УДК 519.21

Ю. И. Мажуга, канд. физ.-мат. наук (НСЦ ПИКОМ)

ОПЕРАТОРНЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНКИ АСИМПТОТИКИ МОМЕНТА ПЕРВОГО ДОСТИЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОЦЕССА РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ

Estimates for the exponential asymptotics of the moment of the first reaching a certain level n are found for the birth and death process.

Знайдено оцінки експоненціальної асимптотики моменту першого досягання деякого рівня n для процесу народження та смерті.

В настоящей статье изучается асимтотическое поведение момента первого достижения некоторого "высокого" уровня n для процесса рождения и гибели. Известно [1], что при достаточно общих предположениях распределение этого момента сходится к показательному распределению. Доказаны неравенства, оценивающие скорость этой сходимости. Основные результаты получены с использованием операторного подхода в эргодической теории марковских процессов. Основы этого подхода изложены в работах [2 – 4]. Ранее задача оценки распределения момента первого достижения для процесса рождения и гибели решалась А. Д. Соловьевым методами обращения преобразования Лапласа [5]. Аналогичные результаты для дискретного процесса рождения и гибели приведены в работе Н. В. Карташова [6].

Пусть $x = x(t)$, $t \geq 0$, — процесс рождения и гибели со значениями в пространстве $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ и интенсивностями переходов λ_i, μ_i, $i = 0, 1, 2, \dots$, причем $\mu_0 = 0$.

Предположим, что для всех i $\lambda_i > 0$, $\mu_i > 0$ (кроме μ_0) и определим момент $\zeta_n = \inf\{t > 0\colon\ x(t) = n\}$, т. е. ζ_n — момент первого достижения n-го уровня. Для исследования асимптотического поведения момента используем следующие обозначения:

$$\theta_0 = 1, \quad \theta_k = \lambda_0\lambda_1\dots\lambda_{k-1}/(\mu_1\mu_2\dots\mu_k), \quad k > 0,$$

$$\kappa_n = \lambda_0 \sum_{0<i\leq n} 1/(\mu_i\theta_i),$$

$$\rho_n = (1 + \sum_{0\leq k\leq i<n} \theta_k/(\lambda_i\theta_i))^{-1},$$

$$\sigma_n = \sum_{0\leq k\leq i<m\leq t<n} \theta_k\theta_m/(\lambda_i\theta_i\lambda_t\theta_t),$$

$$\omega_n = \rho_n + \rho_n^2\sigma_n, \quad m_n = (1 + \rho_n^2 - \omega_n)/\rho_n. \tag{1}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если* $\omega_n < 1$, *то выполняется равенство*

$$\sup_{t\geq 0}| P_0\{\zeta_n/m_n > t\} - \exp(-t)| \leq 4\lambda_0\omega_n/(\rho_n\kappa_n(1-\omega_n)), \tag{2}$$

где $P_0(\cdot)$ *означает условную вероятность при условии* $x(0) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный процесс $x_n = x_n(t)$, заданный на множестве $E_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Обозначим $A_n = \| a_{ij} \|_{i,j=0}^n$ инфинитезимальный оператор процесса $x_n(t)$:

$$A_n = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdot & 0 & \mu_{n-1} & -(\lambda_{n-1}+\mu_{n-1}) & \lambda_{n-1} \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что распределения момента ζ_n при условии $x(0) = x_n(0) = 0$ для процессов x и x_n будут одни и те же. Поэтому для исследования предельного поведения величины ζ_n достаточно рассмотреть марковский процесс $x_n(t)$, $t \geq 0$.

Вычислим стационарное распределение π_n, $\pi_n = (\pi_k^{(n)},\ 0 \leq k \leq n)$. Для этих вероятностей справедлива система алгебраических уравнений

$$\pi_n A_n = 0, \quad \pi_n \mathbf{1} = 1, \tag{3}$$

где $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$ — единичный вектор. Решая систему, получаем

$$\pi_k^{(n)} = \rho_n \theta_k \sum_{k \leq i < n} 1/(\lambda_i \theta_i), \quad 0 \leq k < n, \quad \pi_n^{(n)} = \rho_n. \tag{4}$$

Выберем в качестве банахова пространства $\mathcal{M}$ пространство векторов-строк ν с нормой $\|\nu\| = \sum_{0 \leq i \leq n} |\nu_i|$.

Определение. *Мера* $\beta \in \mathcal{M}$ *является значением* $\beta = \nu R$ *обобщенного потенциала* R *процесса* $x(t)$, *если* β *является решением системы*

$$\beta A = -\nu(I - \Pi), \ \beta \mathbf{1} = 0,$$

где A — *инфинитезимальный оператор процесса,* Π — *стационарный проектор, построенный по мере* π, $\nu \in D_R$ (D_R — *область определения* R).

В рассматриваемом случае система уравнений для вычисления потенциала $R = \| R_{ij} \|_{i,j=0}^n$ принимает вид

$$\beta A_n = \nu \Pi_n - \nu, \ \beta \mathbf{1} = 0,$$

где $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$, $\nu = (\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n)$,

$$\Pi_n = \begin{pmatrix} \pi_0^{(n)} & \pi_1^{(n)} & \dots & \pi_n^{(n)} \\ \hdashline \pi_0^{(n)} & \pi_1^{(n)} & \dots & \pi_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

или, более подробно,

$$\begin{aligned} & -\lambda_0\beta_0 + \mu_1\beta_1 + \beta_n = N_0\pi_0^{(n)} - \nu_0, \\ & \lambda_{k-1}\beta_{k-1} - (\lambda_k + \mu_k)\beta_k + \mu_{k+1}\beta_{k+1} = N_0\pi_k^{(n)} - \nu_k, \\ & \lambda_{n-2}\beta_{n-2} - (\lambda_{n-1} + \mu_{n-1})\beta_{n-1} = N_0\pi_{n-1}^{(n)} - \nu_{n-1}, \\ & \lambda_{n-1}\beta_{n-1} - \beta_n = N_0\pi_n^{(n)} - \nu_n, \\ & \sum_{0 \leq k \leq n} \beta_k = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

причем $\beta = \nu R$, $N_0 = \sum_{0 \leq k \leq n} \nu_k$. Решая систему (5), получаем

$$\beta_k = \beta_n \theta_k \sum_{k \leq i < n} 1/(\lambda_i \theta_i) + N_0 \theta_k \sum_{k \leq i < n} P_{i+1}/(\lambda_i \theta_i) - \theta_k \sum_{k \leq i < n} N_{i+1}/(\lambda_i \theta_i),$$

$$\beta_n = \rho_n\left(\sum_{0\le k\le i<n} (\theta_k N_{i+1})/(\lambda_i\theta_i) - N_0 \sum_{0\le k\le i<n} (\theta_k P_{i+1})/(\lambda_i\theta_i) \right), \tag{6}$$

где

$$N_i = \sum\nolimits_{i\le l\le n} \nu_l, \quad P_i = \sum\nolimits_{i\le l\le n} \pi_l^{(n)}.$$

Рассмотрим марковский процесс $\tilde{x}_n(t)$, полученный из $x_n(t)$ путем сокращения времени жизни до ζ_n. Обозначим $B_n = \| b_{ij} \|_{i,j=0}^n$ инфинитезимальный оператор процесса $\tilde{x}_n$. Нетрудно показать, что $b_{n-1n} = 0$, а $b_{ij} = a_{ij}$ при всех остальных i, j. Определим разность операторов $C = \Theta\Theta' = A_n - B_n$. Тогда элементы факторизации Θ и Θ' можно выбрать в виде

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta' = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \hdashline & & & & & \\ \hdashline 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем нам понадобятся величина

$$\delta = \| \Theta R \Theta' \| = \lambda_{n-1} | R_{nn-1} | \tag{7}$$

и вектор-функция

$$g = R\Theta'(I + \Theta R\Theta')^{-1}\Theta\mathbf{1} = \lambda_{n-1}/(1 + \lambda_{n-1}R_{nn-1}) \begin{pmatrix} R_{0n-1} \\ R_{1n-1} \\ \vdots \\ R_{nn-1} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Значит, для вычисления δ и g достаточно найти координату β_{n-1} вектора β. Так как по определению потенциала $\beta = \nu R$, то $\beta_{n-1} = \sum_{0\le i\le n} \nu_i R_{in-1}$ и $\lambda_{n-1}\beta_{n-1} = \lambda_{n-1} \times \sum_{0\le i\le n} \nu_i R_{in-1}$. Выражение для $\lambda_{n-1}\beta_{n-1}$ получается из соотношений (5), (6):

$$\lambda_{n-1}\beta_{n-1} = \beta_n + \rho_n N_0 - \nu_n = \rho_n \left(1 - \sum_{0\le k\le i<n} (\theta_k P_{i+1})/(\lambda_i\theta_i) \right) \times$$

$$\times \sum_{0\le l\le n} \nu_l - \nu_n + \rho_n \sum_{0\le k\le i<n} \theta_k/(\lambda_i\theta_i) \sum_{i<m\le n} \nu_m.$$

Меняя порядок суммирования в первом и последнем слагаемых, после несложных преобразований находим

$$\lambda_{n-1}\beta_{n-1} = \rho_n^2(1-\sigma_n) \sum_{0\le l\le n} \nu_l - \nu_n + \rho_n \sum_{0<l\le n} \nu_l \sum_{0\le k\le i<l} \theta_k/(\lambda_i\theta_i).$$

Из последнего равенства имеем

$$\lambda_{n-1}R_{0n-1} = \rho_n^2(1-\sigma_n),$$

$$\lambda_{n-1}R_{ln-1} = \rho_n^2(1-\sigma_n) + \rho_n \sum_{0\le k\le i<l} \theta_k/(\lambda_i\theta_i), \quad l = \overline{1, n-1}, \tag{9}$$

$$\lambda_{n-1}R_{nn-1} = \rho_n^2(1-\sigma_n) - \rho_n.$$

Следовательно,

$$\delta = \rho_n + \rho_n^2\sigma_n - \rho_n^2 < \omega_n < 1. \tag{10}$$

Нам потребуется дополнительно вспомогательный результат.

Лемма. *Пусть* $\alpha \in \mathcal{M}$, $\| R\Theta' \| < \infty$, $\mathbf{1} \in D_\Theta$, $\delta < 1$ *и норма в* $\mathcal{M}$ *удовлетворяет условию* $\| \nu_1 \| \le \| \nu_1 + \nu_2 \|$ *при* $\nu_i \in \mathcal{M}^+$, *где* $\mathcal{M}^+$ — *конус неотрицательных мер из* $\mathcal{M}$, D_Θ — *область определения* Θ. *Если существует такое число* $a > 0$, *что* $\alpha(\cdot) \le a\pi(\cdot)$, *то*

$$\sup_{t \ge 0} | P_\alpha\{\zeta / m > t\} - \exp(-t) | \le 2^{a\pi} | g |, \tag{11}$$

где ζ — *момент обрыва марковского процесса* x_t, α — *начальное распределение,* π — *стационарное распределение этого процесса,* $m = M_\pi \zeta$.

Доказательство этого утверждения следует из неравенства

$$\sup_{t \le T} | P_\alpha\{\zeta > t\} - \exp(-t/m) | \le 2 \sup_{t \le T} | \alpha Q_t g |,$$

полученного в теореме 1 [4], эксцессивности меры π и простой оценки

$$\sup_{t \ge 0} | \alpha Q_t g | \le \sup_{t \ge 0} \alpha Q_t | g | \le \sup_{t \ge 0} a\pi Q_t | g | \le a\pi | g |,$$

где $Q_t = Q_t(x, \cdot) = P_x(x_t \in \cdot, \zeta > t)$ — соответствующее семейство полустохастических ядер. Лемма доказана.

Полагая теперь $x_t \in x_n(t)$, $\zeta = \zeta_n$, $\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$, $\pi = \pi_n$, $m = m_n$ и учитывая оценку (10), замечаем, что в рассматриваемом случае все условия леммы выполняются. Исходя из условия $\alpha \le a\pi_n$, полагаем

$$a = 1/\pi_0^{(n)} = 1 \Big/ \left(\rho_n \theta_n \sum_{0 \le i < n} \frac{1}{\lambda_i \theta_i} \right) = \lambda_0 / (\rho_n \kappa_n). \tag{12}$$

Используя (8) и (9), имеем оценку

$$\pi | g | \le \lambda_{n-1} / (1 + \lambda_{n-1} R_{nn-1}) \sum_{0 \le i \le n} \pi_i^{(n)} | R_{in-1} | \le$$

$$\le (\rho_n^2 \sigma_n - \rho_n^2 + \rho_n^2 + \rho_n^2 \sigma_n) / (1 - \omega_n) = 2\rho_n^2 \sigma_n / (1 - \omega_n) \le 2\omega_n / (1 - \omega_n). \tag{13}$$

Осталось вычислить величину m_n. Для этого воспользуемся представлением (18) [4]:

$$m_n^{-1} = \pi_n \Theta' (I + \Theta R \Theta')^{-1} \Theta \mathbf{1} = \lambda_{n-1} \pi_{n-1}^{(n)} (1 + \lambda_{n-1} R_{nn-1})^{-1} = \rho_n / (1 + \rho_n^2 - \omega_n).$$

Таким образом, подставляя в правую часть неравенства (11) выражения для a и $\pi | g |$, используя соотношение (12) и оценку (13), получаем неравенство (2). Теорема доказана.

***Следствие* 1.** *Если* $\lambda_0 \to 0$, *а уровень* n *и процесс* $x(t)$ *фиксированы, то справедливо представление*

$$\sup_{t \ge 0} | P_0\{\zeta_n / m_n > t\} - \exp(-t) | = O(\lambda_0), \quad \lambda_0 \to 0. \tag{14}$$

Доказательство. Очевидно, (14) следует из соотношений (1) и (2), если заметить, что $\rho_n \sim C_1\lambda_0$, а $\omega_n \sim C_2\lambda_0$, где C_1 и C_2 — некоторые постоянные.

Следствие 2. *Если процесс* x *фиксированный (не меняется в схеме серий) и эргодический, а* $n \to \infty$, *то* $\rho_n \to 0$, $\omega_n \to 0$, *и выполняется соотношение*

$$\sup_{t\geq 0} | P_0\{\zeta / m_n > t\} - \exp(-t) | = O(\omega_n), \quad n \to 0. \tag{15}$$

Доказательство. Так как процесс эргодический, то $\sum_{0\leq k\leq i<\infty} \theta_k / (\lambda_i\theta_i) = \infty$ [5]. Следовательно, $\sum_{0\leq k\leq i<\infty} \theta_k / (\lambda_i\theta_i) \to \infty$, а

$$\rho_n = (1 + \sum_{0\leq k\leq i<n} \theta_k / (\lambda_i\theta_i))^{-1} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Кроме того, из (9) вытекает

$$\rho_n^2\sigma_n = \sum_{0<m<n} \pi_m^{(n)} \left(\rho_n \sum_{0\leq k\leq i<m} \frac{\theta_k}{\lambda_i\theta_i} \right).$$

Заметим, что $\rho_n \sum_{0\leq k\leq i<m} \theta_k / (\lambda_i\theta_i) \to 0$, $n \to \infty$, при любом m, а $\pi_m^{(n)} \to \pi_m$, $n \to \infty$, где $\pi_m = \theta_m / \left(\sum_{0\leq k<\infty} \theta_k \right)$. Следовательно, по теореме Лебега

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{0\leq m<\infty} \pi_m \left(\rho_n \sum_{0\leq k\leq i<m} \frac{\theta_k}{\lambda_i\theta_i} \right) I_{m<n} =$$

$$= \sum_{0\leq m<\infty} \pi_m \lim_{n\to\infty} \left(\rho_n \sum_{0\leq k\leq i<m} \frac{\theta_k}{\lambda_i\theta_i} \right) I_{m<n} = 0,$$

откуда после несложных преобразований получаем $\lim_{n\to\infty} \omega_n = \lim_{n\to\infty} (\rho_n + \rho_n^2\sigma_n) = 0$. Таким образом, $4\lambda_0\omega_n / (\rho_n\kappa_n(1-\omega_n)) \sim 4\left(\sum_{0\leq k<\infty} \theta_k \right)\omega_n$, $n \to \infty$, и следствие доказано.

Теорема 2. *Пусть* $\omega_n < 1$. *Тогда*

$$\sup_{t\geq 0} | P_{\pi_n}\{\zeta_n / m_n > t\} - \exp(-t) | \leq 4\omega_n / (1 - \omega_n). \tag{16}$$

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству теоремы 1. Достаточно только заметить, что величину a можно выбрать равной единице.

1. *Гнеденко Б. В., Соловьев А. Д., Беляев Ю. К.* Математические методы в теории надежности.– М., Наука, 1965. – 524 с.
2. *Карташов Н. В.* Оценки геометрической асимптотики марковских моментов на однородных цепях // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1987. – Вып. 37. – С. 66 – 67.
3. *Мажуга Ю. И.* Оценка распределения момента обрыва непрерывного однородного марковского процесса // Там же. – 1988. – Вып. 39. – С. 83 – 87.
4. *Мажуга Ю. И.* Оценки асимптотики марковских моментов в терминах потенциала необрывающегося марковского процесса. – Киев, 1988. – С. 3 – 23. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.45).
5. *Вопросы* математической теории надежности / Под ред. Б. В. Гнеденко. – М.: Радио и связь, 1983. – 376 с.
6. *Карташов Н. В.* Операторные методы в предельных теоремах для марковских процессов // Теория вероятностей и ее применения. – 1984. – **29**, № 4. – С. 792, 793.

Получено 11.10.91