[0; \infty)$ определим функцию $l_0(r)$ следующим образом:

$$l_0(r) = \begin{cases} l(r), & \text{если } \rho_1 \leqslant l(r) \leqslant \rho_2, \\ \rho_1, & \text{если } l(r) < \rho_1, \\ \rho_2, & \text{если } l(r) > \rho_2. \end{cases}$$

Очевидно,

$$l(r) - l_0(r) = o(1), \quad r \to \infty. \tag{10}$$

Положим $\varepsilon(r) = (l(r) + rl'(r)\ln r)^2 - l_0^2(r) + 2rl'(r) + rl'(r)\ln r + r^2 l''(r)\ln r$, $r \geqslant 0$. Легко видеть, что $\varepsilon(r) = 0$, $0 \leqslant r \leqslant 1$. Кроме того, из (9), (10) и определения обобщенного уточненного порядка следует, что $\varepsilon(r) = o(1)$, $r \to \infty$.

Пусть ν — заряд в плоскости, определяемый равенством $d\nu = \frac{h(\theta)}{2\pi} r^{l(r)-2}\varepsilon(r)\, r dr d\theta$. Из свойств функции $\varepsilon(r)$ следует, что вариация $|\nu|$ этого заряда принадлежит $\mathfrak{M}_0(l)$. Следовательно, потенциал

$$I(z; \nu) = \int_{R^2} H(z, \zeta, p)\, d\nu(\zeta)$$

определен и в силу леммы 7 удовлетворяет соотношению

$$I(z; \nu) = o(|z|^{l(|z|)}), \quad z \to \infty, \quad z \notin C^0. \tag{11}$$

Пусть $u_1(re^{i\theta}) = h(\theta) r^{l(r)}$. Покажем, что функция $u(z) = u_1(z) - I(z; \nu)$ искомая.

Пусть $D^*(R^2)$ — пространство обобщенных функций над пространством $D(R^2)$ вещественных бесконечно дифференцируемых финитных в плоскости функций. Пусть далее Δ — оператор Лапласа в $D^*(R^2)$. Для доказательства субгармоничности функции $u(z)$ в плоскости достаточно показать (см., например, [8, с. 61]), что Δu является обобщенной положительной функцией, т. е. для любой неотрицательной функции $\varphi \in D(R^2)$ выполняется неравенство $(\Delta u, \varphi) \geqslant 0$.

Пусть $\varphi \in D(R^2)$, $\varphi(z) \geqslant 0$. Имеем

$$(\Delta u, \varphi) = (\Delta u_1, \varphi) - (\Delta I, \varphi) = \int_{R^2} u_1 \Delta\varphi d\sigma - (\Delta I, \varphi) = \int_{R^2} h(\theta) r^{l(r)} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi(re^{i\theta})}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi(re^{i\theta})}{\partial\theta^2}\right] r dr d\theta - (\Delta I, \varphi) =$$

$$= \int_{R^2} h(\theta) r^{l(r)} \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi(re^{i\theta})}{\partial r}\right) dr d\theta + \int_{R^2} h(\theta) r^{l(r)-1}\frac{\partial^2\varphi(re^{i\theta})}{\partial\theta^2} dr d\theta - (\Delta I, \varphi). \tag{12}$$

Можно показать (см., например, [8, с. 78]), что

$$(\Delta I, \varphi) = (2\pi\nu, \varphi) = \int_{R^2} h(\theta) r^{l(r)-1}\varepsilon(r)\varphi(re^{i\theta})\, dr d\theta. \tag{13}$$

Далее, интегрируя дважды по частям по r и учитывая финитность φ, получаем

$$\int_{R^2} h(\theta) r^{l(r)} \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi(re^{i\theta})}{\partial r}\right) dr d\theta = \int_0^{2\pi} h(\theta)\, d\theta \int_0^\infty r^{l(r)} \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi(re^{i\theta})}{\partial r}\right) dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} h(\theta)\, d\theta \int_0^\infty r^{l(r)-1}(l_0^2(r) + \varepsilon(r))\varphi(re^{i\theta})\, dr = \int_{R^2} h(\theta) l_0^2(r) r^{l(r)-1}\varphi(re^{i\theta})\, dr d\theta +$$

$$+ \int_{R^2} h(\theta) r^{l(r)-1}\varepsilon(r)\varphi(re^{i\theta})\, dr d\theta.$$

Из последнего равенства, а также из (12) и (13) следует

$$(\Delta u, \varphi) = \int_0^\infty r^{l(r)-1} dr \int_0^{2\pi}\left(l_0^2(r) h(\theta)\varphi(re^{i\theta}) + h(\theta)\frac{\partial^2\varphi(re^{i\theta})}{\partial\theta^2}\right) d\theta. \tag{14}$$

Зафиксируем $r \geqslant 0$ и положим $l_0(r) = \rho$. Функция $h(\theta)$ 2π-периодическая ρ-тригонометрически выпуклая (ρ — нецелое), следовательно, представима в виде (см., например, [9, с. 84])

$$h(\theta) = \frac{1}{2\rho \sin \pi\rho} \int_0^{2\pi} \widetilde{\cos}\, \rho(\theta - \psi - \pi)\, ds(\psi),$$

где

$$\widetilde{\cos}\, \rho(\theta - \psi - \pi) = \begin{cases} \cos \rho(\theta - \psi - \pi), & 0 \leqslant \psi \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \\ \cos \rho(\theta - \psi + \pi), & 0 \leqslant \theta \leqslant \psi \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

а s — мера на единичной окружности, соответствующая $h(\theta)$ и ρ. Поэтому интегрируя дважды по частям и учитывая периодичность $\varphi(re^{i\theta})$ относительно θ, находим

$$\int_0^{2\pi} h(\theta) \frac{\partial^2 \varphi(re^{i\theta})}{\partial \theta^2}\, d\theta = \frac{1}{2\rho \sin \pi\rho} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\psi} \cos \rho(\theta - \psi + \pi) \frac{\partial^2 \varphi(re^{i\theta})}{\partial \theta^2}\, d\theta + \right.$$

$$\left. + \int_{\psi}^{2\pi} \cos \rho(\theta - \psi - \pi) \frac{\partial^2 \varphi(re^{i\theta})}{\partial \theta^2}\, d\theta \right] ds(\psi) = \frac{1}{2\rho \sin \pi\rho} \int_0^{2\pi} \left[2\rho \sin \pi\rho \varphi(re^{i\psi}) - \right.$$

$$\left. - \rho^2 \int_0^{2\pi} \widetilde{\cos}\, \rho(\theta - \psi - \pi)\, \varphi(re^{i\theta})\, d\theta \right] ds(\psi) = \int_0^{2\pi} \varphi(re^{i\psi})\, ds(\psi) -$$

$$- l_0^2(r) \int_0^{2\pi} h(\theta)\, \varphi(re^{i\theta})\, d\theta.$$

Поскольку $\varphi(re^{i\theta}) \geqslant 0$, то из (14) и последнего равенства следует, что $(\Delta u, \varphi) \geqslant 0$. Таким образом, функция $u(z)$ субгармонична в плоскости. Далее, из (11) следует, что $u(z)$ удовлетворяет условию (2). Наконец, принадлежность $u(z)$ классу $U(l)$ вытекает из (2), (7) и принципа максимума для субгармонических функций. Теорема 2 доказана.

Теорема 1 вытекает из теоремы 2 и следующего утверждения.

Т е о р е м а 3. *Для любого уточненного порядка в смысле Бутру $l(r)$ и любой функции $u(z) \in U(l)$ существует целая функция $f(z)$ такая, что $u(z) - \ln|f(z)| = o(|z|^{l(|z|)})$, $z \to \infty$, $z \notin C^0$.*

Теорема 3 анонсирована в 1979 г. в [1] и доказана в кандидатской диссертации автора. В настоящее время получены более сильные, чем теорема 3, результаты об асимптотической аппроксимации субгармонических функций. Они содержатся, в частности, в [10, 11]. В последней статье доказывается, например, что для произвольной субгармонической в конечной плоскости функции $u(z)$ конечного порядка существует целая функция $f(z)$, удовлетворяющая асимптотическому неравенству

$$|u(z) - \ln|f(z)|| \leqslant C \ln^2|z|, \quad z \to \infty, \quad z \notin E. \tag{15}$$

Доказательство теоремы 3 не приводим. Отметим лишь, что она не вытекает из указанного результата Р. С. Юлмухаметова, поскольку исключительное множество E, фигурирующее в (15), не является, вообще говоря, $C0$-множеством.

1. *Бойчук В. С.* О росте некоторых классов аналитических функций: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— М., 1979.— 13 с.
2. *Кондратюк А. А.* Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста // Мат. сб.— 1978.— 106, № 3.— С. 386—408.
3. *Brelot M.* Étude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point singulier // Ann. Inst. Fourier.— 1949.— 1.— P. 121—156.
4. *Hayman W. K.* Question of regularity connected with the Phragment—Lindelof principle // J. math. pures et appl.— 1956.— 35, N 2. —P. 115—126.
5. *Ahlfors L.* Ein Satz von H. Cartan und seine Anwendung auf die Theorie der meromorphen Funktionen // Comment. phys.-math. Soc. sci. fenn.— 1931.— 5, N 16.— P. 84—91.
6. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала.— М. : Наука, 1966.— 515 с.
7. *Бойчук В. С.* О некоторых свойствах уточненного порядка // Сиб. мат. журн.— 1979.— 20, № 2.— С. 229—236.

8. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных.— М. : Наука, 1971.— 430 с.
9. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.— М. : Гостехиздат, 1956.— 632 с.
10. *Юлмухаметов Р. С.* Асимптотическая аппроксимация субгармонических функций // Докл. АН СССР.— 1982.— **264**, № 4.— С. 839—841.
11. *Юлмухаметов Р. С.* Приближение субгармонических функций // Мат. сб.— 1984.— **124**.— С. 392—415.

Укр. ин-т инженеров вод. хоз-ва, Ровно

Получено 15.03.83,
после доработки — 24.02.86