УДК 517.512

В. И. Кузьмич, канд. физ.-мат. наук (Херсон. пед. ин-т)

СХОДИМОСТЬ ВОЗЛЕ ТОЧКИ И ТЕОРЕМЫ ТИПА АРЦЕЛА – АСКОЛИ

Theorems that give necessary and sufficient conditions for the convergence of a sequence of continuous (differentiable) functions to a continuous (differentiable) function are proved. The notions of convergence near a point and equipotential convergence near a point are introduced. These notions are defined locally; on a segment, they are equivalent to quasiuniform and uniform convergence of a sequence of functions, respectively.

Доведені теореми, які визначають необхідні і достатні умови збіжності послідовності неперервних (диференційовних) функцій до неперервної (диференційовної) функції. Вводяться поняття збіжності біля точки та рівностепеневої збіжності біля точки, які мають локальний характер і рівносильні на відрізку відповідно квазірівномірній і рівномірній збіжностям функціональної послідовності.

В настоящей работе вводится понятие сходимости возле точки последовательности функций. С его помощью получены теоремы типа Арцела – Асколи, определяющие необходимые и достаточные условия сходимости последовательности непрерывных (дифференцируемых) функций к непрерывной (дифференцируемой) функции. Впервые эту проблему в отношении непрерывности разрешил Ч. Арцела, определив квазиравномерную сходимость. В отличие от квазиравномерной сходимости понятие сходимости возле точки носит локальный характер, т.е. учитывает поведение элементов последовательности лишь в окрестности конкретной точки сходимости.

В дальнейшем интервал $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ будем обозначать через $O_\delta(x_0)$ (δ — окрестность точки x_0), а совокупность интервалов $(x_0-\delta;\ x_0)$ и $(x_0;\ x_0+\delta)$ — через $O^*_\delta(x_0)$ (выколотая δ-окрестность точки x_0).

***Определение* 1.** *Пусть функции* $f_n(x)$ *и* $g_n(x)$ $(n=1, 2, \dots)$ *определены в некоторой выколотой окрестности точки* x_0.

Последовательности $\{f_n(x)\}$ *и* $\{g_n(x)\}$ *будем называть сходящимися возле точки* x_0, *если для любого положительного числа* ε *существует число* $N(\varepsilon)>0$ *такое, что для каждого номера* $n>N(\varepsilon)$ *существует число* $\delta(\varepsilon; n)>0$ *такое, что для любого значения* $x\in O^*_\delta(x_0)$ *выполняется неравенство* $|f_n(x)-g_n(x)|<\varepsilon$.

Это определение обладает достаточной степенью общности. Полагая, например, поочередно $g_n(x)=g(x)$, $g_n(x)=a_n$, $g_n(x)=A$ $(n=1, 2, \dots)$, получаем определения сходимости возле точки x_0 последовательности $\{f_n(x)\}$ и соответственно функции $g(x)$, числовой последовательности $\{a_n\}$, числа A. В последнем случае будем говорить, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к числу A возле точки x_0.

Кроме того, полагая в определении 1 $f_n(x)=f(x)$ и $g_n(x)=a_n$ $(n=1, 2, \dots)$, получаем определение сходимости возле точки функции $f(x)$ и числовой последовательности $\{a_n\}$.

Если в определении 1 положить $f_n(x) = f(x)$ и $g_n(x) = A$ $(n = 1, 2, \dots)$, то, выводя из него утверждения о натуральном числе n, получаем классическое определение предела функции в точке $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\right)$, а при $f_n(x)=a_n$ и $g_n(x)=A$ $(n=1, 2, \dots)$, выводя утверждения о точке x_0 и ее окрестности, получаем определение предела числовой последовательности $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A)$.

В дальнейшем понадобится понятие односторонней сходимости возле точки. В частности, определение сходимости возле точки слева можно получить из определения 1, заменив в нем окрестность $O^*_\delta(x_0)$ интервалом $(x_0-\delta; x_0)$. Рассмотрев интервал $(x_0; x_0+\delta)$, получим определение сходимости возле точки x_0 справа.

Прежде всего докажем, что сходимость возле точки обладает свойством транзитивности, которое выражено в следующем утверждении.

Лемма. *Если возле точки x_0 сходятся последовательности $\{f_n(x)\}$ и $\{g_n(x)\}$, а также последовательности $\{g_n(x)\}$ и $\{h_n(x)\}$, то возле этой точки сходятся последовательности $\{f_n(x)\}$ и $\{h_n(x)\}$.*

Доказательство. Из сходимости возле точки x_0 последовательностей $\{f_n(x)\}$ и $\{g_n(x)\}$ следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $N_1(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого номера $n > N_1(\varepsilon)$ существует выколотая $\delta_1(\varepsilon; n)$-окрестность точки x_0, в каждой точке которой выполняется неравенство $|f_n(x) - g_n(x)| < \varepsilon$.

Аналогично, из сходимости возле точки x_0 последовательностей $\{g_n(x)\}$ и $\{h_n(x)\}$ следует, что для выбранного выше числа ε существует число $N_2(\varepsilon) > 0$ такое, что для каждого номера $n > N_2(\varepsilon)$ существует выколотая $\delta_2(\varepsilon; n)$-окрестность точки x_0, в каждой точке которой выполняется неравенство $|g_n(x) - h_n(x)| < \varepsilon$.

Положив теперь $N(\varepsilon) = \max\{N_1, N_2\}$ и $\delta(\varepsilon; n) = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, получим, что для любого номера $n > N(\varepsilon)$ в каждой точке выколотой $\delta(\varepsilon; n)$-окрестности точки x_0 выполняется неравенство

$$|f_n(x) - h_n(x)| \le |f_n(x) - g_n(x)| + |g_n(x) - h_n(x)| < 2\varepsilon,$$

что и означает сходимость возле точки x_0 последовательностей $\{f_n(x)\}$ и $\{h_n(x)\}$. Заметим, что эта лемма остается верной и при различных частных случаях сходимости возле точки.

Сохранение предельных свойств элементов функциональной последовательности демонстрирует следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функции $f(x)$ и $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ определены в некоторой выколотой окрестности точки x_0. Пусть, кроме того, выполняются условия:* 1) $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Для того чтобы функция $f(x)$ имела в точке x_0 предел равный A, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ сходились возле этой точки.

Доказательство. Условие 1 означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ и каждого номера n существует число $\delta(\varepsilon; n) > 0$ такое, что для всех значений $x \in O^*_\delta(x_0)$ выполняется неравенство $|f_n(x) - a_n| < \varepsilon$, т. е. последовательности $\{f_n(x)\}$ и $\{a_n\}$ сходятся возле точки x_0. Как отмечалось выше, условие 2 означает сходимость возле любой точки (а значит, и возле точки x_0) последовательности $\{a_n\}$ и числа A. Эти условия в силу леммы означают сходимость возле точки x_0 последовательности $\{f_n(x)\}$ и числа A.

Докажем необходимость условия теоремы. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, тогда функция $f(x)$ и число A сходятся возле точки x_0. Следовательно, по свойству транзитивности возле этой точки сходятся последовательность $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$.

Теперь докажем достаточность. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ сходятся возле точки x_0, тогда по свойству транзитивности сходятся возле этой точки функция $f(x)$ и число A, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Эта теорема носит локальный характер, однако ее можно распространить и на любой промежуток.

Следствие 1. *Пусть функции $f(x)$ и $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ определены на промежутке $\langle a; b\rangle$. Пусть также для каждого номера n и каждой точки $x_0 \in \langle a; b\rangle$ существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = f_n^*(x_0)$, а последовательность $\{f_n^*(x)\}$ сходится к функции $f^*(x)$ на промежутке $\langle a; b\rangle$.*

Для того чтобы в каждой точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$ выполнялось равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f^*(x_0)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ сходились возле каждой точки промежутка $\langle a, b\rangle$.

Заметим, что в условиях следствия 1 для точек a и b подразумевается соответствующая односторонняя сходимость возле этих точек.

Теорему 1 и следствие 1 можно применить к изучению свойства непрерывности функции, являющейся предельной для последовательности непрерывных функций. В этом случае теорема 1 принимает следующий вид.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, а функции $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ непрерывны в этой точке. Пусть, кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$.*

Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывной в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ сходились возле этой точки.

Замечая, что для непрерывной на промежутке $\langle a, b\rangle$ функции $f(x)$ равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ выполняется в любой точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$, получаем следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть последовательность непрерывных на промежутке $\langle a, b\rangle$ функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ сходится на этом промежутке к функции $f(x)$.*

Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывной на промежутке $\langle a, b\rangle$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ сходились возле каждой точки этого промежутка.

Это следствие можно переформулировать и для случая функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, обозначив при этом через $R_n(x)$ n-й остаток ряда.

Следствие 2′. *Пусть функциональный ряд с непрерывными на промежутке $\langle a, b\rangle$ членами сходится на этом промежутке.*

Для того чтобы сумма этого ряда была непрерывной на промежутке $\langle a, b \rangle$, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность остатков* $R_n(x)$ *ряда сходилась к нулю возле каждой точки этого промежутка.*

Приведем определение квазиравномерной сходимости [1, с. 257].

***Определение* 2.** *Функциональный ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, *сходящийся всюду на сегменте* $[a, b]$, *является сходящимся на* $[a, b]$ *квазиравномерно, если для каждого положительного числа* ε *и всякого натурального числа* N *имеется такое превышающее его натуральное число* N', *что отрезок* $[N; N']$ *натурального ряда для любой точки* x, *принадлежащей сегменту* $[a; b]$, *содержит индекс* n_x, *при котором справедливо неравенство* $R_{n_x} < \varepsilon$.

В этом определении R_{n_x} означает абсолютную величину соответствующего остатка ряда.

Квазиравномерная сходимость является необходимым и достаточным условием сходимости ряда с непрерывными на отрезке членами к непрерывной функции [1, с. 259].

Таким образом, в силу следствия 2′ на множестве сходящихся рядов с непрерывными на отрезке членами понятия квазиравномерной сходимости и сходимости возле точки равносильны.

С другой стороны, результат Арцела получен для отрезка, и это требование является весьма существенным при доказательстве, а следствие 2′ справедливо для произвольного промежутка.

Аналогичный результат можно получить и для равномерной сходимости. Для этого в определении 1 потребуем, чтобы число $\delta(\varepsilon; n)$ не зависело от номера n. Тогда получим следующее определение.

***Определение* 3.** *Пусть функции* $f_n(x)$ *и* $g_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ *определены в некоторой выколотой окрестности точки* x_0.

Последовательности $\{f_n(x)\}$ и $\{g_n(x)\}$ будем называть равностепенно сходящимися возле точки x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют числа $N(\varepsilon) > 0$ и $\delta(\varepsilon) > 0$ такие, что для любого номера $n > N(\varepsilon)$ и любого значения $x \in O_\delta^*(x_0)$ выполняется неравенство $|f_n(x) - g_n(x)| < \varepsilon$.

Заметим, что для равностепенной сходимости возле точки выполняется такое же свойство транзитивности, как и для сходимости возле точки (доказательство аналогично).

Сравнивая определение равномерной сходимости и определение 3, замечаем, что из равномерной сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ на промежутке следует их равностепенная сходимость возле каждой точки этого промежутка. Обратное утверждение не всегда верно. Так, последовательность функций $f_n(x) = (1 + 1/n)/x$ $(n = 1, 2, \dots)$ и функция $f(x) = 1/x$ равностепенно сходятся возле каждой точки x_0 интервала $(0; 1)$, поскольку неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1+1/n}{x-1/x}\right| = \frac{1}{nx} < \frac{2}{nx_0} < \varepsilon$$

будет выполняться для всех номеров $n > N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon) = 2/\varepsilon x_0 > 0$, и всех $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, где $\delta(\varepsilon) = \min\{x_0/2; 1 - x_0\}$.

С другой стороны, эта последовательность не сходится равномерно на интервале $(0, 1)$, так как для последовательности значений $x_n = 1/n$ разность

$$|f_n(x_n)-f(x_n)| = \left|\left|\frac{1+1/n}{x_n-1/x_n}\right|\right| = |(1+1/n)\,n-n| = 1$$

не может быть меньше, например, числа $\varepsilon = 1/2$.

Тем не менее, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на отрезке $[a; b]$ к функции $f(x)$ и они сходятся равностепенно возле каждой точки этого отрезка, то последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.*

Доказательство. Предположим, что при условиях теоремы последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ неравномерно. Это означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ и для любого значения $x \in [a; b]$ существует число $N(\varepsilon; x) > 0$ такое, что для любого номера $n > N(\varepsilon; x)$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, причем множество чисел $N(\varepsilon; x)$ для фиксированного ε неограниченно сверху. Выберем из этого множества монотонно возрастающую последовательность чисел $N_k(\varepsilon; x_k)$. Из последовательности точек $\{x_k\}$ выберем сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_i}\}$. Пусть, например, $\lim\limits_{i\to\infty} x_{k_i} = x_0$. Тогда точка x_0 принадлежит отрезку $[a; b]$. Покажем, что последовательность $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ не сходятся равностепенно возле точки x_0.

Действительно, в любой окрестности точки x_0 будут элементы подпоследовательности $\{x_{k_i}\}$, а значит, для выбранного числа ε не будет существовать числа $N(\varepsilon) > 0$ единого для всех значений x из окрестности точки x_0 такого, что для любого номера $n > N(\varepsilon)$ выполнялось бы неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Отсюда последовательность $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ не сходятся равностепенно возле точки x_0. Полученное противоречие доказывает теорему.

Таким образом, понятия равномерной сходимости на отрезке и равностепенной сходимости возле каждой точки этого отрезка равносильны на множестве сходящихся функциональных последовательностей.

Для изучения дифференциальных свойств функциональных последовательностей рассмотрим один частный случай сходимости возле точки.

Определение 4. *Пусть функции $f_n(x)$ и $g_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ определены в некоторой окрестности точки x_0.*

Последовательности $\{f_n(x)\}$ и $\{g_n(x)\}$ будем называть дифференциально сходящимися возле точки x_0, если возле этой точки сходятся последовательности функций

$$\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} \quad \text{и} \quad \frac{g_n(x)-g_n(x_0)}{x-x_0} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Если в определении 4 положить $f_n(x) = f(x)$, где $g_n(x) = Ax$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где A — постоянное число, то получим определение производной функции $f(x)$ в точке $x_0 (f'(x_0) = A)$.

Рассмотрим в условии теоремы 1 вместо функций $f_n(x)$ функции $(f_n(x) - f_n(x_0))/(x - x_0)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, а вместо функции $f(x)$ функцию $(f(x) -$

$-f(x_0)) / (x-x_0)$. Таким образом, эта теорема примет следующий вид.

Теорема 4. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *определены в некоторой окрестности точки* x_0. *Пусть также фукнции* $f_n(x)$ *дифференцируемы в этой точке и* $\lim_{n\to\infty} f_n'(x_0) = A$.

Для того чтобы функция $f(x)$ *имела в точке* x_0 *производную равную* A, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $\{f_n(x)\}$ *и функция* $f(x)$ *дифференциально сходились возле этой точки.*

Для промежутка получаем следующее утверждение.

***Следствие* 3.** *Пусть функции* $f(x)$ *и* $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *определены на промежутке* $\langle a; b\rangle$ *и функции* $f_n(x)$ *дифференцируемы на этом промежутке, причем последовательность* $\{f_n'(x)\}$ *сходится на промежутке* $\langle a; b\rangle$ *к функции* $f^*(x)$.

Для того чтобы функция $f^*(x)$ *была производной функции* $f(x)$ *на промежутке* $\langle a; b\rangle$, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $\{f_n(x)\}$ *и функция* $f(x)$ *дифференциально сходились возле каждой точки этого промежутка.*

Заметим, что в отличие от известной теоремы о дифференцируемости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ в следствии 3 не требуется равномерная сходимость последовательности $\{f_n'(x)\}$.

Хотя в следствии 3 не требуется сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$, для переформулировки его на случай функционального ряда это условие следует добавить.

***Следствие* 3′.** *Пусть ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *с дифференцируемыми на промежутке* $\langle a; b\rangle$ *членами сходится на этом промежутке к функции* $f(x)$, *а ряд из производных* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ — *к функции* $f^*(x)$.

Для того чтобы функция $f^*(x)$ *была производной функции* $f(x)$ *на промежутке* $\langle a; b\rangle$, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $\{R_n(x)\}$ *остатков ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *дифференциально сходилась к нулю возле каждой точки промежутка* $\langle a; b\rangle$.

1. *Лузин Н. Н.* Теория функций действительного переменного. – М.: Учпедгиз, 1948. – 318 с.

Получено 16.12.91