УДК 517.958

М. П. Ленюк, Н. П. Олейник, кандидаты физ.-мат. наук (Черновиц. ун-т)

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ГИБРИДНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ (БЕССЕЛЯ – ФУРЬЕ – БЕССЕЛЯ – . . . . . . – ФУРЬЕ – БЕССЕЛЯ) НА ПОЛЯРНОЙ ОСИ С $2n$ ТОЧКАМИ СОПРЯЖЕНИЯ

Hybrid integral transformations (Bessel — Fourier — Bessel — … — Fourier — Bessel) are constructed on the polar axis with $2n$ conjugacy points by using the method of delta-type sequence regarded as a Dirichlet kernel. The main identity of the integral transform of a differential operator is obtained.

Методом дельтаподібної послідовності, прийнятої як ядро Діріхле, побудовані гібридні інтегральні перетворення (Бесселя — Фур'є — Бесселя — … — Фур'є — Бесселя) на полярній осі з $2n$ точками спряження. Одержана основна тотожність інтегрального перетворення диференціального оператора.

Рассмотрим на множестве

$$I_{2n}^{+} = \left\{ r\colon\ r \in \bigcup_{k=0}^{2n} (R_k R_{k+1});\ R_0 = 0,\ R_{2n+1} = \infty \right\}$$

сингулярную задачу Штурма — Лиувилля: построить решение сепаратной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(B_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1}} + \omega_{2k+1}^2) v_{2k+1}(r) = 0, \quad r \in (R_{2k},\ R_{2k+1}),\ k = \overline{0,\ n}, \tag{1}$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \omega_{2k}^2\right) v_{2k}(r) = 0, \quad r \in (R_{2k-1},\ R_{2k}),\ k = \overline{1,\ n},$$

по краевым условиям

$$\frac{d}{dr}\left(r^{\alpha_1-\nu_1} v_1(r)\right)\Big|_{r=0} = 0; \quad \left(r^{\alpha_{n+1}} \frac{dv_{2n+1}}{dr}\right)\Big|_{r=\infty} = 0 \tag{2}$$

и условиям сопряжения

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right) v_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right) v_{k+1}\right]\Big|_{r=Rk} = 0;\ j = 1, 2;\ k = \overline{1,\ 2n}. \tag{3}$$

Здесь

$$\omega_k^2 = a_k^{-2}(\lambda^2 + \gamma_k^2),\ a_k > 0,\ \gamma_k \ge 0,\ \ \alpha_{jm}^k \ge 0,\ \lambda \in [0, \infty);$$

$$c_{ik} = \alpha_{2i}^k \beta_{1i}^k - \alpha_{1i}^k \beta_{2i}^k \ne 0;\ B_{\nu,\alpha} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha+1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\nu^2 - \alpha^2}{r^2} \quad (\nu \ge \alpha \ge -(1/2))$$

— оператор Бесселя [1].

Фундаментальную систему решений для уравнения $(d^2/dr^2 + \omega^2)v = 0$ образуют функции $\cos \omega r$ и $\sin \omega r$ [2], а для уравнения $(B_{\nu,\alpha} + \omega^2)v = 0$ — функции $\mathfrak{I}_{\nu,\alpha}(\omega r) = (\omega r)^{-\alpha} \mathfrak{I}_\nu(\omega r)$ и $N_{\nu,\alpha}(\omega r) = (\omega r)^{-\alpha} N_\nu(\omega r)$ [1].

Введем в рассмотрение следующие величины и функции:

$$\sigma_{2k} = \frac{1}{a_{2k}^2} \prod_{s=2k}^{2n} \frac{c_{1s}}{c_{2s}} \prod_{s=k}^{n-1} \left(\frac{R_{2s}}{R_{2s+1}}\right)^{2\alpha_{s+1}+1} R_{2n}^{2\alpha_{n+1}+1}; \quad 1 \le k \le n; \quad \sigma_{2n+1} = \frac{1}{a_{2n+1}^2};$$

$$\sigma_{2k+1} = \frac{1}{a_{2k+1}^2}\prod_{s=2k+1}^{2n}\frac{c_{1s}}{c_{2s}}R_{2k+1}^{-(2\alpha_{k+1}+1)}\prod_{s=k+1}^{n-1}\left(\frac{R_{2s}}{R_{2s+1}}\right)^{2\alpha_{s+1}+1}R_{2n}^{2\alpha_{n+1}+1};\quad 0\le k\le n;$$

$$v_{ij}^{k1}(\omega_s R_k) = -\alpha_{ij}^k\omega_s\sin\omega_s R_k+\beta_{ij}^k\cos\omega_s R_k;$$

$$v_{ij}^{k2}(\omega_s R_k) = \alpha_{ij}^k\omega_s\cos\omega_s R_k+\beta_{ij}^k\sin\omega_s R_k;$$

$$u_{\nu,\alpha,ij}^{k1}(\omega_s R_k) = \left(\alpha_{ij}^k\frac{\nu-\alpha}{R_k}+\beta_{ij}^k\right)\mathfrak{I}_{\nu,\alpha}(\omega_s R_k)-\alpha_{ij}^k\omega_s^2R_k\mathfrak{I}_{\nu+1,\alpha+1}(\omega_s R_k);$$

$$u_{\nu,\alpha,ij}^{k2}(\omega_s R_k) = \left(\alpha_{ij}^k\frac{\nu-\alpha}{R_k}+\beta_{ij}^k\right)N_{\nu,\alpha}(\omega_s R_k)-\alpha_{ij}^k\omega_s^2R_kN_{\nu+1,\alpha+1}(\omega_s R_k); \tag{4}$$

$$\Phi_{km}^n(\omega_s x,\,\omega_s R_n) = v_{km}^{n2}(\omega_s R_n)\cos\omega_s x-v_{km}^{n1}(\omega_s R_n)\sin\omega_s x;$$

$$\psi_{\nu,\alpha;km}^n(\omega_s x,\,\omega_s R_n) = u_{\nu,\alpha;km}^{n1}(\omega_s R_n)N_{\nu,\alpha}(\omega_s x)-u_{\nu,\alpha;km}^{n2}(\omega_s R_n)\mathfrak{I}_{\nu,\alpha}(\omega_s x).$$

Непосредственно проверяется, что решением спектральной задачи (1) – (3) являются функции:

$$V_{(\nu,\alpha);1}(r,\lambda) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n\prod_{s=1}^{2n}c_{2s}\prod_{s=2}^{2n+1}\omega_s\prod_{s=1}^{n}(\omega_{2s+1}R_{2s})^{-(2\alpha_{s+1}+1)}\mathfrak{I}_{\nu_1,\alpha_1}(\omega_1 r);$$

$$\begin{gathered}
V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\lambda) = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-k+1}\prod_{s=2k}^{2n}c_{2s}\prod_{s=2k+1}^{2n+1}\omega_s\prod_{s=k}^{n}(\omega_{2s+1}R_{2s})^{-(2\alpha_{s+1}+1)}\times\\
\times\ [\Phi_{12}^{2k-1}(\omega_{2k}r,\,\omega_{2k}R_{2k-1})\mathfrak{B}_{\overline{(1,4k-4)},4k-2;\overline{(1,4k-3)}}(\lambda)-\\
-\ \Phi_{22}^{2k-1}(\omega_{2k}r,\,\omega_{2k}R_{2k-1})\mathfrak{B}_{\overline{(1,4k-3)};\overline{(1,4k-3)}}(\lambda)],\quad 1\le k\le n;\\
V_{(\nu,\alpha);2k+1}(r,\lambda) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-k}\prod_{s=2k+1}^{2n}c_{2s}\prod_{s=2k+2}^{2n+1}\omega_s\prod_{s=k+1}^{n}(\omega_{2s+1}R_{2s})^{-(2\alpha_{s+1}+1)}\times\\
\times\ [\psi_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1};12}^{2k}(\omega_{2k+1}r,\,\omega_{2k+1}R_{2k})\mathfrak{B}_{\overline{(1,4k-2)},4k;\overline{(1,4k-1)}}(\lambda)-\\
-\ \psi_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1};22}^{2k}(\omega_{2k+1}r,\,\omega_{2k+1}R_{2k})\mathfrak{B}_{\overline{(1,4k-1)};\overline{(1,4k-1)}}(\lambda)],\quad 1\le k\le n-1;\\
V_{(\nu,\alpha);2n+1}(r,\lambda) = \omega_{(\nu,\alpha)}^{(2)}(\lambda)\mathfrak{I}_{\nu_{n+1},\alpha_{n+1}}(\omega_{2n+1}r)-\omega_{(\nu,\alpha)}^{(1)}(\lambda)N_{\nu_{n+1},\alpha_{n+1}}(\omega_{2n+1}r)\equiv\\
\equiv\ \mathfrak{B}_{\overline{(1,4n-2)},4n;\overline{(1,4n-1)}}(\lambda)\psi_{\nu_{n+1},\alpha_{n+1};12}^{2n}(\omega_{2n+1}r,\,\omega_{2n+1}R_{2n})-\\
-\ \mathfrak{B}_{\overline{(1,4n-1)};\overline{(1,4n-1)}}(\lambda)\psi_{\nu_{n+1},\alpha_{n+1};22}^{2n}(\omega_{2n+1}r,\,\omega_{2n+1}R_{2n});\\
(\nu,\alpha) = \{\nu_1,\alpha_1;\ \nu_2,\alpha_2;\ \ldots\ ;\nu_{n+1},\alpha_{n+1}\}.
\end{gathered}\tag{5}$$

В формулах (5) принимают участие определители $\mathfrak{B}_{\overline{(1,j)};\overline{(1,j)}}(\lambda)$, $\mathfrak{B}_{\overline{(1,j-1)},j+1;\overline{(1,j)}}(\lambda)$ прямоугольной матрицы A_{4n}^{4n-1} размерности $(4n)\times(4n-1)$:

$$\left[\begin{array}{ccccccc|cccc}
u^{11}_{\nu_1,\alpha_1;11} & -v^{11}_{12} & -v^{12}_{12} & 0 & 0 & & & & & & \\
u^{11}_{\nu_1,\alpha_1;21} & -v^{11}_{22} & -v^{12}_{22} & 0 & 0 & & & & & & \\
0 & v^{21}_{11} & v^{22}_{11} & -u^{21}_{\nu_2,\alpha_2;12} & -u^{22}_{\nu_2,\alpha_2;12} & & & & & & \\
0 & v^{21}_{21} & v^{22}_{21} & -u^{21}_{\nu_2,\alpha_2;22} & -u^{22}_{\nu_2,\alpha_2;22} & & & & & & \\
 & 0 & 0 & u^{31}_{\nu_2,\alpha_2;11} & u^{32}_{\nu_2,\alpha_2;11} & -v^{31}_{12} & -v^{32}_{12} & & & & \\
 & & & u^{31}_{\nu_2,\alpha_2;21} & u^{32}_{\nu_2,\alpha_2;21} & -v^{31}_{22} & -v^{32}_{22} & & & & \\
 & & & 0 & 0 & v^{41}_{11} & v^{42}_{11} & & & & \\
 & & & & & v^{41}_{21} & v^{42}_{21} & & & & \\
 & & & & & 0 & 0 & & & & \\
\hline
 & & & & & & & -u^{2n-2,1}_{\nu_n,\alpha_n;12} & -u^{2n-2,2}_{\nu_n,\alpha_n;12} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & -u^{2n-2,1}_{\nu_n,\alpha_n;22} & -u^{2n-2,2}_{\nu_n,\alpha_n;22} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & u^{2n-1,1}_{\nu_n,\alpha_n;11} & u^{2n-1,2}_{\nu_n,\alpha_n;11} & -v^{2n-1,1}_{12} & -v^{2n-1,2}_{12} \\
 & & & & & & & u^{2n-1,1}_{\nu_n,\alpha_n;21} & u^{2n-1,2}_{\nu_n,\alpha_n;21} & -v^{2n-1,1}_{22} & -v^{2n-1,2}_{22} \\
 & & & & & & & 0 & 0 & v^{2n,1}_{11} & v^{2n,2}_{11} \\
 & & & & & & & 0 & 0 & v^{2n,1}_{21} & v^{2n,2}_{21}
\end{array}\right]$$

Индекс $(\overline{1, j})$ указывает, что в образовании данного определителя принимают участие строки (столбцы) матрицы с номерами от 1 до j, а индекс $(\overline{1, j-1}), j+1$ указывает, что j-я строка заменяется $(j+1)$;

$$v^{2k,s}_{ij} = v^{2k-1,s}_{ij}(\omega_{2k}R_{2k}), \quad v^{2k-1,s}_{ij} = v^{2k-1,s}_{ij}(\omega_{2k}R_{2k-1});$$

$$u^{2m,s}_{\nu_{m+1},\alpha_{m+1};ij} = u^{2m,s}_{\nu_{m+1},\alpha_{m+1};ij}(\omega_{2m+1}R_{2m});$$

$$u^{2m+1,s}_{\nu_{m+1},\alpha_{m+1};ij} = u^{2m+1,s}_{\nu_{m+1},\alpha_{m+1};ij}(\omega_{2m+1}R_{2m+1});$$

$$s, i, j = 1, 2, \quad 1 \le k \le n; \quad 1 \le m \le n-1.$$

С помощью единичной функции Хевисайда $\theta(r)$ [3] построим спектральную функцию

$$V_{(\nu,\alpha)}(r, \lambda) = \sum_{j=1}^{2n} V_{(\nu,\alpha);j}(r, \lambda)\theta(r - R_{j-1})\theta(R_j - r) + V_{(\nu,\alpha);2n+1}(r, \lambda)\theta(r - R_{2n}) \quad (6)$$

и весовую функцию

$$\sigma(r) = \sum_{k=0}^{n-1} r^{2\alpha_{k+1}+1}\sigma_{2k+1}\theta(R_{2k+1} - r)\theta(r - R_{2k}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \sigma_{2k}\theta(R_{2k} - r)\theta(r - R_{2k-1}) + \sigma_{2n+1}r^{2\alpha_{\nu+1}+1}\theta(r - R_{2n}). \quad (7)$$

Наличие спектральной и весовой функций, а также спектральной плотности

$$\omega^2_{(\nu,\alpha)}(\lambda) = [\omega^{(1)}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)]^2 + [\omega^{(2)}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)]^2,$$

$$\omega^{(j)}_{(\nu,\alpha)}(\lambda) = u^{2n,j}_{\nu_{n+1},\alpha_{n+1};22}(\omega_{2n+1}R_{2n})\mathfrak{B}_{\overline{(1,4n-1)};\overline{(1,4n-1)}}(\lambda) -$$

$$- u^{2n,j}_{\nu_{n+1},\alpha_{n+1};12}(\omega_{2n+1}R_{2n})\mathfrak{B}_{\overline{(1,4n-2)},4n;\overline{(1,4n-1)}}(\lambda) \quad (8)$$

позволяет написать на множестве I^+_{2n} интегральное представление меры Дирака [3]

$$\frac{\delta(r-\rho)}{\sigma(\rho)} = \int_0^\infty V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)V_{(\nu,\alpha)}(\rho,\lambda)\frac{\omega_{2n+1}^{2\alpha_{n+1}}\lambda d\lambda}{\omega_{(\nu,\alpha)}^2(\lambda)}. \tag{9}$$

Последнее соотношение порождает прямое H_{2n} и обратное H_{2n}^{-1} гибридное интегральное преобразование Бесселя — Фурье — Бесселя — ... — Фурье — Бесселя на полярной оси с $2n$ точками сопряжения:

$$H_{2n}[f(r)] = \int_0^\infty f(r)V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr \equiv \tilde{f}(\lambda), \tag{10}$$

$$H_{2n}^{-1}[\tilde{f}(\lambda)] = \int_0^\infty \tilde{f}(\lambda)V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)\frac{\omega_{2n+1}^{2\alpha_{n+1}}(\lambda)\lambda d\lambda}{\omega_{(\nu,\alpha)}^2(\lambda)} \equiv f(r). \tag{11}$$

Справедливо следующее утверждение о разложимости.

Теорема 1. *Пусть функция $f(r)$ определена и кусочно-непрерывна на I_{2n}^+, а функция*

$$g(r) = f(r)\left[\sum_{k=0}^{n-1} r^{\alpha_{k+1}+1/2}\theta(R_{2k+1}-r)\theta(r-R_{2k}) + \right.$$

$$\left. + r^{\alpha_{n+1}+1/2}\theta(r-R_{2n}) + \sum_{k=1}^{n} 1\cdot\theta(R_{2k}-r)\theta(r-R_{2k-1})\right]$$

абсолютно интегрируема и имеет ограниченную вариацию на полярной оси $r\geq 0$. Тогда для $r\in I_{2n}^+$ справедливо интегральное представление

$$\frac{1}{2}[f(r-0)+f(r+0)] = \int_0^\infty V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda) \times$$

$$\times \int_0^\infty f(\rho)V_{(\nu,\alpha)}(\rho,\lambda)\sigma(\rho)d\rho\frac{\omega_{2n+1}^{2\alpha_{n+1}}(\lambda)\lambda d\lambda}{\omega_{(\nu,\alpha)}^2(\lambda)}. \tag{12}$$

Доказательство. Для функций $V_{(\nu,\alpha);\,2j+1}(r,\lambda)$, $V_{(\nu,\alpha);\,2j+1}(r,\beta)$, $j=\overline{0,\ n}$, и $V_{(\nu,\alpha);\,2k}(r,\lambda)$, $V_{(\nu,\alpha);\,2k}(r,\beta)$, $k=\overline{1,\ n}$, справедливы соответственно равенства

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\omega_{2k}^2(\lambda)\right)V_{(\nu,\alpha);\,2k}(r,\lambda) = 0, \tag{13}$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\omega_{2k}^2(\beta)\right)V_{(\nu,\alpha);\,2k}(r,\beta) = 0,\ k=\overline{1,\ n}; \tag{14}$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2\alpha_{j+1}+1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{\nu_{j+1}^2-\alpha_{j+1}^2}{r^2}+\omega_{2j}^2(\lambda)\right]V_{(\nu,\alpha);\,2j+1}(r,\lambda) = 0, \tag{15}$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2\alpha_{j+1}+1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{\nu_{j+1}^2-\alpha_{j+1}^2}{r^2}+\omega_{2j+1}^2(\beta)\right]V_{(\nu,\alpha);\,2j+1}(r,\beta)=0, j=\overline{0,\ n}. \tag{16}$$

Умножая равенства (13) и (14) соответственно на функции $V_{(\nu,\alpha);\,2k}(r,\beta)$, $V_{(\nu,\alpha);\,2k}(r,\lambda)$ и вычитая из первого второе, получаем

$$V_{(\nu,\alpha);\,2k}(r,\lambda)V_{(\nu,\alpha);\,2k}(r,\beta) = \frac{a_{2k}^2}{\lambda^2-\beta^2}\frac{d}{dr}\times$$

$$\times\left[V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\ \lambda)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\ \beta)-V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\ \beta)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\ \lambda)\right]. \qquad (17)$$

Умножая равенство (15) на функцию $r^{2\alpha_{j+1}+1}V_{(\nu,\alpha);\,2j+1}(r,\beta)$, а равенство (16) на функцию $r^{2\alpha_{j+1}+1}V_{(\nu,\alpha);\,2j+1}(r,\lambda)$ и вычитая из первого второе, имеем

$$V_{(\nu,\alpha);\,2j+1}(r,\lambda)V_{(\nu,\alpha);\,2j+1}(r,\beta)r^{2\alpha_{j+1}+1} = a_{2j+1}^2(\lambda^2-\beta^2)^{-1}\times$$

$$\times\frac{d}{dr}\left[r^{2\alpha_{j+1}+1}\left(V_{(\nu,\alpha);2j+1}(r,\ \lambda)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);2j+1}(r,\ \beta)\ -\right.\right.$$

$$\left.\left.-\ V_{(\nu,\alpha);2j+1}(r,\ \beta)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);2j+1}(r,\ \lambda)\right)\right]. \qquad (18)$$

Зададим некоторое достаточно большое число $A > R_{2n}$. Если умножить равенство (17) на σ_{2k} и проинтегрировать от R_{2k-1} до R_{2k}, а равенство (18) на σ_{2j+1} и проинтегрировать от R_{2j} до R_{2j+1} и просуммировать, то будем иметь

$$\int_0^A V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr = \sum_{j=0}^{n-1}\int_{R_{2j}}^{R_{2j+1}} V_{(\nu,\alpha);\,2j+1}(r,\lambda)\times$$

$$\times V_{(\nu,\alpha);\,2j+1}(r,\beta)r^{2\alpha_{j+1}+1}\sigma_{2j+1}dr + \sum_{k=1}^{n}\int_{R_{2k-1}}^{R_{2k}} V_{(\nu,\alpha);\,2k}(r,\lambda)V_{(\nu,\alpha);\,2k}(r,\beta)\sigma_{2k}dr +$$

$$+\int_{R_{2n}}^{A} V_{(\nu,\alpha);\,2n+1}(r,\lambda)V_{(\nu,\alpha);\,2n+1}(r,\beta)r^{2\alpha_{j+1}+1}\sigma_{2n+1}dr =$$

$$=\frac{1}{\lambda^2-\beta^2}\left\{\sum_{j=0}^{n-1}a_{2j+1}^2\left[r^{2\alpha_{j+1}+1}\left(V_{(\nu,\alpha);2j+1}(r,\ \lambda)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);2j+1}(r,\ \beta)\ -\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-\ V_{(\nu,\alpha);2j+1}(r,\ \beta)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);2j+1}(r,\ \lambda)\right]\right|_{R_{2j}}^{R_{2j+1}}\sigma_{2j+1}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}a_{2k}^2\left[V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\ \lambda)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\ \beta)\ -\right.$$

$$\left.-\ V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\ \beta)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);2k}(r,\ \lambda)\right]\Bigg|_{R_{2k-1}}^{R_{2k}}\sigma_{2k}+$$

$$+\ a_{2n+1}^2\sigma_{2n+1}\left[r^{2\alpha_{n+1}+1}\left(V_{(\nu,\alpha);2n+1}(r,\ \lambda)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);2n+1}(r,\ \beta)\ -\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\ V_{(\nu,\alpha);2n+1}(r,\ \beta)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);2n+1}(r,\ \lambda)\right]\right|_{R_{2n}}^{A}\right\} =$$

$$= A^{2\alpha_{n+1}+1}(\lambda^2-\beta^2)^{-1}\Big[V_{(\nu,\alpha);2n+1}(A,\ \lambda)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);2n+1}(A,\ \beta)-$$

$$-\ V_{(\nu,\alpha);2n+1}(A,\ \beta)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);2n+1}(A,\ \lambda)\Big]. \qquad (19)$$

Для произвольных положительных чисел c и d $(c<d)$ и произвольной конечной функции $\psi(\lambda)$, заданной на сегменте $[c,d]$, вычислим двойной интеграл

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_c^d \psi(\lambda)V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)d\lambda V_{(\nu,\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr. \qquad (20)$$

Двойной интеграл (20) в силу равенства (19) перепишем так:

$$\lim_{A\to\infty}\int\limits_c^d \psi(\lambda)A^{2\alpha_{n+1}+1}(\lambda^2-\beta^2)^{-1}[V_{(\nu,\alpha);\,2n+1}(A,\lambda)\times$$

$$\times\ \frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);2n+1}(A,\ \beta)-V_{(\nu,\alpha);2n+1}(A,\ \beta)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);2n+1}(A,\ \lambda)\Big]d\lambda. \qquad (21)$$

Так как $d>c>0$, то при вычислении предела (21) воспользуемся для функций $V_{(\nu,\alpha);\,2n+1}$ и $dV_{(\nu,\alpha);\,2n+1}/dr$ асимптотическими формулами при больших значениях аргумента, принимая во внимание асимптотику цилиндрических функций 1-го и 2-го рода действительного аргумента [4]:

$$\mathfrak{I}_{\nu,\alpha}(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{-(\alpha+1/2)}\cos\left(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right);\ N_{\nu,\alpha}(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{-(\alpha+1/2)}\sin\left(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

Поскольку

$$V_{(\nu,\alpha);\,2n+1}(A,\lambda)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\omega_{2n+1}A)^{-(\alpha_{n+1}+1/2)}\Big[\omega^{(2)}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\cos\left(\omega_{2n+1}A-\frac{\pi}{2}\nu_{n+1}-\frac{\pi}{4}\right)-$$

$$-\ \omega^{(1)}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\sin\left(\omega_{2n+1}A-\frac{\pi}{2}\nu_{n+1}-\frac{\pi}{4}\right)\Big];$$

$$\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);\,2n+1}(A,\lambda)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\omega_{2n+1}A)^{-(\alpha_{n+1}+1/2)}\times$$

$$\times\ \left\{\left[\frac{\nu_{n+1}-\alpha_{n+1}}{A}\omega^{(2)}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)-\omega_{2n+1}\omega^{(1)}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\right]\cos\left(\omega_{2n+1}A-\frac{\pi}{2}\nu_{n+1}-\frac{\pi}{4}\right)\ -\right.$$

$$\left.-\ \left[\frac{\nu_{n+1}-\alpha_{n+1}}{A}\omega^{(1)}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)+\omega_{2n+1}\omega^{(2)}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\right]\sin\left(\omega_{2n+1}A-\frac{\pi}{2}\nu_{n+1}-\frac{\pi}{4}\right)\right\},$$

то в результате элементарных преобразований получаем

$$V_{(\nu,\alpha);\,2n+1}(A,\lambda)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);\,2n+1}(A,\beta)-V_{(\nu,\alpha);\,2n+1}(A,\beta)\frac{d}{dr}V_{(\nu,\alpha);\,2n+1}(A,\lambda)\approx$$

$$\approx\ \pi^{-1}A^{-(2\alpha_{n+1}+1)}[\omega_{2n+1}(\lambda)\omega_{2n+1}(\beta)]^{-(\alpha_{n+1}+1/2)}\ \times$$

$$\times\ \{[\omega_{2n+1}(\lambda)+\omega_{2n+1}(\beta)]\sin A(\omega_{2n+1}(\lambda)-\omega_{2n+1}(\beta))[\omega^{(1)}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\omega^{(1)}_{(\nu,\alpha)}(\beta)+$$

$$+\ \omega^{(2)}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\omega^{(2)}_{(\nu,\alpha)}(\beta)]+[\omega_{2n+1}(\lambda)+\omega_{2n+1}(\beta)]\cos A(\omega_{2n+1}(\lambda)-\omega_{2n+1}(\beta))\times$$

$$\times[\omega^{(1)}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\omega^{(2)}_{(\nu,\alpha)}(\beta)-\omega^{(1)}_{(\nu,\alpha)}(\beta)\omega^{(2)}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)]+(\omega_{2n+1}(\lambda)-\omega_{2n+1}(\beta))\times$$

$$\times [\omega^{(1)}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\omega^{(2)}_{(\nu,\alpha)}(\beta) + \omega^{(1)}_{(\nu,\alpha)}(\beta)\omega^{(2)}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)] \times$$

$$\times \sin [A(\omega_{2n+1}(\lambda) + \omega_{2n+1}(\beta)) - \pi\nu_{n+1}] + (\omega_{2n+1}(\lambda) - \omega_{2n+1}(\beta)) \times$$

$$\times [\omega^{(1)}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\omega^{(1)}_{(\nu,\alpha)}(\beta) - \omega^{(2)}_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\omega^{(2)}_{(\nu,\alpha)}(\beta)]\cos [A(\omega_{2n+1}(\lambda) + \omega_{2n+1}(\beta)) - \pi\nu_{n+1}]\}. \tag{22}$$

Если функция $\psi(\lambda)$ непрерывна, абсолютно интегрируема и имеет ограниченную вариацию на $[c, d]$, то в результате подстановки (22) в (21) с использованием лемм Римана и Дирихле [5] получаем равенство

$$\int_0^\infty \int_c^d \psi(\lambda)V_{(\nu,\alpha)}(r, \lambda)V_{(\nu,\alpha)}(r, \beta)d\lambda\sigma(r)dr =$$

$$= \begin{cases} \psi(\beta)\left[\beta\omega_{2n+1}^{2\alpha_{n+1}+1}(\beta)\right]^{-1}\omega^2_{(\nu,\alpha)}(\beta), & \beta \in [c,d], \\ 0, & \beta \overline{\in} [c,d]. \end{cases}$$

Если функция $\psi(\lambda)$ имеет указанные выше свойства на множестве $(0, \infty)$, то

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \psi(\lambda)V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)\Omega_{(\nu,\alpha)}(\lambda)d\lambda\right)V_{(\nu,\alpha)}(r, \beta)\sigma(r)dr =$$

$$= \begin{cases} \psi(\beta), & \beta \in [0, \infty], \\ 0, & \beta \overline{\in} [0, \infty]; \end{cases} \quad \Omega_{(\nu,\alpha)}(\lambda) = \frac{\lambda\omega_{2n+1}^{2\alpha_{n+1}}(\lambda)}{\omega^2_{(\nu,\alpha)}(\lambda)}. \tag{23}$$

Предположим теперь, что функция

$$f(r) = \int_0^\infty \psi(\lambda)V_{(\nu,\alpha)}(r,\lambda)\Omega_{(\nu,\alpha)}(\lambda)d\lambda. \tag{24}$$

Умножим (24) на $V_{(\nu,\alpha)}(r, \beta)\sigma(r)$, где β — произвольное положительное число, и проинтегрируем по r от $r=0$ до $r=\infty$. В силу (23)

$$\int_0^\infty f(r)V_{(\nu,\alpha)}(r, \beta)\sigma(r)dr = \psi(\beta).$$

Подставляя функцию

$$\psi(\lambda) = \int_0^\infty f(\rho)V_{(\nu,\alpha)}(\rho, \lambda)\sigma(\rho)d\rho$$

в равенство (24), получаем интегральное представление

$$f(r) = \int_0^\infty V_{(\nu,\alpha)}(r, \lambda)\Omega_{(\nu,\alpha)}(\lambda)\int_0^\infty f(\rho)V_{(\nu,\alpha)}(\rho, \lambda)\sigma(\rho)d\rho d\lambda. \tag{25}$$

Отказ от непрерывности функции f в точке r (f кусочно-непрерывна) приводит к равенству (12).

С целью применения полученных интегральных преобразований для решения соответствующих задач математической физики получим основное тождество интегрального преобразования дифференциального оператора

$$\mathfrak{L}_{(\nu,\alpha)} = \sum_{j=0}^{n-1} \theta(r - R_{2j})\theta(R_{2j+1} - r)B_{\nu_{j+1}, \alpha_{j+1}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \theta(r - R_{2k-1})\theta(R_{2k} - r)\frac{d^2}{dr^2} + \theta(r - R_{2n})B_{\nu_{n+1}, \alpha_{n+1}}.$$

Введем характеристическую функцию

$$\chi(r) = \sum_{k=1}^{2n} a_k^2 \theta(r - R_{k-1})\theta(R_k - r) + a_{2n+1}^2 \theta(r - R_{2n}).$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Если функция $f(r)$ дважды непрерывно дифференцируема на множестве I_{2n}^{+}, удовлетворяет условиям сопряжения (3) и условиям ограниченности*

$$\lim_{r\to 0+} \frac{d}{dr}[r^{\alpha_1 - \nu_1} f(r)] = 0, \quad \left(r^{\alpha_{n+1}+3/2} \frac{df}{dr} \right)\bigg|_{r=\infty} = 0,$$

то справедливо тождество

$$H_{2n}[\chi(r)\mathfrak{L}_{(\nu,\alpha)}[f(r)]] \equiv \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}^2 \int_{R_{2k}}^{R_{2k+1}} \left[\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2\alpha_{k+1}+1}{r}\frac{df}{dr} - \right.$$

$$\left. - \frac{\nu_{k+1}^2 - \alpha_{k+1}^2}{r^2} f(r) \right] V_{(\nu,\alpha);2k+1}(r, \lambda) r^{2\alpha_{k+1}+1} \sigma_{2k+1} dr +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}^2 \int_{R_{2k-1}}^{R_{2k}} \frac{d^2 f}{dr^2} V_{(\nu,\alpha);2k}(r, \lambda)\sigma_{2k} dr =$$

$$= -\lambda^2 \tilde{f}(\lambda) - \sum_{k=1}^{n} \gamma_{2k}^2 \int_{R_{2k-1}}^{R_{2k}} f(r) V_{(\nu,\alpha);2k}(r, \lambda)\sigma_{2k} dr -$$

$$- \sum_{k=0}^{n} \gamma_{2k+1}^2 \int_{R_{2k}}^{R_{2k+1}} f(r)\, V_{(\nu,\alpha);2k+1}(r, \lambda) r^{2\alpha_{k+1}+1} \sigma_{2k+1} dr.$$

Доказательство теоремы получается непосредственно, если проинтегрировать дважды по частям и учесть свойства функций $V_{(\nu,\alpha);j}(r, \lambda)$, $f(r)$, $\sigma(r)$.

1. *Ленюк М. П.* Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. – Киев, 1983. – 64 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
2. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
3. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. – М.: Наука, 1965. – Т. 3. – 656 с.

Получено 26.11.91