УДК 519.41/47

Д. И. ЗАЙЦЕВ, д-р физ.-мат. наук,
В. А. ОНИЩУК, асп. (Ин-т математики АН УССР, Киев)

О локально нильпотентных группах с централизатором, удовлетворяющим условию конечности

Изучаются локально нильпотентные группы, в которых централизатор некоторой конечнопорожденной подгруппы удовлетворяет некоторому условию конечности. Доказано, что если локально нильпотентная группа содержит такую конечнопорожденную подгруппу F, что $C_G(F)$ имеет конечный ранг, то центр группы G отличен от единицы.

Вивчаються локально нільпотентні групи, в яких централізатор деякої скінченнопорожденої підгрупи задовольняє деяку умову скінченності. Доведено, що якщо локально нільпотентна група містить таку скінченнопороджену підгрупу F, що $C_G(F)$ має скінченний ранг, то центр групи G відмінний від одиниці.

Одним из важнейших условий конечности в теории групп является условие конечности специального ранга группы, введенное А. И. Мальцевым [1] и состоящее в следующем. Группа G имеет конечный специальный ранг r, если r является наименьшим натуральным числом с тем свойством, что всякая конечнопорожденная подгруппа группы G может быть порождена не более чем r элементами. Если такого натурального числа не существует, то специальный ранг группы считается бесконечным. Специальный ранг группы G обозначается ниже через $r(G)$ и называется просто рангом группы.

Напомним также определения черниковской и минимаксной групп. Группа G называется черниковской, если она является конечным расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп. Черниковские группы можно определить как конечные расширения абелевых групп, удовлетворяющих условию минимальности [2]. Группа G называется минимаксной, если она обладает конечным субнормальным рядом с факторами, удовлетворяющими условию минимальности или максимальности для подгрупп [3].

В настоящей статье рассматриваются локально нильпотентные группы, в которых централизатор некоторой конечнопорожденной подгруппы удовлетворяет подходящему условию конечности. Основные результаты опубликованы без доказательств в работе [4].

Пусть S обозначает один из следующих классов групп: класс конечнопорожденных групп, черниковских групп, минимаксных групп или групп конечного ранга.

Теорема 1. *Для того чтобы нильпотентная группа G принадлежала классу S, необходимо и достаточно, чтобы централизатор некоторой ее конечнопорожденной подгруппы также принадлежал классу S.*

Доказательство. Необходимость утверждения теоремы очевидна. Доказательство достаточности проводится индукцией по ступени нильпотентности группы G.

Пусть, например, S — класс групп конечного ранга, $F = \text{гр}\,(a_1, \ldots, a_n)$ — конечнопорожденная подгруппа нильпотентной группы G и централизатор $C_G(F)$ этой подгруппы в группе G принадлежит классу S. Так как для абелевых групп (нильпотентных групп ступени нильпотентности $c = 1$) теорема очевидна, то будем считать, что группа G неабелева.

Пусть Z — ее центр и c — ступень нильпотентности. Очевидно, $Z \subseteq C_G(F)$ и поэтому ранг центра конечен. Так как ступень нильпотентности фактор-группы G/Z равна $c - 1$, то согласно предположению индукции ранг этой фактор-группы конечен, если централизатор $D/Z = C_{G/Z}(FZ/Z)$ образа FZ/Z подгруппы F в фактор-группе G/Z имеет конечный ранг. Покажем, что последнее справедливо.

Действительно, легко видеть, что для фиксированного элемента $a \in F$ отображение

$$x \mapsto [x, a] = x^{-1}a^{-1}xa, \quad x \in D,$$

является гомоморфизмом группы D в группу Z. Для каждого элемента $a_i \in F$, $i = 1, 2, \ldots, n$, рассмотрим гомоморфизм $\varphi_i(x) = [x, a_i]$, $x \in D$. Очевидно, ядром гомоморфизма φ_i является централизатор $C_D(a_i)$ элемента a_i в группе D и ясно, что $\bigcap_{i=1}^{n} C_D(a_i) = C_D(F)$. По теореме о гомоморфизме фактор-группы $D/C_D(a_i)$ абелевы и имеют конечный ранг. Поэтому по теореме Ремака фактор-группа $D/C_D(F)$ также имеет конечный ранг. Так как $C_D(F) \subseteq C_G(F)$, то и подгруппа $C_D(F)$ имеет конечный ранг. Следовательно, подгруппа D, а значит, и фактор-группа D/Z будет группой конечного ранга.

Таким образом, фактор-группа G/Z является группой конечного ранга. Как отмечалось выше, ранг центра Z также конечен. Поэтому группа G имеет конечный ранг.

В случае, если S — класс конечнопорожденных групп, черниковских или минимаксных групп, доказательство теоремы проводится по такой же схеме. Теорема доказана.

Как показывает следующий пример, теорема 1 для локально нильпотентных групп не верна.

Пусть $A = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \ldots \times \langle a_n \rangle \times \ldots$ — бесконечная элементарная абелева p-группа и $B = \langle b \rangle$ — бесконечная циклическая группа. Определим полупрямое произведение $G = A \leftthreetimes B$ следующим образом: $a_1^b = a_1$, $a_n^b = a_{n-1}a_n$ при $n \geqslant 2$. Тогда G — локально нильпотентная группа бесконечного ранга, в то время как ее централизатор $C_G(B) = \langle a_1 \rangle \times \langle b \rangle$ имеет конечный ранг. Заметим, что группа G имеет нетривиальный центр $Z(G) = \langle a_1 \rangle$. Оказывается, этот факт справедлив и в общем случае.

Теорема 2. *Пусть $G \neq 1$ — локально нильпотентная группа и F — некоторая ее конечнопорожденная подгруппа. Если централизатор $C_G(F)$ имеет конечный ранг, то центр группы G отличен от единицы.*

Доказательство. 1. Рассмотрим сначала случай когда G — локально нильпотентная группа с периодической частью $T = t(G)$, отличной от единицы. Известно [2], что всякая локально нильпотентная периодическая группа является прямым произведением силовских p_i-подгрупп. Следовательно, $T = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_i \times \ldots$, где S_i — силовские p_i-подгруппы, p_i — простые числа. Так как периодическая часть $T \neq 1$, то хотя бы одна из силовских p_i-подгрупп (например, S_1) отлична от единицы.

Пусть $\{G_\alpha, \alpha \in I\}$ — локальная система конечнопорожденных подгрупп группы G, содержащих подгруппу, порожденную подгруппой F и неединичным элементом $x \in S_1$. Положим $P_\alpha = S_1 \cap G_\alpha$ и возьмем элемент x_α порядка p из пересечения $P_\alpha \cap Z(G_\alpha)$. Рассмотрим подгруппу $H = \text{гр}(x_\alpha, \alpha \in I)$. Так как подгруппа H принадлежит централизатору $C_{S_1}(F)$, то подгруппа H конечного ранга. Поскольку $H \leqslant S_1$, то H — p-группа. Таким образом, подгруппа H черниковская.

Пусть R — полная часть подгруппы H. Так как индекс $|H:R|$ конечен и $R \leqslant R(x_\alpha) \leqslant H$, то множество индексов I можно разбить на конечное число подмножеств $I = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n$ по принципу $\alpha, \beta \in I_k$ тогда и только тогда, когда $R(x_\alpha) = R(x_\beta)$. Используя определение локальной системы подгупп группы G [5, с. 350], легко доказать следующее утверждение: если $A = \{G_\alpha, \alpha \in I\}$ — некоторая локальная система подгрупп группы G и $I = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n$ — некоторое разбиение множества индексов I на конечнсе число подмножеств I_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, то хотя бы одному подмножеству I_k соответствует множество подгрупп $\{G_\beta, \beta \in I_k\}$, которое также будет локальной системой подгрупп группы G.

В соответствии с этим утверждением получаем, что хотя бы одному из подмножеств индексов I_k (например, I_1) соответствует множество подгрупп $\{G_\alpha, \alpha \in I_1\}$, которое будет локальной системой. Далее, зафиксируем индекс $\alpha \in I_1$ и рассмотрим подмножество индексов $K_1 \subseteq I_1$ таких, что $G_\alpha \leqslant G_\beta$, $\beta \in K_1$. Заметим, что подмножеству K_1 соответствует множество подгрупп $\{G_\beta, \beta \in K_1\}$, которое также будет локальной системой подгрупп группы G. Поскольку $R(x_\alpha) = R(x_\beta)$, то $x_\beta = r_\beta x_\alpha$, где $r_\beta \in R$, $\beta \in K_1$. В силу перестановочности элементов x_α, x_β имеем $[x_\alpha, r_\beta] = 1$ и, значит, элемент r_β принадлежит центру $Z(R(x_\alpha))$ группы $R(x_\alpha)$. Обозначим $R_1 = \text{гр}(r_\beta, \beta \in K_1)$ и рассмотрим группу $R_1 \times (x_\alpha)$. Легко видеть, что группа $R_1 \times (x_\alpha)$ элементарная абелева, черниковская и, следовательно, конечна.

Далее множество индексов K_1 разобьем на конечное число подмножеств $K_1 = J_1 \cup \ldots \cup J_n$ по принципу $\gamma, \delta \in J_s$ тогда и только тогда, когда $x_\gamma = x_\delta$. В соответствии с указанным выше утверждением получаем, что хотя бы одному из подмножеств индексов J_r (например, J_1) соответствует множество подгрупп $\{G_\delta, \delta \in J_1\}$, которое будет локальной системой подгрупп группы G. Общее значение совпадающих членов обозначим через y, $y = x_\gamma = x_\delta = \ldots$. Тогда $y \in Z(G_\delta)$ для всех $\delta \in J_1$ и, следовательно, $y \in Z(G)$. Таким образом, в случае локально нильпотентной группы с нетривиальной периодической частью теорема доказана.

2. Рассмотрим теперь случай, когда G — локально нильпотентная группа без кручения. Обозначим через A систему всех конечнопорожденных подгрупп из G, содержащих F, $A = A(I)$, I — ее множество индексов. Если $J \subseteq I$, то $A(J)$ обозначает подсистему из A, состоящую из подгрупп $G_\alpha \in A$ таких, что $\alpha \in J$.

Пусть $A_0 = A(I_0)$ — произвольная локальная подсистема подгрупп из A. Обозначим $Z(G_\alpha) = Z_\alpha$. Если $G_{\beta_1} < G_{\beta_2} < \ldots < G_{\beta_n}$ — любая конечная цепь, $\beta_i \in I_0$, то произведение $Z_{\beta_1} Z_{\beta_2} \ldots Z_{\beta_n}$ — абелева подгруппа, входящая в $C_G(F)$, поэтому ее ранг ограничен числом $r(C_G(F))$ и можно выбрать эту цепь так, чтобы ранг $r(Z_{\beta_1} \ldots Z_{\beta_n})$ был наибольшим из возможных. Тогда, если $\beta \in I_0$ и $G_{\beta_n} \leqslant G_\beta$, то $Z_{\beta_1} \ldots Z_{\beta_n} Z_\beta / Z_{\beta_1} \ldots Z_{\beta_n} \simeq Z_\beta / Z_\beta \cap Z_{\beta_1} \ldots Z_{\beta_n}$ — периодическая группа. Замечаем, что $Z_\beta \cap Z_{\beta_1} \ldots Z_{\beta_n} \leqslant Z_\beta \cap G_{\beta_n} \leqslant Z_\beta \cap Z_{\beta_n}$. Следовательно, $Z_\beta / Z_\beta \cap Z_{\beta_n}$ — периодическая группа для всех β с $G_{\beta_n} \leqslant G_\beta$. Так как ранги $r(Z_\beta \cap Z_{\beta_n})$ ограничены числом $r(C_G(F))$, то можно выбрать такую локальную подсистему $A_1 = A(I_1)$ в A_0, чтобы $G_{\beta_n} \leqslant G_\beta$ для любого $G_\beta \in A_1$ и $r_1 = r(Z_\beta \cap Z_{\beta_n}) = r(Z_\gamma \cap Z_{\beta_n})$ при $\beta, \gamma \in I_1$.

Таким образом, для локальной системы $A_0 = A(I_0)$ нашли такой индекс $\alpha_0 \in I_0$ (именно, $\alpha_0 = \beta_n$) и такую локальную подсистему $A_1 = A(I_1)$, что $G_{\alpha_0} \leqslant G_\beta$ для любого $\beta \in I_1$ и $r_1 = r(Z_\beta) = r(Z_\beta \cap Z_{\alpha_0}) = \mathrm{const}$. Положим $r_0 = r(Z_{\alpha_0})$. Ясно, что $r_0 \geqslant r_1$.

Пусть теперь $A_0 = A$ — локальная система всех конечнопорожденных подгрупп из G, содержащих подгруппу F. Строим локальную подсистему A_1, у которой индекс α_0 и ранги r_0, r_1 выбраны так, как указано выше. Если $r_0 > r_1$, то в локальной системе A_1 выбираем локальную подсистему $A_2 = A(I_2)$, для которой находим индекс $\alpha_1 = \beta_n \in I_1$ и ранг $r_2 = r(Z_\beta \cap Z_{\alpha_1})$ такие, что $G_{\alpha_1} \leqslant G_\beta$ для любого $\beta \in I_2$. Если $r_1 > r_2$, то строим локальную подсистему $A_3 = A(I_3)$, и т. д. Придем на каком-то шаге к ситуации, когда $r_{m-1} = r_m$. Это означает, что для локальной системы A_{m-1} найден индекс α_{m-1} и локальная подсистема A_m такие, что $G_{\alpha_{m-1}} \leqslant G_\beta$ для любого $\beta \in I_m$ и ранг $r_m = r(Z_\beta) = r(Z_\beta \cap Z_{\alpha_{m-1}})$. Так как ранг $r_{m-1} = r(Z_{\alpha_{m-1}})$ и

$$Z_{\alpha_{m-1}}/Z_\beta \cap Z_{\alpha_{m-1}} \simeq Z_\beta Z_{\alpha_{m-1}}/Z_\beta,$$

то ввиду $r_{m-1} = r_m$ эта группа одновременно периодическая и без кручения. Значит, она тривиальна, т. е. $Z_{\alpha_{m-1}} \leqslant Z_\beta$ при всех $G_\beta \in A_m$, и отсюда следует, что $Z_{\alpha_{m-1}} \leqslant Z(G)$. Теорема доказана.

Пользуясь этим результатом и теоремой 1, получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Если локально нильпотентная группа G содержит такую конечнопорожденную подгруппу F, что $C_G(F)$ имеет конечный ранг, то $C_{G/Z}(F)$ также имеет конечный ранг.*

Доказательство. Пусть $H/Z = C_{G/Z}(F)$ имеет бесконечный ранг. В силу результатов работы [6] фактор-группа H/Z имеет абелеву подгруппу A/Z бесконечного ранга. Подгруппа AF нильпотентная и ее ранг бесконечен. Тогда по теореме 1 $C_{AF}(F)$ бесконечного ранга. Полученное противоречие доказывает теорему.

Из теорем 3 и 2 вытекает следующее предложение.

Следствие. *Если локально нильпотентная группа G содержит такую конечнопорожденную подгруппу F, что $C_G(F)$ имеет конечный ранг, то в G можно построить возрастающую цепь гиперцентров с натуральными номерами*

$$1 = Z_0 < Z_1 < Z_2 < \ldots Z_n < \ldots,$$

где $Z_n \neq Z_{n+1}$, если $Z_n \neq G$.

1. *Мальцев А. И.* О группах конечного ранга // Мат. сб.— 1948.—**22**, № 2.— С. 351—352.
2. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
3. *Зайцев Д. И.* К теории минимаксных групп // Укр. мат. журн.— 1971.— 23, № 5.— С. 652—660.
4. *Зайцев Д. И., Онищук В. А.* Локально нильпотентные группы с централизатором конечного ранга // VI симп. по теории колец, алгебр и модулей: Тез. сообщ.— Львов, 1990.— С. 55.
5. *Курош А. Г.* Теория групп.— М. : Наука, 1967.— 648 с.
6. *Мальцев А. И.* О некоторых классах бесконечных разрешимых групп // Мат. сб.— 1951.— **28**, № 3.— С. 567—588.

Получено 17.01.90