УДК 517.9

В. Е. Слюсарчук (Укр. ин-т инженеров вод. хоз-ва, Ривнэ)

УСИЛЕНИЕ ТЕОРЕМЫ КНЕЗЕРА О НУЛЯХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $y''+p(x)y = 0$

We find conditions for a linear homogeneous second order equation to be nonoscillatory on the half-axis and such that its solutions have infinitely many zeros.

Знайдено умови, при виконанні яких лінійне однорідне рівняння другого порядку є неколивним на півосі, а також умови, при яких його розв'язки мають безліч нулів.

В качественной теории дифференциальных уравнений важную роль играет теорема, доказанная Кнезером.

Теорема 1 [1, 2]. *Если в уравнении*

$$y''+p(x)y = 0 \tag{1}$$

коэффициент $p(x)$ *удовлетворяет условиям*

$$0 < p(x) \le \frac{1}{4x^2}, \quad x \ge x_0,$$

то его ненулевое решение не может иметь бесконечного числа нулей в интервале $(x_0, +\infty)$. *Если же*

$$p(x) > \frac{1+\alpha}{4x^2}, \quad \alpha > 0, x \ge x_1,$$

то любое ненулевое решение имеет бесконечное множество нулей в интервале $(x_1, +\infty)$.

Хилле [3] и Хартман [4] заметили, что утверждение теоремы Кнезера сохраняется, если в этой теореме функции

$$p_1(x, 0) = \frac{1}{4x^2} \quad \text{и} \quad p_1(x, \alpha) = \frac{1+\alpha}{4x^2}$$

заменить соответственно функциями $p_n(x, 0)$ и $p_n(x, \alpha)$, $n \ge 2$, где

$$p_n(x, \alpha) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{4} + p_{n-1}(\ln x, \alpha)\right), \quad n \ge 2$$

(см. также [5, 6]).

Цель данной статьи — построение такой функции $K(x)$, что:

1) для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется число $a > 0$ такое, что $K(x) > p_n(x, 0)$ для всех $x > a$;

2) сохраняется утверждение первой части теоремы Кнезера, если в ней функцию $p_1(x, 0) = (4x^2)^{-1}$ заменить на $K(x)$.

Рассмотрим функции

$$l_0(x) = \frac{e-1+x}{e},$$

$$l_n(x) = \frac{e-1+\ln(el_{n-1}(x))}{e}, \quad n \ge 1,$$

$$\prod\nolimits_0^n(x) = \prod_{k=0}^{n} l_k(x), \quad n \ge 0.$$

Обозначим через $K(x)$ сумму функционального ряда

$$\frac{1}{4(e-1+x)^2}+$$

$$+\frac{1}{4(e-1+x)^2(e-1+\ln(e-1+x))^2}+\ldots+\frac{1}{4e^{2n}\left(\prod_0^{n-1}(x)\right)^2}+\ldots, \qquad (2)$$

которая на $[1,+\infty)$ является непрерывной функцией, поскольку ряд (2) мажорируется на $[1,+\infty)$ рядом

$$\frac{1}{4e^2}+\frac{1}{4e^4}+\ldots+\frac{1}{4e^{2n}}+\ldots$$

и члены ряда (2) непрерывны на $[1,+\infty)$ [7, с. 427].

Очевидно, что $K(x)>p_n(x,0)$ для всех достаточно больших x.

Покажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если в уравнении* (1) *коэффициент удовлетворяет условиям*

$$0<p(x)\le K(x), \quad x\ge x_0\ge 1, \qquad (3)$$

то его ненулевое решение не может иметь бесконечное число нулей в интервале $(x_0,+\infty)$. *Если же для некоторого* $n\in\mathbb{N}$

$$\varliminf_{x\to+\infty}(p(x)-K(x))\left(\prod_0^n(x)\right)^2>0,$$

то любое ненулевое решение уравнения (1) *имеет бесконечное множество нулей в каждом интервале* $(x_1,+\infty)$ *(*x_1 *— достаточно большое положительное число).*

Доказательство. Рассмотрим функции

$$\prod_m(x)=\prod_{k=m}^{\infty}l_k(x), \quad m\ge 0,$$

где $x\ge 1$. Заметим, что бесконечные произведения $\prod_{k=m}^{\infty}l_k(x)$, $m\ge 0$, сходятся при $x\ge 1$, поскольку

$$\begin{gathered}1\le l_0(x)\le 1+(x-1)e^{-1},\\ 1\le l_1(x)\le 1+(x-1)e^{-2},\\ 1\le l_2(x)\le 1+(x-1)e^{-3},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ 1\le l_n(x)\le 1+(x-1)e^{-n-1}\ldots\end{gathered} \qquad (4)$$

для всех $x\ge 1$ и сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x-1)e^{-k-1} \qquad (5)$$

для $x\ge 1$ (см., например, [7, с. 355]). Эти произведения непрерывны по x на $[1,+\infty)$, поскольку согласно неравенствам (4) и сходимости ряда (5) для $x\ge 1$ функциональный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\ln l_k(x) \qquad (6)$$

равномерно сходится на $[1, M]$ для каждого $M > 1$ и функции $\ln l_k(x)$, $k \geq 0$, непрерывны на $[1, +\infty)$.

Далее заметим, что $\Pi_0(x)$ — дифференцируемая на $[1, +\infty)$ функция. Действительно, ряд (6) сходится на $[1, +\infty)$,

$$\ln \Pi_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \ln l_k(x),$$

$$(\ln l_k(x))' = \frac{e^{-k-1}}{\prod_0^k(x)}$$

и

$$0 < (\ln l_k(x))' \leq e^{-k-1}$$

для всех $x \geq 1$ и $k \geq 0$. Следовательно, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\ln l_k(x))'$$

равномерно сходится на $[1, +\infty)$. Поэтому функция $\ln \Pi_0(x)$ дифференцируема на $[1, +\infty)$ и

$$(\ln \Pi_0(x))' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-k-1}}{\prod_0^k(x)}.$$

Отсюда следует, что функция $\Pi_0(x)$ дифференцируема на $[1, +\infty)$ и

$$(\Pi_0(x))' = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \Pi_k(x). \tag{7}$$

В равенстве (7) функции $\Pi_k(x)$, $k \geq 1$, равномерно ограничены на каждом отрезке $[1, M]$, $M > 1$, поскольку согласно (4)

$$1 \leq \Pi_k(x) \leq e^{\frac{x-1}{e-1}} \tag{8}$$

для всех $x \geq 1$ и $k \geq 0$.

Каждая из функций $\Pi_k(x)$, $k \geq 1$, также дифференцируема на $[1, +\infty)$, поскольку $\Pi_k(x) = \Pi_0(x)\left[\prod_0^{k-1}(x)\right]^{-1}$ и функции $\Pi_0(x)$, $\left[\prod_0^{k-1}(x)\right]^{-1}$ дифференцируемы на $[1, +\infty)$. Аналогично равенству (7) устанавливается, что

$$(\Pi_k(x))' = \frac{1}{\prod_0^{k-1}(x)} \sum_{m=k+1}^{\infty} e^{-m} \Pi_m(x) \tag{9}$$

для $x \geq 1$. Отсюда и из (8) следует

$$\frac{e^{-k}}{e-1} \leq (\Pi_k(x))' \leq \frac{e^{-k}}{e-1} e^{\frac{x-1}{e-1}}$$

для всех $x \geq 1$. Поэтому ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} (\Pi_k(x))'$$

равномерно сходится на каждом отрезке $[1, M]$, $M > 1$. Следовательно, функция $(\Pi_k(x))'$ согласно (7) дифференцируема на $[1, +\infty)$ и

$$(\Pi_0(x))'' = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} \frac{1}{\prod_0^{k-1}(x)} \sum_{m=k+1}^{\infty} e^{-m} \Pi_m(x) \tag{10}$$

(здесь учтено равенство (9)).

Рассмотрим функцию $L(x) = (\Pi_0(x))^{1/2}$. Эта функция является решением уравнения

$$y'' + K(x)y = 0, \quad x \geq 1. \tag{11}$$

Действительно,

$$(L(x))' = \frac{1}{2}(\Pi_0(x))^{-1/2}(\Pi_0(x))',$$

$$(L(x))'' = -\frac{1}{4}(\Pi_0(x))^{-3/2}[(\Pi_0(x))']^2 + \frac{1}{2}(\Pi_0(x))^{-1/2}(\Pi_0(x))'' =$$

$$= -\frac{1}{4}(\Pi_0(x))^{-3/2}[[(\Pi_0(x))']^2 - 2\Pi_0(x)(\Pi_0(x))''] = -\frac{1}{4}(\Pi_0(x))^{-3/2} \times$$

$$\times \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} \Pi_k(x) \right)^2 - 2\Pi_0(x) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} \frac{1}{\prod_0^{k-1}(x)} \sum_{m=k+1}^{\infty} e^{-m} \Pi_m(x) \right] =$$

$$= -\frac{1}{4}(\Pi_0(x))^{-3/2} \times$$

$$\times \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} \Pi_k(x) \right)^2 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=k+1}^{\infty} (e^{-k} \Pi_k(x))(e^{-m} \Pi_m(x)) \right] =$$

$$= -\frac{1}{4}(\Pi_0(x))^{-3/2} \sum_{k=1}^{\infty} (e^{-k} \Pi_k(x))^2 =$$

$$= -\frac{1}{4}(\Pi_0(x))^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e^{-k} \Pi_k(x))^2}{(\Pi_0(x))^2} =$$

$$= -\frac{1}{4} L(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{2k} \left(\prod_0^{k-1}(x) \right)^2} = -K(x)L(x)$$

(в последней цепочке равенств были использованы соотношения (7) и (10)).

Итак, $L(x)$ — решение уравнения (11).

Общее решение уравнения (11) согласно [2, с. 532] представляется в виде

$$y = L(x) \left(C_1 + C_2 \int_1^x \frac{dx}{L^2(x)} \right), \quad x \geq 1, \tag{12}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Из определения функции $L(x)$ следует, что $L(x) \geq 1$ для всех $x \geq 1$ и поэтому интеграл $\int_1^x \frac{dx}{L^2(x)}$ — строго возрастающая на $[1, +\infty)$ функция.

Следовательно, каждое ненулевое решение (12) уравнения (11) на интервале $[1, +\infty)$ имеет не более одного нуля. Тогда в случае выполнения условия (3) на основании теоремы Штурма о разделении нулей [8] (см. также [2, 5]) ненулевое решение уравнения (1) не может иметь бесконечное число нулей на интервале $(x_0, +\infty)$.

Если же выполняется условие (4), то найдутся числа $c > 0$ и $x_1 \geq 1$, для которых $p_n(x, c) < p(x)$ для всех $x \geq x_1$. Тогда на основании используемой выше теоремы Штурма и замечания после формулировки теоремы Кнезера (см. также [6, с. 143]) каждое ненулевое решение уравнения (1) имеет бесконечное множество нулей в интервале $(x_1, +\infty)$.

Теорема 2 доказана.

Следствие. *Если для некоторого* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\varlimsup_{x \to +\infty} (p(x) - K(x)) \left(\prod\nolimits_0^n (x) \right)^2 < 0,$$

то ненулевое решение уравнения (1) *на интервале* $(x_0, +\infty)$ (x_0 *— достаточно большое положительное число) не может иметь бесконечное число нулей. Если же для некоторого* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\varliminf_{x \to +\infty} (p(x) - K(x)) \left(\prod\nolimits_0^n (x) \right)^2 > 0,$$

то каждое ненулевое решение уравнения (1) *на интервале* $(x_1, +\infty)$, *где* x_1 *— произвольное достаточно большое положительное число, имеет бесконечное множество нулей.*

1. *Kneser A.* Untersuchung über die reellen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen // Math. Ann. – 1893. – **42**. – S. 409–435.
2. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск: Вышэйш. шк., 1974. – 768 с.
3. *Hille E.* Nonoscilation theorems // Trans. Amer. Math. Soc. – 1948. – **64**. – P. 234–252.
4. *Hartman P.* On the linear logarithmicoexponential differential equations of the second order // Amer. J. Math. – 1948. – **70**. – P. 764–779.
5. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
6. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.: Из-во иностр. лит., 1954. – 216 с.
7. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. – М.: Наука, 1966. – Т. 2. – 800 с.
8. *Sturm C.* Sur les équations différentielles linéaires du second order // J. Math. Pures Appl. – 1836. – **1**, № 1 – S. 106–186.

Получено 23.01.95