УДК 517.5

М. Ш. ШАБОЗОВ, канд. физ.-мат. наук (Тадж. ун-т, Душанбе)

Об оценках погрешности квадратурных формул для некоторых классов функций

При некотором ограничении на узлы и коэффициенты квадратурной формулы на классах функций, задаваемых модулями гладкости, получены оптимальные формулы. Для погрешности формул приведены точные оценки.

При деяких обмеженнях на вузли та коефіцієнти квадратурної формули на класах функцій, що задаються модулями гладкості, одержані оптимальні формули. Для похибки формул наведені точні оцінки.

Рассматривается квадратурная формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k) + R_n(f), \tag{1}$$

задаваемая векторами узлов $X = \{x_k\}$, $a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_k \leqslant b$, и коэффициентов $P = \{p_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Здесь $R_n(f)$ — погрешность формулы.

Задача минимизации погрешности квадратурной формулы (1) заключачается в следующем. Если $\mathfrak{M}$ — некоторый класс функций $f(x)$, заданный на отрезке $[a, b]$, то положим

$$R_n(\mathfrak{W}; X, P) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k) \right|.$$

Требуется найти величину

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{W}) = \inf_{(X,P)} R_n(\mathfrak{W}, X, P) \tag{2}$$

и указать вектор (X^*, P^*) $(X^* = \{x_k^*\}, P^* = \{p_k^*\})$, на котором достигается точная нижняя грань в (2), т. е. выполняется равенство

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{W}) = R_n(\mathfrak{W}; X^*, P^*).$$

В настоящей статье при некотором ограничении на вектор (X, P) решается задача (2) для $\mathfrak{W} = H_\omega^{(2)}[a, b]$ — класса функций $f(x)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяющих для всех точек $x \pm t \in [a, b]$ условию

$$|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| \leqslant 2\omega(|t|), \tag{3}$$

где $\omega(\delta)$ — заданный на отрезке $[a, b]$ модуль непрерывности, т. е. непрерывная неубывающая и полуаддитивная функция, в нуле равная нулю. Заметим, что обычный класс функций $H_\omega[a, b]$ [1, с. 19—20] составляет подкласс класса $H_\omega^{(2)}[a, b]$. В рассматриваемом случае узлы квадратурной формулы линейно зависят от коэффициентов и поэтому наилучшие узлы полностью определяются по наилучшим коэффициентам.

Предположим, что $x_k \pm p_k/2 \in [a, b]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и узлы и коэффициенты квадратурной формулы (1) удовлетворяют следующим линейным связям:

$$x_k = a + \sum_{i=1}^{k} p_i - \frac{p_k}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots, n; \qquad \sum_{k=1}^{n} p_k = b - a. \tag{4}$$

Ради краткости положим $t_{k-1} = x_k - p_k/2$, $t_k = x_k + p_k/2$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $t_0 = a$, $t_n = b$. Ясно, что $t_{k-1} \leqslant x_k \leqslant t_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда погрешность квадратурной формулы (1) представима в виде

$$R_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k). \tag{5}$$

Разобьем интеграл по промежутку $[t_{k-1}, t_k]$ на два промежутка $[t_{k-1}, x_k]$ и $[x_k, t_k]$ и, заменив в первом из них x на $x_k - y$, а во втором x на $x_k + y$, после очевидных выкладок будем иметь

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)\,dx = \int_0^{p_k/2} [f(x_k + y) + f(x_k - y)]\,dy.$$

Теперь равенство (5) перепишем в следующем виде:

$$R_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{p_k/2} [f(x_k + y) + f(x_k - y) - 2f(x_k)]\,dy.$$

Отсюда, оценивая по модулю с учетом неравенства (3) для любого $f(x) \in H_\omega^{(2)}[a, b]$ получаем

$$|R_n(f)| \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} \int_0^{|p_k|/2} \omega(y)\,dy. \tag{6}$$

Если $p_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то легко проверяется, что равенство в (6) достигается для функции

$$f_0(x) = \omega(|x - x_k|) + \omega(p_1/2) - \omega(p_k/2), \quad t_{k-1} \leqslant x \leqslant t_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Заметим, что $f_0(x)$ принадлежит классу $H_\omega[a, b]$ и, следовательно, классу $H_\omega^{(2)}[a, b]$. Поэтому справедливо равенство

$$R_n(H_\omega^{(2)}[a, b]; X, P) = 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^{p_k/2}\omega(y)\,dy.$$

Чтобы найти значение величины (2), минимизируем функционал погрешности

$$I(p_1, p_2, \ldots, p_n) = 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^{p_k/2}\omega(y)\,dy \tag{7}$$

при условии $\sum_{k=1}^{n} p_k = b - a$. Следуя обычным в таких случаях рассуждениям, рассмотрим функцию

$$E(p_1, p_2, \ldots, p_n) = I(p_1, p_2, \ldots, p_n) + \lambda\left(b - a - \sum_{k=1}^{n} p_k\right).$$

Приравняв нулю частные производные E по p_k, получим систему

$$\partial E/\partial p_k = \omega(p_k/2) - \lambda = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда следует

$$\omega(p_1/2) = \omega(p_2/2) = \ldots = \omega(p_n/2),$$

что равносильно $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$. Но так как $\sum_{k=1}^{n} p_k = b - a$, то $p_k = \frac{b-a}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Итак, вектор $P^* = \left\{p_k^* = \frac{b-a}{n}\right\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Теперь из равенства (4) после подстановки значений p_k^* получим

$$x_k^* = a + \frac{b-a}{2n}(2k - 1), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Ясно, что вектор

$$(X^*, P^*) = \left\{x_k^* = a + \frac{b-a}{2n}(2k-1),\ p_k^* = \frac{b-a}{n}\right\}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

реализует минимум величины (7) при условии (4), а значит, и минимум величины (2).

Сформулируем полученный результат в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Среди всех квадратурных формул вида* (1), *для которых выполнены условия* (4) *при* $p_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *наилучшей для класса* $H_\omega^{(2)}[a, b]$ *является формула средних прямоугольников. При этом для погрешности этой формулы справедлива точная оценка*

$$R_n(H_\omega^{(2)}[a, b]) = 2n\int_0^{\frac{b-a}{2n}}\omega(y)\,dy = 2\int_0^{\frac{b-a}{2}}\omega\left(\frac{y}{n}\right)dy.$$

Из доказанной теоремы вытекает такое следствие.

Следствие 1. *Если* $\omega(t) = \frac{M}{2}t^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$ (т. е. $H_\omega^{(2)}[a, b]$ — *класс Зигмунда* [2]), *то справедлива оценка* [3]

$$R_n(H_\alpha^{(2)}[M; a, b]) = \frac{M(b-a)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)2^{1+\alpha}}\frac{1}{n^\alpha}.$$

Отдельно рассмотрим периодический случай.

Пусть $\widetilde{H}_\omega^{(2)}$ — класс непрерывных периода 2π функций $f(x)$, удовлетворяющих при любых x и t неравенству (3). В этом случае условия (4) примут вид

$$x_1 = 0,\quad x_k = \sum_{i=1}^{k} p_i - p_k/2,\quad k = 2, \ldots, n-1,\quad x_n = 2\pi,\quad p_1 = p_n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 2\pi. \tag{8}$$

Учитывая периодичность функции $f(x)$, как и в предыдущем случае, погрешность квадратурной формулы (1) представим в виде

$$R_n(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k) = \int_0^{p_1} [f(x_1+y) + f(x_1-y) - 2f(x_1)]\,dy +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n-1} \int_0^{p_k/2} [f(x_k+y) + f(x_k-y) - 2f(x_k)]\,dy,$$

откуда, учитывая соотношения (4), для любой функции $f(x) \in H_\omega^{(2)}$ получаем

$$|R_n(f)| \leqslant 2\int_0^{|p_1|} \omega(y)\,dy + 2\sum_{k=2}^{n-1} \int_0^{|p_k|/2} \omega(y)\,dy. \tag{9}$$

Если $p_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то равенство в (9) достигается для функции $f_1(x) \in \widetilde{H}_\omega^{(2)}$, определенной на отрезке $[-p_1, 2\pi - p_1]$, следующим образом:

$$f_1(x) = \begin{cases} \omega(|x|), & -p_1 \leqslant x \leqslant p_1; \\ \omega(|x - x_k|) + \omega(p_1) - \omega(p_k/2), & t_{k-1} \leqslant x \leqslant t_k,\ k = 2, 3, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Поэтому справедливо равенство

$$R_n(\widetilde{H}_\omega^{(2)}; X, P) = 2\int_0^{p_1} \omega(y)\,dy + 2\sum_{k=2}^{n-1} \int_0^{p_k/2} \omega(y)\,dy. \tag{10}$$

По аналогии с непериодическим случаем, минимизируя правую часть равенства (10), находим, что в периодическом случае оптимальным вектором узлов и коэффициентов является вектор

$$(X^*, P^*) = \left\{ x_k^* = \frac{2\pi(k-1)}{n-1}\ (k = 1, 2, \ldots, n),\ p_k^* = \frac{2\pi}{n-1}\ (k = 2, 3, \ldots, n-1),\right.$$

$$\left. p_1 = p_n = \frac{\pi}{n-1} \right\}.$$

Этот вектор определяет квадратурную формулу трапеций. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Среди всех квадратурных формул вида* (1), *для которых выполнены условия* (8) *при* $p_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *наилучшей для класса* $H_\omega^{(2)}$ *является квадратурная формула трапеций. Для погрешности этой формулы справедлива оценка*

$$R_n(\widetilde{H}_\omega^{(2)}) = 2(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{n-1}} \omega(y)\,dy = 2\int_0^{\pi} \omega\left(\frac{y}{n-1}\right) dy.$$

Следствие 2. *Если* $\omega(t) = \frac{M}{2} t^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, *то* [3]

$$R_n(\widetilde{H}_{\alpha,M}^{(2)}) = \frac{M\pi^{\alpha+1}}{\alpha+1} \frac{1}{(n-1)^\alpha}.$$

В заключение отметим, что в многомерном случае задача оптимизации кубатурных формул для классов, задаваемых модулями непрерывности, решена Н. П. Корнейчуком [4], а для функций двух переменных кубатурные формулы с весом рассмотрены в [5].

1. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы.— М. : Наука, 1979.— 254 с.
2. *Zygmund A.* Smooth functions // Duke Mat. J.— 1945.— **12**, N 1.— P. 47—76.
3. *Аксень М. Б.* Об оценках приближений квадратурными формулами для некоторых классов функций // Журн. вычислит. математики и мат. физики.— 1963.— **3**, № 3.— С. 553—559.
4. *Корнейчук Н. П.* Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных // Мат. заметки.— 1968.— **3**, № 5.— С. 563—576.
5. *Шабозов М. Ш.* О наилучших кубатурных формулах с весом // Изв. АН ТаджССР. Сер. физ.-мат. и геол.-хим. наук.— 1980.— № 4.— С. 66—69.

Получено 23.01.90