УДК 512.54

В. П. ШУНКОВ, д-р физ.-мат. наук (Краснояр. ун-т)

О примарных элементах в группах

Приведен ряд теорем общего характера, связанных с вопросом о наличии нетривиальных локально конечных нормальных делителей у группы G, обладающей элементом a простого порядка таким, что все подгруппы вида гр (a, a^g), $g \in G$, конечны.

Наведено ряд теорем загального характеру, зв'язаних з питанням про наявність нетривіальних локально скінченних нормальних дільників у групи G, яка містить елемент a простого порядку такий, що всі підгрупи вигляду гр (a, a^g), $g \in G$, скінченні.

В настоящей работе автор знакомит читателя с теоремами вложения для элементов простых порядков в группе — недавно им доказанными, излагает основные идеи доказательства этих теорем и приводит полное доказательство теорем 4, 5 о квазифробениусовых группах, играющих исключительно важную роль в обосновании доказательства теоремы 3.

В настоящей статье рассказывается об основной идее доказательства трех теорем вложения для элементов простых порядков в группе, недавно доказанных автором. Поясним более подробно, о каком вложении здесь идет речь.

Пусть G — группа, a — ее элемент простого порядка p. Чтобы определить место элемента a в группе G, необходимо ответить на вопрос: в какие подгруппы из G вкладывается элемент a и как он в них расположен?

Пытаясь ответить на этот вопрос, мы неизбежно столкнемся с необходимостью осознать следующую альтернативу: либо для некоторых $k, s \in a^G$ подгруппа гр (k, s) бесконечна, либо все подгруппы вида гр (t, m), $t, m \in a^G$, конечны. Если имеет место первая половина этой альтернативы, то в некоторых ситуациях можно получить далеко идущую информацию о группе G. Например, при $p = 2$ элемент a вкладывается в бесконечную подгруппу диэдра и, в частности, G является смешанной группой. Другой, более впечатляющий пример в этом направлении — это случай, когда G — периодическая группа, так как отсюда и из бесконечности гр (k, s) сразу же вытекает решение одной из проблем Бернсайда (Е. С. Голод [1, 2]). Оценивая важность только что полученной информации о группе G, когда подгруппа гр (k, s) бесконечна, автор все же предпочел идти по пути, предложенному второй половиной альтернативы, т. е. когда все подгруппы вида гр (t, m), $t, m \in a^G$, конечны. Это условие конечности является одним из определяющих в теоремах 1—3 настоящей статьи. Разумеется, сформулированный выше вопрос и раньше приходилось решать для различных классов групп, таких, например, как линейные группы, конечные группы, топологические группы и др. Но еще никогда ранее он не решался для такого общего случая и в столь конкретной форме, как это отражено в теоремах 1—3 данной работы.

Прежде чем сформулировать основные результаты, введем новый класс групп. Пусть G — группа с инволюциями, удовлетворяющая следующим условиям: 1) любые две инволюции из G порождают конечную подгруппу; 2) группа G обладает тривиальным локально конечным радикалом, т. е. наибольшей локально конечной нормальной подгруппой; 3) в группе G нормализатор любой локально конечной подгруппы, содержащей инволюции, обладает локально конечной периодической частью. Напомним, что под группой с периодической частью подразумевается группа, в которой все элементы конечных порядков порождают периодическую подгруппу. Далее, каждой инволюции i из G поставим в соответствие подгруппу V_i из G, определяемую следующим образом. Если силовские 2-подгруппы из G — группы диэдра 8-го порядка и инволюция i содержится в такой четверной подгруппе Клейна R_i, что $C_G(i) < N_G(R_i)$ и $C_G(i)$ обладает бесконечной периодической подгруппой, то полагаем $V_i = N_G(R_i)$. Во всех остальных случаях подразумевается $V_i = C_G(i)$. Группу G с инволюциями, удовлетворяющую условиям 1 — 3, назовем T-группой, если $C_G(i)$ бесконечен для любой инволюции i из G, множество $G\setminus V_i$ содержит элементы, строго вещественные относительно i, и для каждого такого элемента c существует в $C_G(i)$ элемент s_c такой, что подгруппа гр (c, c^{s_c}) бесконечна. В частности, T-группу G назовем T_0-группой, если для нее справедливы следующие дополнительные утверждения: а) силовские 2-подгруппы из G — циклические или обобщенные группы кватернионов; в) централизатор любой инволюции из G обладает конечной периодической частью.

Приведем пример T-группы. Пусть $A = \text{гр}(b, c)$, где $b^n = c^n = d$, n — нечетное число, A — группа без кручения и $A/(d)$ — группа Новикова-Адяна периода n [3]. Рассмотрим группу $B = A\wr(x) = (A \times A) \rtimes (x)$, где x — инволюция. Возьмем элемент $v = (d, d^{-1}) \in A \times A$. Очевидно, $v \in Z(A \times A)$ и $v^x = v^{-1}$. Группа $G = B/(v)$ содержит инволюции и, как нетрудно показать, является T-группой (даже T_0-группой). В частности, $G = B/(v)$ не обладает периодической частью и в ней любая максимальная периодическая подгруппа, содержащая инволюцию — конечная группа порядка $2n$.

Теорема 1. *Пусть G — группа с инволюциями, удовлетворяющая условиям:*

1) *любые две инволюции из G порождают конечную подгруппу;*

2) *нормализатор конечной нетривиальной подгруппы из G, содержащий инволюции, обладает черниковской периодической частью.*

Тогда либо в G все элементы конечных порядков порождают черниковскую подгруппу, либо G — T-группа.

Теорема 1 подводит итог исследованиям, которые проводились автором на протяжении ряда лет в классе групп с инволюциями [4—12]. Ее доказательство опирается на метод, разработанный в [12], при этом особого рассмотрения требует случай, когда в группе G все элементы конечных порядков являются 2-элементами. Этот случай исключается с помощью хорошо известного метода О. Ю. Шмидта [14] (точно так же, как, например, в доказательстве теоремы 2.3 из [13]). Далее, используются некоторые результаты из теории конечных групп, полученные до 1965 г. включительно. Эти результаты представляются автору более надежным фундаментом в доказательстве теоремы 1, так как почти все они, за исключением теоремы Фейта — Томпсона [15], передоказывались заново (см., например, [16, 17]). Их новые, значительно упрощенные доказательства полностью согласуются с традициями классической математики и благодаря этому доступны для понимания любому достаточно квалифицированному алгебраисту. Что касается теоремы Фейта — Томпсона [15], то до сих пор не найдено ее короткое доказательство, а то, которое есть, слишком нетрадиционно и доступно для понимания только небольшому числу специалистов.

Теорема 2. *Пусть G — группа, a — ее инволюция. Тогда справедливо, по крайней мере, одно из следующих утверждений:*

1) *для некоторого элемента $t \in G$ подгруппа* гр (a, a^t) — *бесконечная группа диэдра;*

2) *для некоторого элемента $t \in G$ пересечение $tC_G(a) \cap (a^G)^2$ бесконечно;*

3) гр (a^G) — *периодическая почти локально разрешимая подруппа.*

Доказательство этой теоремы вытекает из основного результата гл. 3 монографии [13] и теоремы Фейта — Томпсона [15].

Теорема 3. *Пусть G — группа, a — ее элемент простого порядка p, удовлетворяющие следующим условиям:*

1) гр (a, a^g), $g \in G$, *конечны и почти все разрешимы;*

2) *$C_G(a)$ обладает конечной периодической частью;*

3) *любая (a)-инвариантная элементарная абелева подгруппа из G конечна;*

4) *нормализатор любой нетривиальной локально конечной (a)-инвариантной подгруппы из G обладает почти локально разрешимой периодической частью.*

Тогда либо в G все элементы конечных порядков порождают периоди-

ческую почти нильпотентную подгруппу, либо G является T_0-группой и $p = 2$.

Как было показано выше, существует T_0-группа, в которой всякая максимальная периодическая подгруппа, содержащая инволюции, конечна. В частности, она удовлетворяет как условиям 1, 2 теоремы 1, так и условиям 1—4 теоремы 3.

Следствие. *Пусть G — группа, a — ее элемент простого порядка, удовлетворяющие следующим условиям:*

1) гр (a, a^g), $g \in G$, *конечны и почти все разрешимы;*

2) $C_G(a)$ *конечен;*

3) *любая* (a)*-инвариантная элементарная абелева подгруппа из* G *конечна;*

4) *нормализатор любой нетривиальной локально конечной* (a)*-инвариантной подгруппы из* G *обладает почти локально разрешимой периодической частью.*

Тогда G — периодическая почти нильпотентная группа.

В доказательстве теоремы 3 получил дальнейшее развитие метод, разработанный в гл. 3,6—8 из [13], а также в [18], и здесь важную роль играет понятие квазифробениусовой группы. Частный случай этого понятия впервые был рассмотрен в [19] (см. также [13]). Докажем теорему 4 (см. ниже) о таких группах, представляющую независимый интерес.

Определение. *Пусть B — локально конечная группа и $L(B)$ — ее нильпотентный радикал. Если подгруппа* гр $(L(B), C_G(x))$ *есть группа Фробениуса с ядром $L(B)$ и неинвариантным множителем $C_B(x)$, то B назовем квазифробениусовой группой (по модулю p).*

Лемма. *Пусть $V =$* гр (a, k), *где* $|a| = |k| = p$ — *простое число,— конечная разрешимая квазифробениусова группа и силовская 2-подгруппа из $C_V(a)$ отлична от обобщенной группы кватернионов. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

1) $V = F \rtimes (a)$ — *группа Фробениуса с ядром F и дополнением (a);*

2) $V = F \rtimes (S \rtimes (a))$, *где $FC_V(a)$ — группа Фробениуса с абелевым ядром F и дополнением $C_V(a)$, S — некоммутативная 2-подгруппа, $Z(S)$ — циклическая группа и $Z(S) = S \cap C_V(a)$, причем любая (a)-инвариантная абелева подгруппа из S принадлежит $Z(S)$.*

Доказательство. Утверждения 1, 2 фактически доказаны в леммах 4.27, 7.3 из [13] с точностью до утверждения

$$Z(S) \leqslant D = S \cap C_V(a).$$

Опираясь на это включение, докажем, что $Z(S) = D$. Так как $FC_V(a)$ — группа Фробениуса с ядром F и дополнением $C_V(a)$, то ввиду теорем 1.4, 1.22 из [13] и условий леммы $D = (t)$. Предположим, что $Z(S) \neq (t)$ и рассмотрим подгруппу $Q = N_S((t))$. Очевидно, Q — (a)-инвариантная подгруппа и если бы $t \notin Z(Q)$, то мы легко получили бы противоречие с доказанным выше равенством $(t) = D = S \cap C_V(a)$. Следовательно, $t \in Z(Q)$ и $Q \neq S$. Далее, $Z = Z(Q)$ — автоморфно допустимая подгруппа в Q и в S выполняется нормализаторное условие, а поэтому $N_S(Z) \neq Q$ и Z — (a)-инвариантная подгруппа, причем по предположению $t \notin Z(S)$. Но тогда, очевидно, нижний слой R подгруппы Z не является циклической группой и $a \in N_V(R)$. Отсюда по теореме Машке [2] $R = M \times (i)$, где i — инволюция из (t), а M — (a)-инвариантная подгруппа и $M \rtimes (a)$ — группа Фробениуса. Отсюда по теореме Томпсона [23] получаем $F \rtimes M = F \times M$ и $M < S \cap C_V(F) = P \lhd S$, а так как $i \notin C_V(F)$ и $i \in Z(S) < (t)$, то $P \cap Z(S) = 1$. Однако это противоречило бы известному свойству нильпотентных групп: нетривиальная нормальная подгруппа нильпотентной группы пересекается нетривиально с ее центром [2]. Следовательно, $Z(S) = (t)$ и лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть $V =$* гр (a, k), *где* $|a| = |k| = p$ — *простое число,— конечная разрешимая квазифробениусова группа (по модулю p). Тогда $V = F \rtimes (S \times (a))$, где $FC_V(a)$ — группа Фробениуса с ядром F и дополнением $C_V(a)$ и справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $S \neq 1$, *то* S — *некоммутативная 2-подгруппа,* $|Z(S)| = 2$,

$Z(S) = S \cap C_V(a)$ *и* $S/Z(S)$ *— элементарная абелева подгруппа, причем любая* (a)*-инвариантная абелева подгруппа из* S *содержится в* $Z(S)$;

2) *если* c *— элемент из* F, *то* $\text{гр}(a, c) = \text{гр}(a, a^c)$;

3) $V = \text{гр}(a, a^k)$.

Доказательство. Утверждение 2 доказано в [13] (лемма 6.3). По лемме 7.3 из [13] $V = F \leftthreetimes (S \leftthreetimes (a))$, где $FC_V(a)$ — группа Фробениуса с ядром F и дополнением $C_V(a)$, S — 2-подгруппа. Пусть $S \neq 1$ и $S \cap C_V(a)$ не есть обобщенная группа кватернионов. По доказанной выше лемме

$$(t) = Z(S) = S \cap C_V(a)$$

и любая (a)-инвариантная абелева подгруппа из S принадлежит $Z(S) = (t)$. Пусть x — элемент из S и $x(t)$ — инволюция из $Z(S/(t))$. Если $t \in (x)$, то $(x) \lhd S$ и, очевидно, из $x^2 \in (t) = Z(S)$ вытекает, что $H_x = C_G(x) \lhd S$ и, как легко показать, $|S : H_x| = 2$. Если же $t \notin (x)$, то подгруппа гр (x, t) абелева и не является циклической. В этом случае, как известно [2], в качестве x можно выбрать инволюцию и очевидно, $R = (x) \times (i) \lhd S)$ где i — инволюция из $(t) = Z(S)$. Снова воспользуемся символом H_x, но уже для обозначения $H_x = C_S(R)$. Очевидно, $H_x \lhd S$ и $|S : H_x| = 2$. Обозначим через B полный прообраз нижнего слоя подгруппы $Z(S/(t))$ в S. Из изложенного выше вытекает, что каждому x из $B \setminus (t)$ мы поставили в соответствие подгруппу H_x из $C_S(x)$, нормальную в S, с индексом $|S : H_x| = 2$. Пусть $D = \bigcap\limits_{x \in B \setminus (t)} H_x$. По теореме Ремака [2] S/D — элементарная абелева группа. Очевидно, D — (a)-инвариантная подгруппа.

Предложим, что $D \neq (t)$ и рассмотрим $Q = B \cap D$. Подгруппа Q является (a)-инвариантной и ввиду предположения, что $D \neq (t)$, как нетрудно показать, $Q \cap (t)$. Отсюда и из определения подгрупп типа H_x, $x \in B \setminus (t)$, вытекает, что $Q < \bigcap C_S(x)$. Но тогда Q — абелева подгруппа, а так как она является (a)-инвариантной, то по лемме $Q \leqslant (t) = Z(S)$ вопреки доказанному выше $Q \leqslant (t)$. Следовательно, $D = (t) = Z(S)$.

Теперь докажем, что $|t| = |Z(S)| = 2$. Из доказанного выше легко усматривается, что $S' = [S, S] = (i)$, где i — инволюция из $(t) = Z(S)$. Возьмем подгруппу $N = F \leftthreetimes (i)$ и рассмотрим V/N. Если бы $(t) \neq (i)$ то $V/N = SN/N \leftthreetimes (aN) = \text{гр}(aN, kN)$, где (κN), (aN) сопряжены в V/N и $tN \in Z(V/N)$, $tN \neq N$. Кроме этого $S' < N$ и, значит, SN/N — абелева группа. Отсюда, используя лемму Машке [2], легко получили бы противоречие с предположением, что $V/N = \text{гр}(aN, kN)$ и подгруппы (kN), (aN) сопряжены в V/N. Следовательно, $(t) = (i)$ и $|Z(S)| = 2$. Чтобы завершить доказательство утверждения 1, нам еще остается рассмотреть случай, когда $X = S \cap C_V(a)$ — обобщенная группа кватернионов. Докажем, что этот случай невозможен. По лемме 7.3 из [13] $Z(S)$ — циклическая группа и $Z(S) < X$. А так как X — обобщеная группа кватернионов, то $Z(S) = (i)$.

Пусть P — подгруппа из S наибольшего порядка такая, что $P \lhd S \leftthreetimes (a)$ и $(t) = X \cap \text{P}$, где $|t| = 4$. Очевидно, такая подгруппа существует в S. Далее, на основании доказанной выше леммы заключаем, что $Z(P) = (t)$. Но $P \lhd S$ и $Z(F)$ — автоморфно допустимая подгруппа в P, а поэтому $(t) = Z(P) \lhd S$. Но тогда $C_S(t) \lhd S \leftthreetimes (a) = H$ и $X \not< C_S(t)$, $|S : C_S(t)| = 2$. Однако это невозможно, так как $H = \text{гр}(a, a^r)$, $r \in S$, и $X < C_H(a)$. Следовательно, X не является обобщенной группой кватернионов и утверждение 1 доказано.

Докажем утверждение 3. Так как $V = F \leftthreetimes (S \leftthreetimes (a))$, то $k = a^m vc$, где $v \in S$, $c \in F$ и m — натуральное число и $1 \leqslant m \leqslant p - 1$. Если $v = 1$, то утверждение 3 вытекает из утверждения 2. Пусть $v \neq 1$ и введем обозначения: $M = \text{гр}(a, a^k) = \text{гр}(a, a^{vc})$, $N = F \leftthreetimes Z(S)$, $\overline{V} = V/N$, $\overline{a} = aN$, $\overline{v} = vN$, $\overline{S} = SN/N$. В этих обозначениях $\overline{V} = \overline{S} \leftthreetimes (\overline{a})$, $\overline{v} \in \overline{S}$, $\overline{M} = MN/N = \text{гр}(\overline{a}, \overline{a}^{\overline{v}}) \leqslant \overline{V} = \text{гр}(\overline{a}, \overline{v})$. По утверждению 1 $\overline{V}$ — группа Фробениуса с ядром $\overline{S}$ и неинвариантным множителем $(\overline{a})$. Но тогда по утверждению 2 $\overline{M} = \text{гр}(\overline{a}, \overline{v}) = \overline{V}$, а так как по утверждению 1 $|Z(S)| = 2$, то, очевидно, $MF/F = V/F$. Отсюда по теореме об изоморфизмах [2] вытекает $M/D \simeq$

$\simeq V/F$, где $D = F \cap M$. Далее, M — разрешимая группа и по теореме Холла [2] $M = D \leftthreetimes (Q \leftthreetimes (a))$, где Q — 2-подгруппа, сопряженная с S в V. Нетрудно заметить, что S является единственной (a)-инвариантной силовской 2-подгруппой из V. Следовательно, $Q = S$ и $M = D \leftthreetimes (S \leftthreetimes (a))$, где $D \leqslant F$. В частности, $a^v \in M = \text{гр}(a, a^{vc})$ и по утверждению 2

$$\text{гр}(c, a^v) = \text{гр}(a^v, a^{vc}) \leqslant M.$$

Таким образом, доказано, что $v, c \in M$, а значит, $k = a^m vc \in M$, т. е. $V = \text{гр}(a, k) \leqslant M$ и $V = M$. Утверждение 3 доказано, а вместе с ним доказана и теорема.

Теорема 5. *Пусть G — группа, a — ее элемент простого порядка p, F — q-подгруппа, $q \neq p$ и $G = F \leftthreetimes (a)$, удовлетворяющие следующим условиям:*

1) *$C_G(a)$ конечен;*

2) *подгруппы вида* гр (a, c), $c \in F$, *конечны.*

Тогда $L(F) \lhd G$, где $L(F)$ — локально нильпотентный радикал подгруппы F, и $G/L(F)$ имеет конечный период.

Доказательство. Пусть период подгруппы F бесконечен и $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ последовательность элементов из F, порядки которых растут вместе с номером n. Рассмотрим подгруппы вида $L_n = \text{гр}(a, c_n)$, $n = 1, 2, \ldots$. По условиям теоремы подгруппа вида L_n, $n = 1, 2, \ldots$, обладает представлением $L_n = Q_n \leftthreetimes (a)$, где Q_n — конечная подгруппа из F, $n = 1, 2, \ldots$ Далее из всех подгрупп из Q_n, нормальных в L_n и пересекающихся тривиально с централизатором $C_G(a)$, выберем подгруппу $V_{n,1}$ наибольшего порядка. Если $V_{n,1} \neq Q_n$, то возьмем фактор-группу $\overline{L}_n = \overline{Q}_n \leftthreetimes (\overline{a}_1)$, где $\overline{Q}_n = Q_n/V_{n,1}$, $\overline{a}_1 = aV_{n,1}$. Пусть $\overline{V}_{n,2}$ — подгруппа наибольшего порядка из $C_{\overline{Q}_n}(\overline{a}_1)$, нормальная в $\overline{L}_n$, и $V_{n,2}$ — полный прообраз подгруппы $\overline{V}_{n,2}$ в Q_n. Если $V_{n,2} \neq Q_n$, то относительно фактор-группы $L_n/V_{n,2}$ рассуждаем так же, как и при построении подгруппы $V_{n,1}$, и т. д. Рассуждая таким образом, построим ряд подгрупп из Q_n, нормальных в L_n:

$$1 = V_{n,0} \leqslant V_{n,1} < V_{n,2} \leqslant \ldots < V_{n,s_n} = Q_n \tag{1}$$
$$n = 1, 2, \ldots,$$

где $V_{n,i+1}/V_{n,i}$ — подгруппа наибольшего порядка из $X_{i+1} = Q_n/V_{n,i}$ нормальная в $B_{i+1} = L_n/V_{n,i}$ и такая, что либо $V_{n,i+1}/V_{n,i}$ — подгруппа из $C_{X_{i+1}}(aV_{n,i})$, либо $C_{X_{i+1}}(aV_{n,i}) \cap V_{n,i+1}/V_{n,i} = V_{n,i}$, $i = 0, 1, \ldots, s_n - 1$. Так как $C_G(a)$ конечен, то ввиду способа построения ряда (1), очевидно, множество $\{s_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ конечно, а поэтому, не нарушая общности рассуждений, будем предполагать, что $s = s_1 = s_2 = \ldots = s_n = \ldots$ Сначала рассмотрим случай, когда $s = 3$, и докажем, что почти для всех номеров n подруппа $V_{n,1} \neq 1$. Предположим, что это не так. В этом случае, не нарушая, общности рассуждений, будем считать, что

$$(1) = V_{1,1} = V_{2,1} = \ldots = V_{n,1} = \ldots$$

Ввиду определения ряда с учетом $s = 3$ и введенных выше обозначений элемент $aV_{n,2}$ индуцирует в X_3 регулярный автоморфизм простого порядка p и по теореме Хигмана [19] ступень нильпотентности группы X_3 ограничена числом, зависящим только от p. А так как $V_{n,1} = 1$ и $|V_{n,2}| \leqslant |C_G(a)|$, то, очевидно, ступень нильпотентности подгруппы $Q_n = V_{n,3}$ также ограничена числом, зависящим только от $|C_G(a)|$. Для дальнейших рассуждений нам необходима следующая лемма Мальцева [20];

Если группа A обладает возрастающим центральным рядом и Z_i — какой-либо член ее верхнего центрального ряда

$$(1) = Z_0 < Z_1 < \ldots < Z_\gamma = G,$$

то при $i < \omega$ произвольный элемент $b \in Z$, имеющий конечный порядок $|b| = k$, перестановочен с k^{i-1}-й степенью каждого элемента группы A.

Пусть k — ступень нильпотентности подгруппы $V_{n,3} = Q_n$. Как отмечено выше, число k не зависит от номера n, а порядок элемента C_n растет вместе с номером n. Следовательно, для некоторого номера m выполняется неравенство $|c_m| > q^{2(k-1)\beta}$, где $q^\beta > |C_G(a)|$. Отсюда, в частности, вытекает существование в (c_m) элемента d_m порядка q^β. Но тогда по указанной лемме Мальцева всякий элемент из $V_{n,3} = Q_n$, сопряженный в L_n с элементом d_m, централизует d_m. А так как в качестве c_m можно выбрать любой элемент из $V_{m,3}$, сопряженный с элементом c_m в L_m, то $T = \text{гр}(d_m^x \mid x \in L_m)$ — абелева подгруппа. Если бы $T \cap V_{n,2} = 1$, то по лемме Горчакова (см. [13], лемма 1.24) элемент a централизовал бы некоторый элемент порядка q^β Однако это невозможно, так как $q^\beta > |C_G(a)|$. Следовательно, $T \cap V_{n,2} = 1$ и $V_{n,1} \neq 1$ вопреки предположению. Полученное противоречие означает, что $V_{n,1} \neq 1$ почти для каждого номера n, если $s = 3$.

Пусть теперь $s > 3$ и докажем существование числа $v = q^\alpha$, не зависящего от номера n и такого, что $c^v \in V_{n,1}$.

В фактор-группе $B_2 = L_n/V_{n,1}$ подгруппа $X_2 = V_{n,2}/V_{n,1} < C_{B_2}(\overline{a})$, где $\overline{a} = aV_{n,1}$ и $X_2 \lhd V_{n,3}/V_{n,1} = T_1 \lhd B_2$, причем элемент $\overline{a}X_2$ индуцирует в T_1/X_2 регулярный автоморфизм простого порядка p. А так как $|X_2| \leqslant |C_G(a)|$, то ввиду теоремы Хигмана [19] ступень нильпотентности группы T_1 ограничена числом, зависящим только от числа $|C_G(a)|$. Обозначим ее через k_1. Относительно фактор-группы $B_4 = L_n/V_{n,3}$ и ее подгрупп $X_4 = V_{n,4}/V_{n,3}$, $T_2 = V_{n,5}/V_{n,3}$, если $V_{n,4} \neq Q_n$, рассуждаем аналогично и т. д. Рассуждая таким образом, получим последовательность натуральных чисел $k_1, k_2, \ldots, k_t$, где k_r — ступень нильпотентности подгруппы T_r, и нормальный ряд $X_{2r} < T_r < B_{2r}$, $r = 1, 2, \ldots, t$; $t < s$. Далее, введем следующие параметры:

$$k = \max(\{k_r \mid r = 1, 2, \ldots, t\}),\ v = q^{2(k-1)\beta},$$

где $q^\beta > |C_G(a)|$. Очевидно, число v не зависит от n и $c_n^v \in V_{n,2u_1+1}$ для некоторого числа u_1.

Пусть $X_{2u_1} = V_{n,2u_1}/V_{n,2u_1-1}$, $T_{u_1} = V_{n,2u_1+1}/V_{n,2u_1-1}$, $B_{2u_1} = L_n/V_{n,2u_1-1}$. Рассуждая относительно тройки $(X_{2u_1}T_{u_1}, B_{2u_1})$ точно так же, как и при рассмотрении тройки (X_2, T_1, B_2), докажем, что $c_n^{v^2} \in V_{n,2u_1-1}$. Если $2u_1 - 1 \neq 1$, то $2u_1 - 1 = 2u_2 + 1$, и рассматриваем тройку $(X_{2u_2}, T_{u_2}, B_{2u_2})$. Снова получаем $c_n^{v^3} \in V_n$, $2u_2 - 1$ и рассуждаем аналогично изложенному выше и т. д., пока не получим включение $c_n^{v^{u_1}} \in V_{n,1}$. Так как $u_1 < s \leqslant |C_G(a)| = \alpha$, то число $w = v^\alpha$ не зависит от номера n. В частности, из $c_n^w \in V_{n,1}$ и определения подгруппы $V_{n,1}$ вытекает, что $\text{гр}(c_n^w, a)$ — группа Фробениуса с ядром, содержащим элемент c_n^w, и неинвариантным множителем (a), если $c_n^w \neq 1$.

Таким образом, доказано следующее утверждение:

* *Для любого элемента* $b \in F$ *подгруппа* $\text{гр}(b^w, a)$ *конечна и при* $b^w \neq 1$ *она является группой Фробениуса с ядром, содержащим элемент* b^w, *и неинвариантным множителем* (a).

Предположим, что w не является периодом подгруппы F и рассмотрим подгруппу $H = R \rtimes (a)$, где $R = \text{гр}(b^w \mid b \in F)$. Пусть g — произвольный, но фиксированный элемент из R, т. е. $g = b_1^w b_2^w \ldots b_l^w$, где $b_i \in R$, $i = 1, 2, \ldots, j$. Докажем, что элементы a, ag сопряжены с помощью элемента h из F, т. е. $ag = a^h = h^{-1}ah$. По утверждению *) $M_1 = \text{гр}(b_1^w, a)$ — группа Фробениуса вида $M_1 = P_1 \rtimes (a)$ с ядром P_1 и $b_1^w \in P_1 < F$. Отсюда и из определения группы Фробениуса вытекает, что $ab_1^w = a^{h_1}$, где $h_1 \in P_1$. Очевидно, утверждение *) справедливо и для любого элемента из G, сопряженного с элементом a в G, а поэтому по тем же соображениям, что и выше, $M_2 = \text{гр}(b_2^w, a^{h_1}) = P_2 \rtimes (a^{h_1})$ — группа Фробениуса с ядром P_2 и $b_2^w \in P_2 < F$. Отсюда ввиду определения группы Фробениуса получаем $a^{h_1}b_2^w = a^{h_1h_2}$, где $h_2 \in P_2 < F$. Рассуждая таким образом до последнего номера $\bar{j}$, получаем $ag = a^{h_1 h_2 \dots h_{\bar{j}}}$, где $g \in R$, $h_i \in \in F$, $i = 1, 2, \dots, \bar{j}$. В частности, из полученного равенства и утверждения * вытекает, что $C_R(a) = 1$ и $H = R \leftthreetimes (a)$ — группа Фробениуса с ядром R и неинвариантным множителем (a).

Пусть g — произвольный нетривиальный элемент из R. По условиям леммы подгруппа $L_g = \mathrm{гр}(g, a)$ конечна и по доказанному выше L_g — группа Фробениуса вида $L_g = F_g \leftthreetimes (a)$ с ядром F_g из R и неинвариантным множителем (a). По теореме Хигмана]19] ступень нильпотентности подгруппы F_g, $g \in R$, ограничена числом h, не зависящим от выбора элемента g из R. Если c — произвольный элемент из F_g, то ввиду определения группы Фробениуса $|ac| = p$ и

$$(ac)^p = (a^{-p+1} ca^{p-1})(a^{-p+2} ca^{p-2}) \dots (a^{-1}ca) c = 1.$$

Но тогда

$$(c) < \mathrm{гр}(c^a, c^{a^2}, \dots, c^{a^{p-1}}). \tag{2}$$

Пусть $|g| > l = q^{2(h-1)}$ и d — элемент порядка $q^{(h-1)p}$ из (g). Из леммы Мальцева (она сформулирована выше) и неравенства $|g| > l$ вытекает

$$d^a, d^{a^2}, \dots, d^{a^{p-1}} \in C_{F_g}(d). \tag{3}$$

Возьмем в R произвольный, но фиксированный элемент r и рассмотрим подгруппы вида $K_i = \mathrm{гр}(g, ra^{-i}) = V_i \leftthreetimes (ra^{-i})$, $i = 1, 2, \dots, p-1$; $g \in \in V_i < R$. По доказанному выше K_i — конечная группа Фробениуса с ядром V_i и дополнением (ra^{-1}). Далее, $V_i^{a^i}$ содержит подгруппу $M_i = = \mathrm{гр}(g^{a^i}, g^r)$, ступень нильпотентности которой ограничена числом h. Отсюда по лемме Мальцева получаем $d^{a^i} \in C_R(d^r)$, $i = 1, 2, \dots, p-1$. Но тогда ввиду включений (2), (3) $d \in C_R(d^r)$, $r \in R$. Следовательно, элемент d перестановочен с любым с ним сопряженным в R элементом. Очевидно, и каждый элемент из R, сопряженный с d, обладает таким же свойством, т. е. замыкание элемента d в R является абелевой подгруппой: $Y = \mathrm{гр}(d^x \mid x \in R)$, а это означает, что максимальная нормальная локально конечная подгруппа $L(R)$, нетривиальна. Но $L(R)$ — автоморфно допустимая подгруппа R и $R \lhd G$ и поэтому $L(R) \lhd G$ и $L(R) \leqslant L(F)$ и $L(F) \lhd G$ [2]. Очевидно, $G/L(F) = F/L(F) \leftthreetimes (aL(F)) = \overline{G} = \overline{F} \leftthreetimes (\overline{a})$, где $\overline{F} = = F/L(F)$, $\overline{a} = aL(F)$, и тройка $(\overline{G}, \overline{F}, \overline{a})$ удовлетворяет всем условиям теоремы, причем $C_{\overline{G}}(\overline{a}) = C_G(a) L(F)/L(F)$. Если $\overline{F}$ обладает элементами порядка $> l = q^{2(h-1)\beta}$, где $\beta > |C_{\overline{G}}(\overline{a})|$, то по доказанному выше локально конечный радикал $\overline{M}$ из $\overline{F}$ нетривиален, т. е. $\overline{M} \neq L(F)$ и $\overline{M} \lhd \overline{G}$. Но тогда по теореме о гомоморфизмах и теореме Шмидта [2,21] полный прообраз M в G является локально конечной нормальной подгруппой в G и $L(F) < M$, $L(F) \neq M$ вопреки определению подгруппы $L(F)$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Если иметь в виду основной результат [22], то в действительности мы получили более общий результат, чем теорема 5, а именно, следующую теорему.

Теорема 6. *Пусть G — группа вида $G = F \leftthreetimes (a)$, где a — элемент простого порядка p, F — p'-подгруппа и тройка (G, F, a) удовлетворяют следующим дополнительным условиям:*

1) *$C_G(a)$ конечен;*

2) *подгруппы вида $\mathrm{гр}(a, c)$, $c \in F$, конечны и почти все разрешимы.*

Тогда F обладает нильпотентной подгруппой V такой, что $V \lhd G$ и для некоторого неотрицательного числа α и для каждого q из $\pi(F)$ и любого q-элемента c из F имеет место включение $c^{q^\alpha} \in V$ и $C_G(a) \cap V = 1$.

1. *Голод Е. С.* О ниль-алгебрах и финитно-аппроксимируемых P-группах // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1964.— **28**, № 3.— С. 273—276.
2. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп: 3-е изд.— М. : Наука, 1982.— 288 с.
3. *Адян С. И.* Проблема Бернсайда и тождества в группах.— М. : Наука, 1975.— 336 с.
4. *Шунков В. П.* К теории периодических групп // Докл. АН СССР.— 1967.— **175**, № 6.— С. 1236—1237.
5. *Шунков В. П.* О проблеме минимальности для подгрупп в локально конечных группах // Там же.— 1968.— **181**, № 2.— С. 294—295.
6. *Шунков В. П.* О периодических группах с некоторыми условиями конечности//Там же.— 1970.— **195**, № 6.— С. 1290—1293.
7. *Шунков В. П.* Об одном классе p-групп // Алгебра и логика.— 1970.—**9**, № 4.—С. 484—496.
8. *Шунков В. П.* О проблеме минимальности для локально конечных групп//Там же.— № 2.— С. 220—248.
9. *Шунков В. П.* О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Там же.— № 5.— С. 579—615.
10. *Шунков В. П.* Группы с инволюциями: В 3-х ч.— Красноярск, 1986.— (Препринт / ВЦ СО АН СССР; № 4, 5, 12;).
11. *Шунков В. П.* Группы с инволюциями: Ч. 4.— Красноярск, 1989.— С. 1—30.— (Препринт / ВЦ СО АН СССР; № 23).
12. *Шунков В. П.* Теоремы вложения для групп с инволюциями и характеризация черниковских групп // Алгебра и логика.— 1988.— **27**, № 1.— С. 100—121.
13. *Шунков В. П.* M_p-группы.— М. : Наука, 1990.— 160 с.
14. *Шмидт О. Ю.* Избранные труды. Математика.— М. : Изд-во АН СССР, 1959.— 316 с.
15. *Feit W., Thompson J. G.* Solvability of odd order // Pacif. J. Math.— 1963.— **13**, N 3.— P. 775—1029.
16. *Bender H.* Finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups // J. Algebra. 1981.— **70**, N 1.— P. 216—228.
17. *Bender H., Glauberman G.* Characters of finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups // Ibid.— P. 200—215.
18. *Попов А. М., Шунков В. П.* Характеризация одного класса черниковских групп // Алгебра и логика.— 1987.— **26**, № 3.— С. 358—375.
19. *Higman G.* Groups and rings having automorphisms without nontrivial fixed points // J. London Math. Soc.— 1957.— **32**.— P. 321—334.
20. *Мальцев А. И.* Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы // Мат. сб.— 1949.— **25**, № 3.— С. 347—366.
21. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
22. *Hartley B., Meixner T.* Finite soluble grours containing an element of prime order whose centralizer is small // Arch. Math. 1981.— **36**.— P. 211—213.
23. *Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М.* Конечные расщепляемые группы.— М. : Наука, 1968.— 112 с.

Получено 01.02.91