УДК 512.543.1

Е. А. МИХАЙЛЮК, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН УССР, Киев)

Некоторые свойства подгрупп свободных групп

С каждой подгруппой A свободной группы F связывается число $\langle F : A\rangle$, называемое квазииндексом. Доказывается, что $\langle F : A\rangle = |F : A|$, если $|F : A|$ конечен. Устанавливаются также некоторые свойства квазииндекса, в частности для него справедливы аналог теоремы Лагранжа: $\langle F : B\rangle \leqslant \langle F : A\rangle \langle A : B\rangle$, если $A \supset B$, а также обобщения теорем Хаусона и Бернса.

З кожною підгрупою A вільної групи F зв'язується число $\langle F : A\rangle$, яке називається квазііндексом. Доводиться, що $\langle F : A\rangle = |F : A|$, якщо $|F : A|$— скінченний. Встановлюються також деякі властивості квазііндексу, зокрема для нього має місце аналог теореми Лагранжа: $\langle F : B\rangle \leqslant \langle F : A\rangle \langle A : B\rangle$, якщо $A \supset B$, а також узагальнення теорем Хаусона і Бернса.

В настоящей работе вводится понятие квазииндекса подгруппы свободной группы. Доказывается, что квазииндекс всегда совпадает с классическим индексом, если последний конечен, и что для него справедлив ряд свойств, аналогичных соответствующим свойствам классического индекса.

1. Пусть F — свободная группа с базисом X. Для элемента $f \in F$ через $|f|$ будем обозначать длину приведенного слова, представляющего f. Если $A \subset F$ — некоторая подгруппа, а $S \subset F$ — произвольное множество, то на S можно ввести отношение (правой) смежности, полагая по определению

$$s_1 \sim s_2 \Leftrightarrow s_1 s_2^{-1} \in A.$$

Множество классов смежности будем обозначать S/A.

Определение 1. *Число* card (S/A) *назовем размерностью множества* S *над* A *и обозначим* $\dim_A S$.

С каждой подгруппой свяжем множество $L(A, F) \subset F$ следующим образом: элемент $f \in L(A, F)$ тогда и только тогда, когда найдется $g \in F$ такой, что $fg \in A$ и $|fg| = |f| + |g|$. Очевидно, что $A \subset L(A, F)$.

Определение 2. *Число* $\dim_A L(A, F)$ *назовем квазииндексом* A *в* F *и будем обозначать* $\langle F : A\rangle$.

Утверждение 1. *Если* A *— подгруппа свободной группы и* $|F : A| < \infty$ ($|F : A|$ *— индекс в классическом смысле), то* $\langle F : A\rangle = |F : A|$.

Доказательство. Случай, когда $\operatorname{rank} F = 1$, тривиален, поэтому будем предполагать, что $\operatorname{rank} F > 1$. Пусть $f \in F$ — произвольный элемент, всегда найдется такой элемент $x \in X \cup X^{-1}$, что $|fx| = |xf| = |f| + 1$. Так как $|F : A| < \infty$, то $(fx)^m \in A$ при некотором m, однако $|(fx)^m| = |f| + |x(fx)^{m-1}|$. Отсюда следует, что $f \in L(A, F)$, поэтому $L(A, F) = F$. Итак, $\langle F : A\rangle = \operatorname{card}(F/A) = |F : A|$.

Утверждение 2. *Если* $\langle F : A\rangle = 1$, *то* A *обладает базисом* U *таким, что* $U \subset X$, *в частности* A *— свободный множитель* F.

Доказательство. Определим U как множество таких $x \in X$, что x входит в приведенное слово, представляющее какой-либо элемент $a \in A$. Далее, так как $\langle F : A\rangle = 1$, то $L(A, F) = A$. Следовательно, если $a = \alpha x \beta$, причем $|\alpha x \beta| = |\alpha| + |\beta| + 1$, то $\alpha, \alpha x \in A$, а значит, и $x \in A$. Таким образом, $A = \operatorname{Gp}(U)$, откуда и следует утверждение теоремы.

Если F, A, G — свободные группы и $A \subset F$, то из пары (F, A) можно образовать две пары $(F * G, A * G)$ и $(F * G, A)$ ($F * G$ — свободное произведение).

Утверждение 3. *Справедливы равенства* $\langle F * G : A\rangle = \langle F : A\rangle$, $\langle F * G : A * G\rangle = \langle F : A\rangle$.

Доказательство. Сначала докажем первое равенство. Очевидно, что если $f \in L(A, F * G)$, то приведенное слово, представляющее f, не содержит никакого элемента из Y (Y — базис G), следовательно, $L(A, F*G) = L(A, F)$ и легко видеть, что

$$\langle F : A\rangle = L(A, F)/A = L(A, F*G)/A = \langle F*G : A\rangle.$$

Для доказательства второго равенства установим взаимно-однозначное соответствие между $L(A, F) / A$ и $L(A*G, F*G)/A*G$. Пусть Af — класс из $L(A, F)/A$, поставим ему в соответствие класс $(A*G)f$, если $Af \neq Af'$, то и $(A*G)f \neq (A*G)f'$. Обратно, рассмотрим класс $(A*G)h \in L(A*G, F*G)$. Элемент $h \in F*G$ может быть однозначно записан в следующем виде: $h = g_1 g_2 \dots g_p$, где $g_i \in F$, $g_{i+1} \in G$, или $g_i \in G$, $g_{i+1} \in F$, $1 \leqslant i \leqslant p-1$. Тогда поставим в соответствие классу $(A*G)h$ класс Ag_p, если $g_p \in F$, или класс $A \cdot 1$ — в противном случае. Легко убедиться, что $g_p \in L(A, F)$ и построенное соответствие также является инъективным. Отсюда и следует второе равенство.

2. Для установления дальнейших свойств квазииндекса нам потребуются топологические методы, подробное изложение которых имеется в [1]. Мы же ограничимся самыми основными понятиями.

Пусть X, Y — одномерные клеточные пространства или, что то же самое, графы. Клеточное отображение $h: X \to Y$ называется комбинаторным, если h отображает гомеоморфно внутренность каждого из X на внутренность некоторого ребра из Y. В частности $h(X)$ — подкомплекс Y.

Определение 3. *Комбинаторное отображение $h: X \to Y$ назовем погружением, если локально h является вложением. Очевидно, что если $h: (X, o_X)$ (Y, o_Y), $\to h(o_X) = o_Y$ (o_X, o_Y — отмеченные вершины пространств X, Y соответственно) является погружением, то $h_*: \pi_1(X, o_X) \to \pi_1(Y, o_Y)$ — мономорфизм.*

Пусть $T = \bigvee_{j=1}^{n} ((S_i, o_i) = (S^1, o))$ — букет окружностей, примем центр букета за отмеченную точку и обозначим ее o_T. Тогда свободную группу ранга n можно отождествить с $\pi_1(T, o_T)$, а в качестве базиса выбрать гомотопические классы вложений

$$t_j: (S^1, o) \to (S_i, o_i).$$

Определение 4. *Пусть заданы комплекс S_A и отображение*

$$\pi_A: (S_A, o_S) \to (T, o_T),$$

удовлетворяющее следующим условиям:

1) π_A — *погружение;*

2) $\operatorname{im}(\pi_A)_* = A \subset \pi_1(T, o_T) = F$, $(\pi_A)_*$ — *гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный* π_A;

3) *комплекс S_A минимален в том смысле, что для любого собственного подкомплекса $X \subset S_A$ такого, что $o_S \in X$ — $\mathrm{ab}(\pi_A) * (\pi_1(X, o_S)) \subsetneq A$ (здесь и далее* ab — *символ сужения отображения).*

В этом случае назовем тройку (S_A, o_S, π_A) квазинакрытием над T, а A — группой квазинакрытия (S_A, o_S, π_A).

Утверждение 4. *Пусть задана подгруппа $A \subset F = \pi_1(T, o_T)$, тогда существует квазинакрытие (S_A, o_S, π_A) над T, отвечающее подгруппе A.*

Доказательство. Рассмотрим накрытие $p: (\widehat{T}, \widehat{o}_T) \to (T, o_T)$ такое, что $\operatorname{im} p_* = A$. Рассмотрим все подкомплексы $\{(R_j, \widehat{o}_T), j \in J\}$ такие, что $\mathrm{ab}\, p_*(\pi_1(R_j, \widehat{o}_T)) = A$, и положим $S_A = \bigcap_{j \in J} R_j$, $\pi_A = \mathrm{ab}\, p$, $o_S = \widehat{o}_T$. Очевидно, что π_A — погружение. Ясно также, что $\mathrm{ab} p_*(\pi_1(S_A, o_S)) \subset A$. Пусть $f \in A$, рассмотрим отображение $\tau: (S^1, o) \to (T, o_T)$, представляющее элемент f, причем τ есть погружение в каждой точке, за исключением, возможно, точки o. Если $\widehat{\tau}: (S^1, o) \to (\widehat{T}, \widehat{o}_T)$ — поднятие, то ясно, что $\operatorname{im} \widehat{\tau} \subset R_j$ для всех $j \in J$, следовательно, $\operatorname{im} \widehat{\tau} \subset S_A$ и $f \in \mathrm{ab}\, p_*(\pi_1(S_A, o_S))$. Теперь ясно, что тройка (S_A, π_A, o_S) удовлетворяет всем условиям определения 4.

Утверждение 5. *Пусть задана подгруппа* $A \subset F = \pi_1(T, o_T)$ *и отвечающее ей квазинакрытие* (S_A, π_A, o_S). *Следующие условия эквивалентны*: 1) A — *конечнопорождена*; 2) S_A — *компактно*.

Импликация (2)$\Rightarrow$(1) очевидна, докажем обратное утверждение. Пусть $a_1, \ldots, a_m$ — базис A и $\tau_i : (S^1, o) \to (T, o_T)$ — отображения, являющиеся погружением вне $S^1 \setminus \{o\}$, такие, что $[\tau_i] = a_i$ ($[\cdot]$ — гомотопический класс). Рассмотрим поднятие $\hat{\tau}_i : (S^1, o) \to (\hat{T}, \hat{o}_T)$ ($(\hat{T}, \hat{o}_T)$ — накрытие из доказательства утверждения 4) и положим $X = \bigcup_{i=1}^{m} \hat{\tau}_i(S^1)$. Ясно, что $\hat{o}_T \in X$ и и $\operatorname{ab} p_*(\pi_1(X, \hat{o}_T)) = A$. Так как X компактно, то и S_A также должно быть компактно.

Следующее утверждение — основной результат этого пункта.

Утверждение 6. *Пусть задана подгруппа* $A \subset F = \pi_1(T, o_T)$ *и отвечающее ей квазинакрытие* (S_A, π_A, o_S), *тогда*

$$\langle F : A \rangle = \operatorname{card} \pi_A^{-1}(o_T).$$

В случае, когда левая или правая часть бесконечна, это равенство следует понимать в том смысле, что между множествами $\pi_A^{-1}(o_T)$ и $L(A, F)/A$ имеет место взаимно-однозначное соответствие.

Доказательство. Пусть $z \in \pi_A^{-1}(o_T)$ — некоторая вершина S_A. Рассмотрим приведенный путь τ, соединяющий o_S с z. Так как $\pi_A(o_S) = \pi_A(z) = o_T$, то π_A отображает пусть τ в некоторую петлю в T. Последняя определяет некоторый элемент $f(z)$ в $F = (\pi_1(T, o_T)$. С другой стороны, путь τ можно продолжить до приведенного замкнутого пути в S_A (с началом и концом в o_S). Если бы это было не так, то легко показать, что в этом случае комплекс S_A не удовлетворял бы условию 3 из определения 4. Отсюда следует, что $f(z) \in L(A, F)$. Если $\bar{\tau}$ — другой путь, соединяющий o_S с z, то он определяет, вообще говоря, другой элемент $\bar{f}(z)$ из $L(A, F)$, однако $\bar{f}(z) f^{-1}(z) \in A$. Таким образом, каждой вершине из $\pi_A^{-1}(o_S)$ мы поставили в соответствие некоторый класс из $L(A, F)/A$. Из условий 1 и 2 определения 4 также следует, что это соответствие будет взаимно-однозначным.

Укажем без доказательства два очевидных следствия из этого утверждения.

Утверждение 7. *Если* $A \subset F$, *где* F — *свободная группа, то выполняется неравенство*

$$\frac{1 - \operatorname{rank} A}{1 - \operatorname{rank} F} \leqslant \langle F : A \rangle.$$

Утверждение 8. *Если* A — *конечнопорожденная подгруппа свободной группы* F, *то* $\langle F : A \rangle$ *конечен*; *в случае, когда* F *имеет конечный ранг,— верно обратное.*

3. Покажем, что для тройки групп (F, A, B), где F — свободная группа и $F \supset A \supset B$, выполняется аналог теоремы Лагранжа, а именно $\langle F : B \rangle \leqslant \langle F : A \rangle \langle A : B \rangle$. Однако для этого нам нужно определить $\langle A : B \rangle$.

Рассмотрим букет окружностей T такой, что $\pi_1(T, o_T) = F$. Существуют квазинакрытия (S_A, o_A, π_A) и (S_B, o_B, π_B), отвечающие подгруппам A и B соответственно. Кроме того, так как $B \subset A$, то существует «поднятие» $\mu : (S_A, o_B) \to (S_A, o_A)$ такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & (S_A, o_A) \arrow[d, "\pi_A"] \\ (S_B, o_B) \arrow[ur, "\mu"] \arrow[r, "\pi_B"] & (T, o_T) \end{tikzcd} \qquad (*)$$

коммутативна. Пусть $\Delta(\mu(S_B), o_A)$ — множество всех максимальных деревьев в $\mu(S_B)$, содержащих o_A.

Определение 5. *Если A, B — подгруппы свободной группы F, причем $A \supset B$, то определим $\langle A : B \rangle$ следующим образом:*

$$\langle A : B \rangle = \min_{\delta \in \Delta(\mu(S_B), o_A)} (\operatorname{card} \operatorname{comp} \mu^{-1}(\delta)).$$

Утверждение 9. *Если A, B—подгруппы свободной группы F, причем $A \supset B$, то выполняется неравенство*

$$\langle F : B \rangle \leqslant \langle F : A \rangle \langle A : B \rangle.$$

Доказательство. Рассмотрим диаграмму (*), из утверждения 9 следует

$$\langle F{:}A \rangle = \operatorname{card} \pi_A^{-1}(o_T),$$

$$\langle F : B \rangle = \operatorname{card} \pi_B^{-1}(o_T).$$

Так как π_A и π_B — погружение, то таковым является и μ, поэтому каждая компонента из $\mu^{-1}(\delta)$ является деревом в S_B и сужение на нее отображения μ является вложением. Пусть δ_m — то дерево, на котором достигается минимум (см. определение 5), и пусть $\{\tau_1, \ldots, \tau_l\} = \mu^{-1}(\delta_m)$. Так как $\delta_m^{(0)} = (\mu(S_B))^{(0)}$ ($(\cdot)^{(0)}$ — нульмерный остов), то $\bigcup_{j=1}^{l} \tau_j^{(0)} = S_B^{(0)}$. Ясно, что $\operatorname{card} \pi_B^{-1}(o_T) = \sum_{z \in (\mu(S_B))^{(0)}} \operatorname{card} \mu^{-1}(z) = \sum_{i=1}^{l} \operatorname{card} \tau_i^{(0)}$. Очевидно, что $\operatorname{card} \tau_i^{(0)} \leqslant \operatorname{card} \delta_m^{(0)} \leqslant \operatorname{card} S_A^{(0)} = \operatorname{card} \pi_A^{-1}(o_T)$, поэтому $\langle F : B \rangle = \operatorname{card} \pi_B^{-1}(o_T) \leqslant l \cdot \operatorname{card} \pi_A^{-1}(o_T) = \langle F : A \rangle \langle A : B \rangle$.

Если для тройки групп ($F \supset A \supset B$) выполняется равенство $\langle F : A \rangle = \langle F : B \rangle$, то, вообще говоря, $A \neq B$. Тем не менее, справедлив следующий результат.

Утверждение 10. *Если A, B — подгруппы свободной группы F, $B \subset A$, $\langle F : A \rangle = \langle F : B \rangle$* и *$A$ не раскладывается нетривиальным образом в свободное произведение $A = N * L$ так, что $N \supset B$ или $L \supset B$, то $A = B$.*

Доказательство. Вернемся опять к диаграмме (*). Очевидно, что μ — сюръективно, иначе A была бы разложима в такое свободное произведение, что B содержалась бы в каком-либо сомножителе. Так как μ — погружение и $\operatorname{card} S_A^{(0)} = \operatorname{card} S_B^{(0)}$, то μ — гомеоморфизм, а значит, $A = B$.

4. Покажем, что если A, $B \subset F$, где F — конечнопорожденная свободная группа, то $\langle F : A \cap B \rangle \leqslant \langle F : A \rangle \langle F : B \rangle$. Этот факт можно рассматривать как обобщение известной теоремы Хаусона [2]. Кроме того, мы уточним также один известный результат Бернса [1].

Итак, пусть $A, B \subset F$. Отождествим F с $\pi_1(T, o_T)$ (см. п. 2). Если $(S_A, o_A) \xrightarrow{\pi_A} (T, o_T)$, $(S_B, o_B) \xrightarrow{\pi_B} (T, o_T)$ — квазинакрытия, соответствующие подгруппам A и B, то определим R следующим образом: R — компонента связности пространства $M = \{(p, q) \in S_A \times S_B / \pi_A(p) = \pi_B(q)\}$, содержащая точку $o_R = (o_A, o_B)$. Зададим отображение $\pi_R : (R, o_R) \to (T, o_T)$ следующим образом:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & S_A \arrow[dr, "\pi_A"] & \\ (R, o_R) \arrow[r, "\mathrm{in}"] & M \arrow[ur, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"'] & & (T, o_T). \\ & & S_B \arrow[ur, "\pi_B"'] & \end{tikzcd}$$

R можно рассматривать как 1-мерный CW-комплекс, множество нульмерных вершин которого есть пересечение $R \cap (S_A^{(0)} \times S_B^{(0)})$, а ребра — «диагонали» некоторых 2-клеток из $S_A \times S_B$ (пространство $S_A \times S_B$ очевидным образом наделено клеточной структурой прямого произведения). В этом случае π_R является комбинаторным отображением.

Утверждение 11. *Тройка (R, o_R, π_R) содержит квазинакрытие над T, отвечающее подгруппе $A \cap B$.*

Доказательство. Рассмотрим коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd}
(R, o_R) \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, "i_B"'] \arrow[dr, dashed, "\pi_R"] & (S_A, o_A) \arrow[d, "\pi_A"] \\
(S_B, o_B) \arrow[r, "\pi_B"] & (T, o_T)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\pi_1(R, o_R) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, dashed, "(\pi_R)_*"] & \pi_1(S_A, o_A) \arrow[d, "(\pi_A)_*"] \\
\pi_1(S_B, o_B) \arrow[r, "(\pi_B)_*"] & F
\end{tikzcd}$$

Очевидно, что $\operatorname{im}(\pi_R)_* \subset A \cap B$. Далее, пусть $c \in A \cap B$ и $\lambda : (S^1, o) \to (T, o_T)$ — комбинаторная петля, реализующая элемент c. Кроме того, λ является погружением в каждой точке, за исключением, возможно, точки o. В этом случае существуют поднятия

$$\lambda_A : (S^1, o) \to (S_A, o_A), \quad \lambda_B : (S^1, o) \to (S_B, o_B).$$

Пусть v_1 — первая вершина S^1, т. е. точка, отображающаяся в некоторую вершину S_A и S_B, тогда ребро $[0, v_1]$ поднимается в R, причем точка o переходит в o_R. Далее, находим следующую вершину v_2 такую, что $\lambda_A(v_2) \in S_A^{(0)}$, $\lambda_B(v_2) \in S_B^{(0)}$ и т. д. Действуя таким образом, мы найдем некоторое поднятие $\lambda_R : (S^1, o) \to (R, o_R)$, откуда и будет следовать, что $(\pi_R)_*[\lambda] = c$, а значит, $\operatorname{im}(\pi_R)_* = A \cap B$.

Утверждение 12. *Если A, B — подгруппы конечнопорожденной подгруппы F, то*

$$\langle F : A \cap B \rangle \leqslant \langle F : A \rangle \langle F : B \rangle.$$

Доказательство. Пусть $(R, o_R) \xrightarrow{\pi_R} (T, o_T)$ — отображение из предыдущего утверждения. Тогда из утверждения 6 следует, что $\langle F : A \cap B \rangle \leqslant \operatorname{card} R^{(0)}$, но из построения R следует

$$\operatorname{card} R^{(0)} \leqslant \operatorname{card} M^{(0)} \leqslant \operatorname{card} S_A^{(0)} \times \operatorname{card} S_B^{(0)} = \langle F : A \rangle \langle F : B \rangle.$$

В качестве следствия приведем известный результат Хаусона [2].

Утверждение 13. *Если $A, B \subset F$ — подгруппы конечного ранга, то $A \cap B$ также имеет конечный ранг.*

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать, что F конечнопорождена, тогда из утверждения 8 следует, что $\langle F : A \rangle$ и $\langle F : B \rangle$ конечны, а значит, и $\langle F : A \cap B \rangle$ также конечен и, следовательно, $A \cap B$ имеет конечный ранг.

В заключение приведем одно уточнение теоремы Бернса [1].

Утверждение 14. *Пусть $A \subset F$, если A и F конечного ранга, то A является свободным множителем некоторой подгруппы $G \subset F$ конечного индекса, причем $|F : G| = \langle F : A \rangle$.*

Доказательство. Отождествим F с $\pi_1(T, o_T)$, где T — букет окружностей. Пусть (S_A, o_A, π_A) — квазинакрытие Как показано в [3], S_A можно превратить в некоторое накрытие $\widetilde{T}$ над T такое, что $\widetilde{T}^{(0)} = S_A^{(0)}$ Ясно, что $\pi_1(S_A, o_A)$ есть свободный множитель $\pi_1(\widetilde{T}, o_A)$. Пусть $p : (\widetilde{T}, o_A) \to (T, o_T)$ — проекция, положим $G = \operatorname{im} p_*$. Ясно, что $|F : G| = \operatorname{card} \widetilde{T}^{(0)} = \operatorname{card} S_A^{(0)} = \langle F : A \rangle$.

1. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп.— М. : Мир, 1980.— 421 с.
2. *Howson A. O.* On intersection of finitely generated free groups // J. London Math. Soc.— 1954.— 29.— P. 428—434.
3. *Gersten S. M.* Branched coverings of 2-complexes // Trans. Amer. Math. Soc.— 1984.— **303**, N 2.— P. 689—706.

Получено 26.04.91