УДК 517. 948. 34

В. П. Желтиков, В. В. Эфендиев (Одес. ун-т)

УСРЕДНЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В УПРАВЛЕНИИ СТАНДАРТНОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

For a terminal problem of the optimum control over standard systems with constant delay, according to L. S. Pontryaguin's maximum principle, a boundary problem with deviating independent variables of delay and overtaking is considered. The overaging method for the asymptotic solution of the obtained boundary problem is substantiated.

Для термінальної задачі оптимального керування системами стандартного вигляду з постійним запізненням згідно з принципом максимуму Л. С. Понтрягіна розглянуто граничну задачу з аргументами запізнення та випередження, що відхиляються. Обгрунтовано метод усереднення для асимптотичного розв'язку одержаної граничної задачі.

Необходимое условие оптимальности для задачи управления с постоянным запаздыванием [1] определяет решение краевой задачи с отклоняющимися аргументами запаздывания и опережения. Метод усреднения для краевой задачи с системой стандартного вида порождает уравнения, предположение о существовании решений которых [2] приводит к решению исходной задачи, асимптотически близкому к усредненному.

Введем в терминальную задачу оптимального управления системами стандартного вида [2, 3] постоянное, взятое равным единице, запаздывание:

$$\dot{y} = \varepsilon Y(t, y, y(t-1), u), y|_{t\in[-1,0]} = \theta_1(t),$$

$$J[u] = \Phi(y(T)) \to \min_{u\in U}, \tag{1}$$

где $y \in G$ — n-мерный вектор, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $t \in I \equiv [0, T]$, $T = \varepsilon^{-1}$; Y, θ_1 — n-мерные вектор-функции, Y строго выпукла по u для любых $(t, y) \in I * G$; $u \in U$ — r-мерный вектор управления, U — компактное множество; $\Phi(y) \in C_y^2(G)$; $\theta_1(t)$ непрерывна на отрезке $[-1, 0]$.

Пусть в силу принципа максимума Л. С. Понтрягина однозначная функция u представлена в виде $u = \varphi(t, y, y(t-1), \psi)$, где ψ — вектор сопряженных переменных. Тогда исходная задача (1) сводится к следующей краевой задаче:

$$\dot{x} = \varepsilon X(t, x_1(t-1), x, x(t+1)),$$

$$x_1|_{t\in[-1,0]} = \theta_1(t),\ x_2(T) = \theta_2(x_1(T)), \tag{2}$$

где x, X — $2n$-мерные вектор-функции, первые n компонент которых имеют индекс 1, а оставшиеся n компонент — индекс 2; такое разделение компонент $2n$-мерных векторов будет встречаться и в дальнейшем; $x_1 \equiv y, x_2 \equiv \psi$,

$$X_1 = X_1(t, x_1(t-1), x) \equiv Y(t, y, y(t-1), \varphi(t, y, y(t-1), \psi)),$$

$$X_2 = X_2(t, x_1(t-1), x, x(t+1)) \equiv \frac{\partial Y(t, y, y(t-1), \varphi(t, y, y(t-1), \psi))}{\partial y}\psi -$$

$$- k\frac{\partial Y(t+1, y(t+1), y, \varphi(t+1, y(t+1), y, \psi(t+1)))}{\partial \kappa}\psi(t+1),$$

$k = \chi(I_1)$, $\chi(s)$ —характеристическая функция множества s, $I_1 \equiv I \setminus [T-1, T]$,

$$\frac{\partial Y}{\partial y} \equiv \frac{\partial Y(t, y, \kappa, u)}{\partial y}\Bigg|_{\substack{\kappa=y(t-1),\\ u=\varphi(t,y,y(t-1),\psi)}}, \quad \frac{\partial Y}{\partial \kappa} \equiv \frac{\partial Y(t, y, \kappa, u)}{\partial \kappa}\Bigg|_{\substack{\kappa=y(t-1),\\ u=\varphi(t,y,y(t-1),\psi)}},$$

$$\theta_2(y) \equiv -\frac{\partial \Phi(y)}{\partial y}.$$

Таким образом, правые части уравнений (2) не зависят от $x_2(t-1)$; X_1 не зависит от $x(t+1)$; X_2 при $t \in [T-1, T]$ не зависит от $x(t+1)$. Аналогичные особенности имеют и задачи, которые строятся ниже исходя из краевой задачи (2).

Поставим в соответствие порожденной принципом максимума краевой задаче (2) следующую усредненную краевую задачу:

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \bar{X}(\bar{x}), \tag{3}$$

$$\bar{x}_1(0) = \theta_1(0), \quad \bar{x}_2(1) = \theta_2(\bar{x}_2(1)), \tag{4}$$

где $\tau = \varepsilon t$, $k \equiv 1$,

$$\bar{X}(x) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau X(t, x_1, x, x)\, dt, \tag{5}$$

предел (5) предполагается существующим.

Наряду с задачей (2) при $k \equiv 1$ введем задачу без отклоняющихся аргументов:

$$\dot{z} = \varepsilon X(t, z_1, z, z), \tag{6}$$

$$z_1(0) = \theta_1(0), \quad z_2(T) = \theta_2(z_1(T)), \tag{7}$$

для которой задача (3), (4) также является усредненной.

Близость решений краевой задачи (6), (7) и усредненной (3), (4) описывается согласно теореме 10.1 [2] следующим образом.

Теорема 1. *Пусть в области* $Q\{(t, z) \mid t \ge 0, z \in D \subset R_{2n}\}$ *выполнены следующие условия:*

1) *функция* $X(t, z, z, z)$ *непрерывна по* t *и дифференцируема по* z, *причем* $\partial X / \partial z$ *локально удовлетворяет условию Липшица по* z;

2) *равномерно по* $x \in D$ *существует предел* (5);

3) *решение* $\bar{x}(\tau, x^0)$ *системы* (3) *с начальным условием* $\bar{x}(0, x^0) = x^0 \in D^0 \subset D$ *определено для* $\tau \in [0, 1]$ *и лежит вместе со своей* ρ-*окрестностью в области* D;

4) *задача* (3), (4) *имеет решение* $\bar{x}(\tau)$ *такое, что* $\bar{x}^0 = \bar{x}(0) \in \operatorname{int} D^0$;

5) *решение* $\bar{x}(\tau, \bar{x}^0)$ *системы* (3) *с начальным условием* $\bar{x}^0$ *таково, что*

$$\det\left[\frac{\partial \bar{x}_2(1, \bar{x}^0)}{\partial \bar{x}_2^0}\right] \neq 0. \tag{8}$$

Тогда для любого $\eta > 0$ *существует* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta) > 0$ *такое, что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и* $t \in I$ *существует единственное решение* $z(t)$ *задачи* (6), (7) *и выполняется неравенство*

$$\| z(t) - \bar{x}(\varepsilon\tau) \| < \eta. \tag{9}$$

Если условие 2 усилено условием 2π-*периодичности по* t *функции* $X(t, z, z, z)$, *то* [2] *существует такое* $C > 0$, $C = \text{const}$, *что неравенство* (9) *перепишется в виде*

$$\| z(t) - \bar{x}(\varepsilon t) \| < C\varepsilon. \tag{10}$$

Относительно задачи (6), (7) и соответствующей ей усредненной задачи (3), (4) справедливо также следующее утверждение с условиями, симметричными условиям теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть в области Q:*

1) *выполнены условия* 1 *и* 2 *теоремы* 1;

2) *решение* $\bar{x}(\tau, x^1)$ *системы* (3) *с дополнительным условием* $\bar{x}(1, x^1) = x^1 \in D^1 \subset D$ *определено для* $\tau \in [0, 1]$ *и лежит вместе с* ρ*-окрестностью в области* D;

3) *задача* (3), (4) *имеет решение* $\bar{x}(\tau)$ *такое, что* $\bar{x}^1 = \bar{x}(1) \in \operatorname{int} D^1$;

4) *решение* $\bar{x}(\tau, x^1)$ *системы* (3) *с дополнительным условием* $\bar{x}^1 = \bar{x}(1, \bar{x}^1)$ *таково, что*

$$\det\left[\frac{\partial \bar{x}_1(0, \bar{x}_1)}{\partial \bar{x}_1}\right] \neq 0. \tag{11}$$

Тогда для любого $\eta > 0$ *существует* $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\eta) > 0$, *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ *и* $t \in I$ *существует единственное решение* $z(t)$ *задачи* (6), (7) *и выполняется неравенство* (9). *Если условие* 2 *теоремы* 1 *усилить предположением* 2π*-периодичности по* t *функции* $X(t, z, z, z)$, *то для достаточно малых* ε *можно указать такое* $C > 0$, $C = \text{const}$, *что будет выполняться неравенство* (10).

Таким образом, условия 3 – 5 теоремы 1 и условия 2 – 4 следствия 1 являются асимптотически эквивалентными, так как неравенства (9) или (10) выполняются и в условиях теоремы 1, и в условиях следствия 1.

Замечание 1. Обоснование следствия 1 требует неравенства Гронуолла – Беллмана в виде:

пусть $u(t)$ и $f(t)$ — непрерывные неотрицательные функции, удовлетворяющие при $t < t_1$ неравенству

$$u(t) \leq C + \int_t^{t_1} f(\tau) u(\tau)\, d\tau, \tag{12}$$

где $C > 0$, $C = \text{const}$. Тогда $u(t)$ при $t < t_1$ удовлетворяет неравенству

$$u(t) \leq C \exp\left[\int_t^{t_1} f(\tau)\, d\tau\right], \tag{13}$$

которое доказывается аналогично теореме 1.1 из [4].

Введем в рассмотрение следующие задачу с запаздыванием:

$$\dot{q} = \varepsilon X(t, q_1(t-1), q, q), \tag{14}$$

$$q_1 \big|_{t \in [-1, 0]} = \theta_1(t), \; q_2(T) = \theta_2(q_1(T)) \tag{15}$$

и задачу с опережением:

$$\dot{s} = \varepsilon X(t, s, s, s(t+1)), \tag{16}$$

$$s_1(0) = \theta_1(0), \quad s_2(T) = \theta_2(s_2(T)). \tag{17}$$

Теорема 2. *Пусть в области Q:*

1) *выполнены все условия теоремы* 1;

2) *функция* $\theta_1(\tau)$ *непрерывна на отрезке* $t \in [0, 1]$.

Тогда для любого $\eta > 0$ *можно указать такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *на отрезке* $t \in I$ *существует единственное решение задачи* (14), (15) *и выполняется неравенство*

$$\| q(t) - \bar{x}(\varepsilon t) \| < \eta. \tag{18}$$

Если функция $X(t, q_1, q, q)$ *является* 2π*-периодической по* t, *то существует такое* $\varepsilon_0 > 0, C > 0$, *что для любого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и* $t \in I$:

$$\| q(t) - \bar{x}(\varepsilon t) \| < C\varepsilon. \tag{19}$$

Доказательство. В силу теоремы 1 для достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует единственное решение $z(t)$ задачи (6), (7) и выполняется неравенство (9), а в случае 2π-периодичности по t функции $X(t, z, z, z)$ — неравенство (10). Этому решению соответствует решение задачи (6) при начальных условиях

$$z^0 = z(0); \tag{20}$$

обозначим его через $z(z^0, t)$.

Введем дополнительные условия

$$q_1 |_{t \in [-1, 0]} = \theta_1(t), \ q_2(0) = z_2^0. \tag{21}$$

Для задач (6), (20) и (14), (21) выполнены все условия леммы II.1 из [5], согласно которой

$$\| q(t) - z(t) \| < \varepsilon\lambda(p_0 + \mu) \exp(2\lambda), \tag{22}$$

где

$$\lambda = \max_Q \left\| \frac{\partial x}{\partial z} \right\|, \ p_0 = \max_{t \in [-1, 0]} \| \theta_1(t) - q_1(t+1) \|, \ \mu = \max_Q \| X \|,$$

откуда в силу условия 5 теоремы 1 и в силу теоремы о неявных функциях следуют утверждения теоремы.

Следствие 2. *Пусть в области* Q *выполнены условия следствия* 1. *Тогда для любого* $\eta > 0$ *можно указать такое* ε_1, *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ *на отрезке* $t \in I$ *существует единственное решение задачи* (16), (17) *и выполняется неравенство*

$$\| s(t) - \bar{x}(\varepsilon t) \| < \eta. \tag{23}$$

Если функция $X(t, s, s, s)$ *является* 2π*-периодической по* t, *то существуют константы* $\varepsilon_1 > 0$, $C > 0$ *такие, что для* $t \in I$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$

$$\| s(t) - \bar{x}(\varepsilon t) \| < C\varepsilon. \tag{24}$$

Замечание 2. Доказательство следствия 2 аналогично доказательству теоремы 2 и использует лемму II.1 из [5], которую сформулируем относительно задач (6), (7) и (16, (17) в виде:

Пусть функция $X(t, u, v, w)$ определена в области $G\{t \le T, u \in D, v \in D, w \in D\}$ и пусть в этой области:

1) $\| X(t, u, v, w) \| \le M$, $X(t, u, v, w) \in \mathrm{Lip}_{u,v,w}(\lambda, G)$;

2) решение $z(t)$ системы (6), (7) определено для всех $t \le T$ и лежит в области D с некоторой ρ-окрестностью.

Тогда можно указать такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ на отрезке $t \in I$ будет выполняться неравенство

$$\| z(t) - s(t) \| < \varepsilon\lambda(p_1 + \mu) \exp(2\lambda), \tag{25}$$

где

$$p_1 = \max_{t \in [T-2, T-1]} \| s(t) - s(t+1) \|.$$

Доказательство оценки (25) использует неравенство (13).

Теорема 3. *Пусть в области* Q *выполнены условия теоремы 2 и следствия 2. Тогда для любого* $\eta > 0$ *можно указать* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *на отрезке* $t \in I$ *существует единственное решение задачи* (1), (2) *и выполняется неравенство*

$$\| x(t) - \overline{x}(\varepsilon t) \| < \eta. \tag{26}$$

Если функция $X(t, x, x, x)$ *является* 2π*-периодической по* t, *то можно указать константу* $C > 0$ *такую, что*

$$\| x(t) - \overline{x}(\varepsilon t) \| < C\varepsilon. \tag{27}$$

Доказательство. В силу теоремы 2 существует единственное решение задачи (14), (15) с оценкой (18) (или (19)). Исходную задачу (2) включим в семейство задач с вектор-параметром $\alpha(t, \varepsilon)$:

$$\dot{w} = \varepsilon X(t, w_1(t-1), w, w + \alpha(t, \varepsilon)), \tag{28}$$

$$w_1 |_{t \in [-1, 0]} = \theta_1(t), \; w_2(T) = \theta_2(w_1(T)), \tag{29}$$

где, по следствию 2, $\alpha(t, \varepsilon) \equiv 0$ при $t \in [T-1, T]$, $\| \alpha(t, \varepsilon) \| \le p_1$ при $t \in [T-2, T-1]$ и $\| \alpha(t, \varepsilon) \| \to 0$ при $t \in [0, T-2]$ и $\varepsilon \to 0$, а при $\alpha(t, \varepsilon) \equiv 0$ задача (28), (29) совпадает с краевой задачей (14), (15).

Выполним асимптотическую оценку разности решений задачи (28), (29) и задачи (14), (15), откуда будет следовать неравенство (26) (или (27)).

Будем считать, что $\| \nu \| = \| \nu \|_2 = \max\limits_{k=1, \ldots, n} |x_k|$, поскольку $\| \nu \|_3 \le \sqrt{n} \| \nu \|_1 \le n \| \nu \|_2$, где n — размерность вектора [5, с. 6]. Для $\| q_1(t) - w_1(t) \|$ имеем

$$\| q_1(t) - w_1(t) \| \le$$

$$\le \varepsilon \int_0^t \| X_1(t, q_1(t-1), q_1(t), q_2(t)) - X_1(t, w_1(t-1), w_1(t), w_2(t)) \| \, dt \le$$

$$\le 2\varepsilon\lambda(\mu + p_0) + \varepsilon \int_0^t \| X_1(t, q_1(t), q_1(t), q_2(t)) - X_1(t, w_1(t), w_1(t), w_2(t)) \| \, dt <$$

$$< 2\varepsilon\lambda(\mu + p_0) + \varepsilon\lambda \int_0^t \left[2 \| q_1(t) - w_1(t) \| + \| q_2(t) - w_2(t) \| \right] dt, \tag{30}$$

откуда при $\| q(t) - w(t) \| = \| q_1(t) - w_1(t) \|$ следует

$$\| q(t) - w(t) \| < 2\varepsilon\lambda(\mu + p_0) \exp(3\lambda). \tag{31}$$

Оценим $\| q_2(t) - w_2(t) \|$. Так как

$$\| q_2(T) - w_2(T) \| = \| \theta_2(q_1(T)) - \theta_2(w_1(T)) \| \le \lambda \| q_1(T) - w_1(T) \|,$$

то из (30) получаем

$$\| q(T) - w(T) \| \le 2\varepsilon \overline{\lambda} (\mu + p_0) + \varepsilon \overline{\lambda} \int_0^T 3 \| q(t) - w(t) \| \, dt,$$

откуда

$$\| q(T) - w(T) \| \leq \varepsilon C_1, \tag{32}$$

где $\overline{\lambda} = \max(\lambda, \lambda^2)$, $C_1 = 2\overline{\lambda}(\mu + p_0)\exp(3\overline{\lambda})$.

Для $t \in [T-1, T]$ имеем

$$\| q_2(t) - w_2(t) \| \leq$$

$$\leq C_1\varepsilon + \varepsilon \int_t^T \| X_2(t, q_1(t-1), q, q) - X_2(t, w_1(t-1), w, w) \| \, dt \leq C_2\varepsilon, \tag{33}$$

где $C_2 = C_1 + 2\mu$. При $t \in [T-2, T-1]$ получаем

$$\| q_2(t) - w_2(t) \| \leq$$

$$\leq C_2\varepsilon + \varepsilon \int_t^{T-1} \| X_2(t, q_1(t-1), q, q) - X_2(t, w_1(t-1), w, w) + \alpha(t) \| \, dt \leq C_2\varepsilon, \tag{34}$$

где $C_3 = C_2 + 2\mu$. Для $t < T-2$

$$\| q_2(t) - w_2(t) \| \leq C_3\varepsilon +$$

$$+ \varepsilon \int_t^{T-2} \| X_2(t, q_1(t-1), q, q) - X_2(t, w_1(t-1), w(t), w + \alpha(t)) \| \, dt \leq$$

$$\leq C_3\varepsilon + \varepsilon \int_t^{T-2} \left[\lambda(2\varepsilon\mu + \| \alpha \|) + \| X_1(t, q_1, q, q) - X_2(t, w_1, w, w) \| \right] dt \leq$$

$$\leq \varepsilon C_4 + \lambda\varepsilon \int_t^{T-2} 3 \| q(t) - w(t) \| \, dt, \tag{35}$$

где $C_4 = \text{const}$, $C_4 > 2\lambda\mu + \max \| \alpha \| * \varepsilon^{-1} + C_3$.

Если $\| q(t) - w(t) \| = \| q_2(t) - w_2(t) \|$, то из (35) следует

$$\| q(t) - w(t) \| < \varepsilon C_4 \exp(3\lambda), \tag{36}$$

что с учетом неравенства (31) завершает доказательство.

Таким образом, усредненная задача (3), (4) при выполнении условий теоремы 3 дает асимптотическое решение исходной задачи оптимального управления.

1. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Принцип максимума в теории оптимального управления. – Минск: Наука и техника, 1974. – 272 с.
2. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. – Киев; Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.
3. *Желтиков В. П., Эфендиев В. В* Асимптотическое решение задачи оптимального управления системой стандартного вида с запаздыванием // Кибернетика и системный анализ. – 1994. – № 5. – С. 93-101.
4. *Филатов А. Н., Шарова Л. В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1976. – 152 с.
5. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных управлений. – Ташкент: Фан, 1974. – 216 с.

Получено 15.03.94