УДК 512.546

Ю. Н. МУХИН, д-р физ.-мат. наук
(Ин-т математики и механики УрО АН СССР, Свердловск),
Е. Н. ЯКОВЕНКО, канд. физ.-мат. наук (Омск. пед. ин-т)

О топологических группах с коалгебраической решеткой замкнутых подгрупп

Изучаются локально компактные группы с коалгебраической решеткой замкнутых подгрупп, описаны абелевы и нульмерные нильпотентные группы с коалгебраической решеткой замкнутых подгрупп.

Вивчаються локально компактні групи з коалгебраїчною решіткою замкнених підгруп, описані абелеві та нульвимірні нільпотентні групи з коалгебраїчною решіткою замкнених підгруп.

Условие обрыва убывающих цепей подгрупп (условие минимальности, Min) является, как отмечено в [1], важнейшим среди «условий конечности», относящихся к решетке подгрупп. Фундаментальные результаты о Min-группах принадлежат С. Н. Черникову и его школе [2]. Усилиями В. М. Глушкова [3], В. С. Чарина [4] и В. П. Платонова [5] идея изучения условия минимальности для различных семейств замкнутых подгрупп плодотворно внедрилась в теорию топологических групп.

Как известно, решетка всех подалгебр любой универсальной алгебры алгебраична. Для топологических алгебр алгебраичность решетки подалгебр становится довольно стеснительным ограничением, «условием дискретности» [6]. Двойственное условие — коалгебраичность решетки — уже в дискретном случае является интересным ограничением, обобщающим условие минимальности. Мы будем изучать строение локально компактной топологической группы G, решетка $L(G)$ всех замкнутых подгрупп которой коалгебраична. Построенный А. Ю. Ольшанским [7] пример бесконечной группы с решеткой длины 2 показывает необходимость наложения дополнительных ограничений, в качестве которых изберем компактность над связной компонентой, коммутативность, пронильпотентность. В первом случае изложение удается облегчить за счет привлечения результатов В. М. Глушкова [3] о топологических Min-группах, во втором — В. С. Чарина [8] о топологических группах конечного ранга, в третьем — В. М. Полецких [9], обобщившего введенное и изученное С. Н. Черниковым понятие слойной конечности на топологические группы. Используются также классические результаты С. Н. Черникова о полных нильпотентных группах.

Обозначения и терминологию, относящиеся к топологическим группам, можно найти в [10, 11]. Через $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}_n$ и C_{p^∞} обозначены дискретные бесконечная циклическая, конечная циклическая и квазициклическая группы, через $\mathbf{Q}_p$ и $\mathbb{Z}_p$ — группы всех (всех целых) p-адических чисел.

Семейство $M=\{A_i \mid i\in I\}$ элементов полной решетки называется ∇-базисом ($\cap$-базисом), если каждый элемент X из L есть верхняя грань элементов из $M: X=\nabla A_j,\ j\in J\subset I$ (соответственно нижняя грань элементов из $M: X=\cap A_j,\ j\in J\subset I$). Элемент F решетки L называется **финитарным** (**кофинитарным**), если из $F\leqslant\nabla X_\lambda$, $X_\lambda\in L$, следует, что для некоторого конечного набора $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ $F\leqslant\nabla_{k=1}^n X_{\lambda_k}$ (соответственно из $F\geqslant\cap X_\lambda$, $X_\lambda\in L$, следует $F\geqslant\bigcap_{k=1}^n X_{\lambda_k}$). Это равносильно тому, что $F\leqslant\nabla X_\lambda$ для направленного по возрастанию семейства X_λ влечет $F\leqslant X_{\lambda_0}$ для подходящего λ_0 (соответственно $F\geqslant\cap X_\lambda$ для направленного по убыванию семейства X_λ влечет $F\geqslant X_{\lambda_0}$). Решетка L называется **алгебраической** (**коалгебраической**), если она обладает **финитарным базисом**, т. е. ∇-базисом, состоящим из финитарных элементов (соответственно, **кофинитарным базисом**, т. е. $\cap$-базисом, состоящим из кофинитарных элементов).

Нильпотентные локально компактные группы G с алгебраической $L(G)$ (под названием КП-групп) изучены в [6]. Шайдерер [12] начал изучать коалгебраичность $L(G)$ и заметил, что $L(G)$ коалгебраична, если G компактна. Отметим ряд свойств кофинитарных элементов и коалгебраических решеток.

1°. Нижняя грань конечного набора кофинитарных элементов есть кофинитарный элемент.

2°. Пусть L — кардинальное произведение полных решеток L_i с наибольшими элементами G_i. Если F_i кофинитарен в L_i, то $F_i\nabla(\nabla_{j\neq i}G_j)$ кофинитарен в L. Если все L_i коалгебраичны, то и L коалгебраична.

3°. Если F кофинитарен в $L(G)$, $H\leqslant G$, $N\lhd G$, $N\leqslant F$, то $F\cap H$ кофинитарен в $L(H)$, F/N кофинитарен в $L(G/N)$.

Отсюда вытекает такое свойство.

4°. Коалгебраичность решетки группы G наследуется ее замкнутыми подгруппами и фактор-группами по замкнутым нормальным подгруппам.

Пример 1. Если G — Min-группа, то любой элемент X из $L(G)$ кофинитарен. Всякая Min-группа коалгебраична.

В самом деле, если $X\geqslant\cap Y_i$, где $\{Y_i \mid i\in I\}$ — направленное по убыванию семейство замкнутых подгрупп, то ввиду условия Min, X содержит некую Y_i, т. е. X — кофинитарный элемент.

5°. Пусть N — замкнутая нормальная подгруппа в G. Если $L(G/N)$ — цепь с условием минимальности, то N входит в любой $\cap$-базис $L(G)$.

Действительно, пусть $\{A_i \mid i \in I\}$ — $\cap$-базис решетки $L(G)$, $N = \cap A_j$, $j \in J \subset I$. Так как все подгруппы A_j содержат N, они образуют цепь. Ввиду условия минимальности $N = \cap A_j$ равно некоторой A_{j_0}.

Пример 2. Решетка $L(\mathbb{Z})$ не является коалгебраической.

В самом деле, допустим, что $L(\mathbb{Z})$ обладает кофинитарным $\cap$-базисом. Так как согласно 5° подгруппа $3\mathbb{Z}$ входит в любой $\cap$-базис, она должна быть кофинитарным элементом в $L(\mathbb{Z})$. Но $3\mathbb{Z} > 0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} 2^k\mathbb{Z}$, поэтому ввиду кофинитарности $3\mathbb{Z}$ содержит некую $2^k\mathbb{Z}$, что невозможно.

Отсюда и из свойства 4° вытекает следующее свойство.

6°. Всякая группа G с коалгебраической $L(G)$ компактно покрываема.

7°. Если F — кофинитарный элемент решетки $L(G)$ нульмерной группы G, то F — открытая подгруппа в G.

Действительно, в нульмерной группе пересечение всех открытых подгрупп равно e. Поэтому любой кофинитарный элемент F содержит пересечение конечного набора открытых подгрупп. Следовательно, F — открытая подгруппа.

Лемма 1. *Пусть G — проективный предел групп, в которых все замкнутые подгруппы кофинитарны. Тогда $L(G)$ коалгебраична.*

Доказательство. Пусть $G = \operatorname{limpr} G/N_\lambda$, где N_λ — компактные нормальные подгруппы, $\lambda \in \Lambda$, причем для любого λ все элементы решетки $L(G/N_\lambda)$ кофинитарны. Так как любую замкнутую подгруппу X из G можно представить в виде $X = \cap\ XN_\lambda$, семейство замкнутых подгрупп H, каждая из которых содержит некую N_λ, является $\cap$-базисом. Проверим кофинитарность этого базиса.

Возьмем замкнутую подгруппу H, содержащую некую $N_\lambda = N$. Пусть $H \geqslant \cap Y_i$, где $\{Y_i \mid i \in I\}$ — направленное по убыванию семейство замкнутых подгрупп. Тогда $H/N \geqslant (\cap\ Y_i)\ N/N$. Покажем, что $(\cap Y_i)\ N/N = \cap\ (Y_i N/N)$. Возьмем произвольный элемент $yN \in \cap\ (Y_i N/N)$. Так как для любого i $yN \in Y_i N/N$, то существует $y_i \in Y_i$, такой, что $yN = y_i N$. Это означает, что $Y_i\ \cap\ yN \neq \varnothing$ для любого i. Из направленности семейства $\{Y_i \mid i \in I\}$ следует, что $\{Y_i \cap yN \mid\ i \in I\}$ — центрированное семейство замкнутых подмножеств, которое ввиду компактности yN имеет непустое пересечение, т. е. $(\cap Y_i) \cap yN$ содержит некоторый элемент y_0. Но тогда $yN = y_0 N \in (\cap Y_i)\ N/N$. Включение $\cap (Y_i N/N) \leqslant (\cap Y_i)\ N/N$ доказано, а обратное включение очевидно.

В группе G/N имеем направленное по убыванию семейство замкнутых подгрупп $\{Y_i N/N \mid i \in I\}$. По условию H/N — кофинитарный элемент в G/N. Поэтому из $H/N \geqslant \cap (Y_i N/N)$ следует $H/N \geqslant Y_{i_0} N/N$ для некоторого $i_0 \in I$. Тогда $H \geqslant Y_{i_0}$, что доказывает кофинитарность H.

Отсюда и из примера 1 вытекает такое следствие.

Следствие. *Если G — проективный предел* Min-*групп, то $L(G)$ коалгебраична.*

Теорема 1. *Пусть группа G компактна над своей связной компонентой G_0. Тогда коалгебраичность $L(G)$ равносильна компактности G.*

Доказательство. Если $L(G)$ коалгебраична, то G компактно покрываема ввиду 6°, поэтому G_0 компактна, а с нею и G.

Обратно, пусть G — компактная группа, т. е. проективный предел компактных групп Ли G/N_λ, $\lambda \in \Lambda$. По теореме 2 из [3] все G/N_λ — Min-группы. Тогда по следствию из леммы 1 G коалгебраична.

Теорема 2. а). *Нульмерная абелева группа G тогда и только тогда имеет коалгебраическую решетку $L(G)$, когда G периодична, и каждая ее силовская p-подгруппа компактна над прямым произведением конечного набора групп типа $\mathbb{C}_{p^\infty}$ и $\mathbf{Q}_p$.*

б). *Ненульмерная абелева группа G тогда и только тогда имеет коалгебраическую решетку $L(G)$, когда G обладает рядом замкнутых подгрупп $e \leqslant G_0 \leqslant G_1 \leqslant G$, где G_0 — связная компактная группа, G_1/G_0 — прямое произведение конечного набора групп типа $\mathbb{C}_{p^\infty}$ и $\mathbf{Q}_p$, а G/G_1 — нульмерная компактная группа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\widehat{G}$ группу характеров абелевой группы G. Из двойственности решеток $L(G)$ и $L(\widehat{G})$ вытекает, что $L(G)$ коалгебраична тогда и только тогда, когда $L(\widehat{G})$ алгебраична.

а). Если G нульмерна, и $L(G)$ коалгебраична, то $\widehat{G}$ — компактно покрываемая группа с алгебраической решеткой $L(\widehat{G})$. Согласно результатам [6] $\widehat{G}$ нульмерна, а каждая ее силовская p-подгруппа $(\widehat{G})_p$ удовлетворяет условию индуктивности и потому является расширением дискретной подгруппы B_p посредством группы конечного ранга. Применяя теорию двойственности Л. С. Понтрягина и теорему о строении абелевых групп конечного ранга [8], получаем, что аннулятор $(B_p)^{\perp}$ подгруппы B_p в группе G_p есть группа конечного ранга, т. е. прямое произведение конечного набора групп типа $\mathbb{C}_{p^n}$, $\mathbb{C}_{p^\infty}$, $\mathbb{Z}_p$, $\mathbf{Q}_p$, а фактор-группа $G_p/(B_p)^{\perp}$ компактна. Отсюда следует, что G_p обладает замкнутой подгруппой $D_p \leqslant (B_p)^{\perp}$ такой, что D_p — прямое произведение конечного набора групп типа $\mathbb{C}_{p^\infty}$ и $\mathbf{Q}_p$, а G_p/D_p компактна.

Обратно, если G имеет указанное в а) строение, а U_p — произвольная открытая компактная подгруппа из G_p, то ясно, что G_p/U_p — дискретная черниковская группа. Лемма 1 с учетом примера 1 показывает, что $L(G_p)$ коалгебраична. Согласно [13] $L(G)$ — кардинальное произведение решеток $L(G_p)$, так что $L(G)$ коалгебраична по 2°.

б). Если G ненульмерна и $L(G)$ коалгебраична, то группа $\widehat{G}$ не является компактно покрываемой, и $L(\widehat{G})$ алгебраична. По теореме 3 из [6] $\widehat{G}$ нульмерна, содержит дискретную подгруппу D и открытую подгруппу $K \geqslant D$ такую, что K/D — прямое произведение конечного набора групп ранга 1, а $\widehat{G}/K$ без кручения. Применяя теорию двойственности, получаем, что группа G обладает рядом $e < G_0 \leqslant D^{\perp} \leqslant G$, где G_0 — связная компактная группа, $D^{\perp}/G_0$ — прямое произведение конечного набора групп ранга 1, $G/D^{\perp}$ — нульмерная компактная группа. Отсюда следует, что группа G обладает замкнутой подгруппой $G_1 \geqslant G_0$ такой, что G_1/G_0 — прямое произведение конечного набора групп типа $\mathbb{C}_{p^\infty}$ и $\mathbf{Q}_p$, а G/G_1 — нульмерная компактная группа. Обратно, если G имеет указанное в б) строение, то ее произвольная лиева фактор-группа G/N будет расширением конечномерного тора посредством дискретной черниковской группы. Ввиду [3] G/N — Min-группа, и осталось применить лемму 1 с учетом примера 1.

Л е м м а 2. *Пронильпотентная p-группа G с коалгебраической решеткой $L(G)$ слойно компактна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. G есть расширение компактной группы посредством нильпотентной, поэтому ввиду леммы 3 из [9] можно считать, что G нильпотентна, и провести индукцию по ступени нильпотентности группы G; для абелевых групп утверждение леммы вытекает из теоремы 2а) и результатов [9].

Пусть G нильпотентна ступени n. Тогда $H = \overline{G^{(n-1)}}$ содержится в $Z(G)$ и обладает полной замкнутой подгруппой D с компактной H/D, причем D слойно компактна [9]. Фактор-группа G/H слойно компактна по предположению индукции. Применяя леммы 3 и 5 из [9], получаем, что G слойно компактна.

П р и м е р 3. Пусть $G = ABC$, где A, B, C — p-группы ранга 1, $e \neq G' \leqslant C \leqslant Z(G)$. Если A полна, B без кручения и $C \nleqslant A$, то $L(G)$ не коалгебраична. В самом деле, поскольку кофинитарные элементы в $L(G)$ открыты в G, достаточно убедиться в том, что A не равна пересечению открытых подгрупп. Взяв открытую подгруппу $U \geqslant A$, будем иметь $U = ABC \cap U = AV$, где $V = BC \cap U \lhd U$, так как $BC \lhd G$. Поскольку $A \nleqslant Z(G)$, иначе G абелева, имеем $[a, b] = c \neq e$ для подходящих $a \in A$, $b \in B$. Пользуясь полнотой A и формулой $[x^n, y] = [x, y]^n = [x, y^n]$, можно выбрать a так, чтобы $b \in V \cap B$ ($V \cap B \neq e$, ибо B — либо $\mathbb{Z}_p$, либо $\mathbf{Q}_p$). Но тогда $c \in [a, V] \leqslant V$ ввиду $V \lhd U$. Для любого n найдется $x \in A$ такой, что $x^{p^n} = a$. Значит, $[x, b]^{p^n} = c \in V$. Однако $[x, b]$ — корень степени p^n из c в C, причем $[x, b] \in V$ ввиду $V \lhd U$. Стало быть, $C \leqslant V$. Итак, $U \geqslant AC$, что ввиду $C \nleqslant A$ и дает нужное противоречие.

Легко видеть, что конструктивный пример группы рассмотренного вида доставляет группа унитреугольных 3×3-матриц над полем $\mathbf{Q}_p$.

Лемма 3. *В нильпотентной p-группе G с коалгебраической решеткой $L(G)$ наибольшая полная (в смысле извлечения корней) подгруппа D замкнута, абелева, обладает конечным G-центральным рядом с секциями типа $\mathbb{C}_{p^\infty}$ и $\mathbf{Q}_p$, а G/D компактна.*

Доказательство. В силу леммы 2 применима теорема 1 из [9], содержащая все утверждения леммы 3, кроме коммутативности D. Поэтому далее считаем $D = G$. По теореме 2 из [8] G тогда имеет конечный ранг. Согласно результатам С. Н. Черникова о полных гиперцентральных группах [1, 2], подгруппа Ω всех элементов конечных порядков из G полна и содержится в центре G. Из строения абелевых p-групп конечного ранга [8] следует, что Ω дискретна (а потому замкнута) и изоморфна прямому произведению конечного набора квазициклических групп. Так как группа $\widetilde{G} = G/D$ без кручения, ее гиперцентры изолированы [1, с. 412], секции же гиперцентрального ряда будут вида $(\mathbf{Q}_p)$. Допустив, что $\widetilde{G}$ неабелева, найдем в ее втором гиперцентре такую подгруппу $\widetilde{Y}$, что $\widetilde{Y}/\widetilde{Z} \simeq \mathbf{Q}_p$, где $\widetilde{Z} = Z(\widetilde{G})$. Найдется и элемент $\widetilde{a}$ с $[\widetilde{a}, \widetilde{Y}] \neq e$. Как известно, $\widetilde{G}$ отождествляется с ее p-адической алгеброй Ли, так что через $\widetilde{a}$ проходит однопараметрическая подгруппа $\widetilde{A}$. Ясно, что $\widetilde{Y}$ абелева, будучи центральным расширением посредством группы ранга 1, поэтому $\widetilde{A} \nleqslant \widetilde{Y}$. В силу полноты $\widetilde{Y}$ изолирована, поэтому $\widetilde{A}\widetilde{Y} = \widetilde{A} \leftthreetimes \widetilde{Y}$. В свою очередь, $\widetilde{Y} = \widetilde{B} \times \widetilde{Z}$, $\widetilde{B} \simeq \mathbf{Q}_p \simeq \widetilde{A}$. Взяв $\widetilde{b} \in \widetilde{B}$ так, чтобы $\widetilde{c} = [\widetilde{a}, \widetilde{b}] \neq e$, проведем через $\widetilde{c}$ подгруппу $\widetilde{C} \simeq \mathbf{Q}_p$ и расщепим $\widetilde{Z} = \widetilde{C} \times \widetilde{E}$. По модулю $\widetilde{E}$ возникает группа примера 3, что противоречит коалгебраичности $L(G)$.

Итак, $\widetilde{G}$ абелева; если G неабелева, то она содержит неабелеву подгруппу H с $\widetilde{H} \simeq (\mathbf{Q}_p)^2$, $\widetilde{H} = \widetilde{A} \times \widetilde{B}$. Взяв $c \in \widetilde{H} \leqslant \Omega$ и погрузив его в $C \simeq \mathbb{C}_{p^\infty}$, можем найти дополнение E к C в Ω и пренебречь им, считая $\Omega = C$. Полные прообразы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ абелевы, а потому равны $A \times C$ и $B \times C$, где $A \simeq \mathbf{Q}_p \simeq B$, и мы имеем группу $H = ABC$ из примера 3 — снова противоречие.

Теорема 3. *Для пронильпотентной p-группы G следующие утверждения равносильны*: а) $L(G)$ *коалгебраична*; б) G *имеет нормальный ряд $e \leqslant L \leqslant D \leqslant G$, где L и G/D компактны, G/L нильпотентна, D/L — полная абелева группа конечного ранга, $G/Z_G(D/L)$ конечна*; в) G *есть проективный предел дискретных черниковских групп.*

Доказательству предпошлем следующее замечание.

Замечание. Если $G = \operatorname{limpr} G_\lambda$, причем каждая G_λ — проективный предел Min-групп, то легко проверить, что такова и G.

Централ L с достаточно большим номером в пронильпотентной группе компактен. С учетом замечания можно перейти к G/L и считать далее G нильпотентной. Согласно теореме 1 из [9] и лемме 3 G обладает рядом $e = D_1 < D_2 < \ldots < D_s = D \leqslant G$, где D_{i+1}/D_i — G-центральная секция типа $\mathbb{C}_{p^\infty}$ или $\mathbf{Q}_p$, D абелева, G/D компактна. При $D = e$ теорема 3 сводится к теореме 1, поэтому считаем $D \neq e$. Найдя для G/D компактный прообраз в G, породим им замкнутую подгруппу K. Ввиду обобщенной леммы Шмидта G индуктивно компактна, так что K компактна [11, с. 86] и $G = KD$, $Z_G(D) = ED$, $E = Z_K(D) \geqslant K \cap D$.

Элемент бесконечного порядка из K/E порождает $\mathbb{Z}_p$-подгруппу, которая, согласно [11, с. 75], есть образ $\mathbb{Z}_p$-подгруппы $B = \langle \overline{b} \rangle$ из K, так что $B \cap E = e$. В подгруппе $B \leftthreetimes D$ попытаемся выделить секцию описанного в примере 3 типа. Поскольку $[B, D] \neq e$, найдется $a \in D$, для которого $c = [a, b] \neq e$, $c \in D_{i+1} \setminus D_i$, $i < s - 1$. Пренебрегая D_i и полагая $D_{i+1} = C$, считаем $(BD)' \leqslant C \leqslant Z(BD)$.

Рассмотрим элемент $\tilde{a} = aC$ полной абелевой группы D/C. Если $\tilde{a}$ — конечного порядка, то очевидно, что он лежит в подгруппе $\tilde{A}$ типа $\mathbb{C}_{p^\infty}$. Если же $\tilde{a}$ бесконечного порядка, то в группе D/C можно построить возрастающую цепь замкнутых подгрупп, топологически изоморфных $\mathbb{Z}_p$. Пользуясь нульмерностью G и свойствами целых p-адических чисел, можно показать, что объединение этой цепи есть замкнутая подгруппа $\tilde{A} \simeq \mathbf{Q}_p$. Легко видеть, что и в том, и в другом случае полный проообраз подгруппы $\tilde{A}$ равен $A \times C$, где A полна, так что ABC — нужная секция. Итак, K/E абстрактно периодична.

Секции центрального ряда в K/E, будучи компактными периодическими абелевыми группами, имеют конечные периоды. Поэтому и K/E конечного периода. Она индуцирует на D группу автоморфизмов, представимых матрицами над полем p-адических чисел. По критерию Бернсайда матричная группа конечного периода конечна, так что K/E конечна и, следовательно, $|G : Z_G(D)| < \infty$.

Представив K в виде проективного предела конечных групп K/K_λ, замечаем, что $E_\lambda = K_\lambda \cap E \lhd G$ и G/E_λ — дискретная черниковская группа, причем ясно, что $G = \operatorname{limpr} G/E_\lambda$.

Достаточность условия в) для коалгебраичности $L(G)$ отмечена в следствии леммы 1.

Теорема 4. *Нульмерная пронильпотентная группа G тогда и только тогда имеет коалгебраическую $L(G)$, когда G компактно покрываема и каждая ее силовская p-подгруппа есть проективный предел дискретных черниковских групп.*

Доказательство. Если $L(G)$ коалгебраична, то утверждение теоремы вытекает из 6°, 4° и леммы 4.

Обратно, пусть G имеет указанное в теореме строение. Так как G разлагается в прямое произведение своих силовских p-подгрупп G_p с отмеченной открытой компактной подгруппой, $L(G)$ есть кардинальное произведение решеток $L(G_p)$ [13] (теорема 7). Согласно теореме 3 все $L(G_p)$ коалгебраичны. Тогда $L(G)$ коалгебраична ввиду 2°.

1. *Курош А. Г.* Теория групп.— М. : Наука, 1967.— 648 с.
2. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
3. *Глушков В. М.* Локально бикомпактные группы с условием минимальности для замкнутых подгрупп // Укр. мат. журн.— 1956.— 8, № 2.— С. 135—139.
4. *Чарин В. С.* О локально бикомпактных локально разрешимых группах, удовлетворяющих условию минимальности для замкнутых подгрупп // Сиб. мат. журн.— 1960.— 1, № 1.— С. 139—151.
5. *Платонов В. П.* О некоторых классах топологических групп // Там же.— 1966.— 7, № 5.— С. 1095—1105.
6. *Мухин Ю. Н., Старухина Е. Н.* О двух условиях дискретности в топологических группах // Изв. вузов. Математика.— 1978.— № 9.— С. 76—83.
7. *Ольшанский А. Ю.* Бесконечная группа с подгруппами простых порядков // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1980.— 44, № 2.— С. 309—321.
8. *Чарин В. С.* О группах конечного ранга. II // Укр. мат. журн.— 1966.— 18, № 3.— С. 85—96.
9. *Полецких В. М.* Слойно-компактные нильпотентные группы // Сиб. мат. журн.— 1975.— 16, № 4.— С. 801—809.
10. *Мухин Ю. Н.* Топологические группы // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия / ВИНИТИ.— 1982.— 20.— С. 3—69.
11. *Мухин Ю. Н.* Локально компактные группы.— Свердловск, 1981.— 92 с.
12. *Scheiderer C.* Algebraic subgroup lattices of topological groups // Algebra Univ.— 1986.— 22.— P. 235—243.
13. *Мухин Ю. Н.* Локально компактные группы с дистрибутивной структурой замкнутых подгрупп // Сиб. мат. журн.— 1967.— 8, № 2.— С. 366—375.

Получено 12.02.90