УДК 517.5

Р. М. ТРИГУБ, д-р физ.-мат. наук (Донец. ун-т)

Мультипликаторы рядов Фурье

Доказываются новые предложения о мультипликаторах тригонометрических рядов Фурье в пространстве C непрерывных периодических функций.

Доводяться нові результати відносно мультиплікаторів тригонометричних рядів Фур'є в просторі C неперервних періодичних функцій.

Пусть S — непустое подмножество целых чисел ($S \subset \mathbb{Z}$). Определим мультипликатор на спектре S. Если $\mathbf{T} = (-\pi, \pi]$ — окружность, то ряд Фурье функции $f \in L(\mathbf{T})$ запишем в виде

$$f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e_k, \quad e_k = e^{ikx}.$$

Спектром функции называют множество k, для которого $\hat{f}(k) \neq 0$. Пусть $C_S(\mathbf{T})$ — подпространство $C(\mathbf{T})$ функций со спектром в S. Числовую последовательность $\{\lambda_k\}_{k \in S}$ назовем мультипликатором в $C_S(\mathbf{T})$, если $\forall f \in C_S(\mathbf{T})$ ряд $\Sigma \lambda_k \hat{f}(k) e_k$ является рядом Фурье некоторой функции $f_\lambda = \Lambda f \in C_S(\mathbf{T})$. При этом будем писать ($\|\cdot\| = \|\cdot\|_G$)

$$\| \{\lambda_k\} \|_{M(S)} = \| \Lambda \|_{G \to C} = \sup_{\|f\| \leqslant 1} \| f_\lambda \|.$$

Аналогично определяется мультипликатор в других пространствах (в случае пространства $L_p(\mathbf{T})$ будем писать $M_p(S)$. При $S = \mathbb{Z}$ букву S в обозначениях опускаем.

Общие свойства мультипликаторов см. в [1], гл. 4, п. II и [2], гл. 16. Для того чтобы последовательность $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{\infty}$ была мультипликатором в C (L или L_∞), необходимо и достаточно, чтобы на $\mathbf{T}$ существовала конечная борелевская комплекснозначная мера μ такая, что $\forall k \in \mathbb{Z}$ $\lambda_k = \int_{\mathbf{T}} e_{-k} d\mu$. При этом

$$\Lambda f = f_\lambda(x) = \int_{\mathbf{T}} f(x - t)\, d\mu(t) \tag{1}$$

и норма мультипликатора равна (в каждом из трех случаев)

$$\| \{\lambda_k\} \|_M = \sup_n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |\sigma_n(\Lambda)|\, dx = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |\sigma_n(\Lambda)|\, dx = \operatorname{var} \mu, \tag{2}$$

где

$$\sigma_n(\Lambda) = \sigma_n(\Lambda; x) = \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikx}.$$

В частности, если $d\mu = g dx$, где $g \in L(\mathbf{T})$, то $\lambda_k = 2\pi \hat{g}(k)$ и

$$\| \{\lambda_k\} \|_M = \int_{\mathbf{T}} |g(x)|\, dx = \| g \|_1. \tag{3}$$

Соотношения (1) и (2) (без знака предела, во всяком случае) известны [1—2] (см. также доказанные ниже теоремы 2 и 5).

Известно, если мера абсолютно непрерывна относительно меры Лебега (оператор является сверткой с интегрируемой функцией), то оператор-мультипликатор компактен в C и L_p $\forall p \in [1, +\infty]$. Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 1. *Если мультипликатор $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{\infty}$ слабо компактен в $C(\mathbf{T})$, то он является сверткой с некоторой функцией из $L(\mathbf{T})$.*

Доказательство. Пусть $f \in L_\infty(\mathbf{T})$. Тогда

$$\| \sigma_n(f) \| \stackrel{\text{df}}{=} \left\| \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \hat{f}(k) e_k \right\| \leqslant \| f \|_\infty.$$

В силу слабой компактности мультипликатора последовательность сумм Фейера

$$\sum_{k=-n}^{n} \lambda_k \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \hat{f}(k) e_k = \sigma_n(f_\lambda)$$

содержит слабо сходящуюся в C (T) подпоследовательность. Но из слаб сходимости в C следует сходимость всюду (к непрерывной функции), а о ратор действует ограниченно в L_∞. Значит,

$$\Sigma\lambda_k \hat{f}(k) e_k \sim f_\lambda \in L_\infty,$$

и по теореме Фейера — Лебега последовательность $\sigma_n(f_\lambda)$ при $n \to \infty$ с дится почти всюду к f_λ. Следовательно, f_λ является непрерывной. Поэто оператор $\Lambda = \{\lambda_k\}$ является мультипликатором из L_∞ в C. А в этом слу [1, с. 284] $\exists g \in L(\mathbf{T}) : \lambda_k = 2\pi\hat{g}(k)\ \forall k \in \mathbf{Z}$ и $f_\lambda = f_* g$ (см. (1)). Теорема казана.

Таким образом, в C из слабой компактности мультипликатора след его компактность. В L_∞, например, любой мультипликатор слабо комп тен. Это сразу следует из слабой компактности шара в L_∞. Отметим, что добный теореме 1 результат в пространстве L получен ранее в [2, с. 34

Найдем теперь формулу для нормы мультипликатора в пространс C на спектре.

Теорема 2. *Любой мультипликатор в C_S (T) можно продолжи до мультипликатора в C (T) с сохранением нормы. При этом*

$$\|\{\lambda_k\}\|_{M(S)} = \min_{\{\lambda_k\}_{k\overline{\in}S}} \sup_n \frac{1}{2\pi}\|\sigma_n(\Lambda)\|_1 = \min_{\{\lambda_k\}_{k\overline{\in}S}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\|\sigma_n(\Lambda)\|_1 =$$

$$= \min\left\{\operatorname{var}\mu : \int_{\mathbf{T}} e^{-ikt} d\mu(t) = \lambda_k \ \ \forall k \in S\right\}.$$

Доказательство. $\forall f \in C_S(\mathbf{T})$ в силу теоремы Фейера

$$f_\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(f_\lambda) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in S\cap[-n,n]} \lambda_k \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\hat{f}(k) e_k.$$

Положим $x = 0$. Получаем функционал $f_\lambda(0)$ на C_S (T). По теореме Хана Банаха продолжим его на все пространство C (T) с сохранением норм линейности. В силу теоремы Риса об общем виде функционалов в C (T) ществует борелевская мера μ на **T** такая, что $\forall f \in C$ (T)

$$f_\lambda(0) = \int_{\mathbf{T}} f(-t)\, d\mu(t), \quad \sup_{\|f\|\leqslant 1} |f_\lambda(0)| = \operatorname{var}\mu.$$

Введем теперь оператор $f \mapsto f_{\tilde{\lambda}}$ формулой $\left(\tilde{\lambda}_k = \int_{\mathbf{T}} e_{-k} d\mu\right)$

$$f_{\tilde{\lambda}}(x) = \int_{\mathbf{T}} f(x-t)\, d\mu(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{T}} \sigma_n(f; x-t)\, d\mu(t) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \tilde{\lambda}_k \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\hat{f}(k) e_k.$$

Очевидно, $f_{\tilde{\lambda}}(0) = f_\lambda(0)$, и значит, норма этого оператора-мультипли тора $\|\{\lambda_k\}\|_M = \operatorname{var}\mu$. Из соотношений (4) и (5) видно, что при $f =$ $(p \in S)$ и $x = 0$, $\lambda_p = \tilde{\lambda}_p$. Таким образом, мультипликатор, определ ный формулой (5), является продолжением мультипликатора (4). Г этом норма сохраняется, так как

$$\|\{\tilde{\lambda}_k\}\|_M = \operatorname{var}\mu = \sup_{\|f\|\leqslant 1} |f_\lambda(0)| = \sup_{f\in C_S : \|f\|\leqslant 1} |f_\lambda(0)| = \sup_{f\in C_S : \|f\|\leqslant 1} \|f_\lambda\|.$$

Последнее равенство следует из того, что мультипликатор коммутирует сдвигом. Формула в теореме для нормы на спектре следует теперь из Теорема 2 доказана.

Отметим, что формула для нормы мультипликатора на спектре, указанная в теореме 2, была известна ранее лишь при $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (С. М. Никольский).

Приведем теперь несколько следствий.

В [2, с. 347] поставлен такой вопрос: при каких условиях на $\{\lambda_k\}$ для любой функции $f \in C(\mathbf{T})$ существует хотя бы одна функция $f_\lambda \in C(\mathbf{T})$, такая, что $\forall k \in S$

$$\hat{f}_\lambda(k) = \lambda_k \hat{f}(k). \tag{6}$$

Следствие 1. *Для выполнения равенства* (6) *необходимо и достаточно, чтобы существовала конечная борелевская мера* μ *на* $\mathbf{T}$ *такая, что* $\lambda_k = \int\limits_{\mathbf{T}} e_{-k} d\mu \quad \forall k \in S.$

Следствие 2. *Для любого* $S \subset \mathbf{Z}$ *и любого* $p \in [1, +\infty]$

$$\| \{\lambda_k\} \|_{M_p(S)} \leqslant \| \{\lambda_k\} \|_{M(S)}.$$

Для доказательства нужно продолжить оператор по теореме 2 на $C(\mathbf{T})$, применить неравенство $\| \{\lambda_k\} \|_{M_p} \leqslant \| \{\lambda_k\} \|_M$ [1; 2, с. 330] и взять сужение оператора в L_p на S.

Следствие 3. $\forall S \;\; \| \{\lambda_k\} \|_{M_\infty(S)} = \| \{\lambda_k\} \|_{M(S)}.$

Неравенство, противоположное указанному в следствии 2 при $p = \infty$, очевидно.

Следствие 4. *Для того чтобы ряд Фурье любой непрерывной функции со спектром в* S *сходился равномерно, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность борелевских мер такая, что* $\sup\limits_n \operatorname{var} \mu_n < \infty$,

$$\int\limits_{\mathbf{T}} e_{-k} d\mu_n = 1 \quad (k \in S, |k| \leqslant n), \quad \int\limits_{\mathbf{T}} e_{-k} d\mu = 0 \quad (k \in S, |k| > n).$$

Рассмотрим теперь вопрос о сравнении двух мультипликаторов

$$\Lambda f \sim \Sigma \lambda_k \hat{f}(k) e_k, \quad \tilde{\Lambda} f \sim \Sigma \tilde{\lambda}_k \tilde{f}(k) e_k.$$

Положим $S_0 = \{k \in \mathbf{Z} : \lambda_k = 0\}$.

Теорема 3. I. *Если* $\tilde{\lambda}_k = 0 \;\; \forall k \in S_0$ *(это необходимо) и* $K = \inf \left\| \left\{ \frac{\tilde{\lambda}_k}{\lambda_k} \right\} \right\|_M < \infty$ *(нижняя грань относится к выбору значений дробей вида* 0/0), *то для любой функции* f *такой, что* $\Lambda f \in C(\mathbf{T})$

$$\| \tilde{\Lambda} f \| \leqslant K \| \Lambda f \|. \tag{7}$$

II. *Если выполнено неравенство* (7) *для любой функции* f *такой, что* $\Lambda f \in C$, *и* $\{1/\lambda_k\}_{k \in \mathbf{Z} \setminus S_0}$ *является мультипликатором в* C *на спектре* $\mathbf{Z} \setminus S_0$, *то*

$$\inf_{0/0} \left\| \left\{ \frac{\tilde{\lambda}_k}{\lambda_k} \right\} \right\|_M = \min_{0/0} \left\| \left\{ \frac{\tilde{\lambda}_k}{\lambda_k} \right\} \right\|_M \leqslant K.$$

III Если $\left\{ \frac{1}{\lambda_k} \right\}_{k \in \mathbf{Z} \setminus S_0}$ — мультипликатор в C, $\left\{ \frac{\tilde{\lambda}_k}{\lambda_k} \right\}_{k \in \mathbf{Z} \setminus S_0}$ — компактный мультипликатор в C на спектре $\mathbf{Z} \setminus S_0$, $\tilde{\lambda}_k = 0 \;\; \forall k \in S_0$, *то*

$$\sup_{f \in C : \|\Lambda f\| \leqslant 1} \| \tilde{\Lambda} f \| = \max_{f \in L_\infty : \|\Lambda f\|_\infty \leqslant 1} \| \tilde{\Lambda} f \| = \min_{0/0} \left\| \left\{ \frac{\tilde{\lambda}_k}{\lambda_k} \right\} \right\|_M.$$

IV. *Если* Λ — *компактный оператор в* $C(\mathbf{T})$ *и равенство* $\lambda_k = 1$ *влечет* $\widetilde{\lambda}_k = 1$, *то* $\forall f \in C(\mathbf{T})$

$$\| f - \widetilde{\Lambda} f \| \leqslant K \| f - \Lambda f \|$$

тогда и только тогда, когда $\inf\limits_{0/0} \left\| \left\{ \frac{1 - \widetilde{\lambda}_k}{1 - \lambda_k} \right\} \right\|_M \leqslant K$.

Доказательство. I. Справедливость утверждения следует из определения мультипликатора и его нормы. Необходимость указанного условия видна на функции $f = e_k$, $k \in S_0$.

II. Пусть $g \in C_{\mathbf{Z} \setminus S_0}$. Тогда в силу условия теоремы

$$\sum_{k \in \mathbf{Z} \setminus S_0} \frac{1}{\lambda_k} \hat{g}(k) e_k \sim f \in C(\mathbf{T})$$

и оператор T, определяемый последовательностью $\left\{ \frac{\widetilde{\lambda}_k}{\lambda_k} \right\}_{k \in \mathbf{Z} \setminus S_0}$ является мультипликатором в $C_{\mathbf{Z} \setminus S_0}$:

$$\| Tg \| = \| \widetilde{\Lambda} f \| \leqslant K \| \Lambda f \| = K \| g \|, \quad \| T \| \leqslant K.$$

Осталось продолжить мультипликатор T по теореме 2 на все пространство $C(\mathbf{T})$ с сохранением нормы.

III. В силу I и II (см. также следствие 3 теоремы 2)

$$K = \sup_{f \in C: \|\Lambda f\| \leqslant 1} \| \widetilde{\Lambda} f \| = \sup_{f \in L_\infty: \|\Lambda f\|_\infty \leqslant 1} \| \widetilde{\Lambda} f \|_\infty = \min_{0/0} \left\| \left\{ \frac{\widetilde{\lambda}_k}{\lambda_k} \right\} \right\|_M.$$

Значит, нужно доказать достижимость точной грани в L_∞. Очевидно, существует последовательность $f_m \in C_{\mathbf{Z} \setminus S_0}$ такая, что

$$\| \Lambda f_m \| = 1, \quad \lim_{m \to \infty} \| \widetilde{\Lambda} f_m \| = K.$$

Тогда

$$\| f_m \| \leqslant \left\| \left\{ \frac{1}{\lambda_k} \right\} \right\|_{M(\mathbf{Z} \setminus S_0)} \cdot \| \Lambda f_m \| = \left\| \left\{ \frac{1}{\lambda_k} \right\} \right\|_{M(\mathbf{Z} \setminus S_0)}.$$

Пространство L_∞ является сопряженным к L, и значит, замкнутый шар в L_∞ слабо компактен. Поэтому $\exists f_0 \in L_\infty$ и подпоследовательность f_m (будем писать f_m вместо f_{n_m}) такие, что $\hat{f}_m(k) \to \hat{f}_0(k)$ $\forall k \in \mathbf{Z}$. В силу компактности в C мультипликатора $\left\{ \frac{\widetilde{\lambda}_k}{\lambda_k} \right\}$ $k \in \mathbf{Z} \setminus S_0$ для некоторой подпоследовательности f_m (обозначения не меняем) $\widetilde{\Lambda} f_m \to \widetilde{\Lambda} f_0$ в $C(\mathbf{T})$. Следовательно, $\| \widetilde{\Lambda} f_0 \| = K$. С другой стороны, используя средние Фейера σ_p ($\| \sigma_p(g) \| \leqslant 1 \Leftrightarrow \| g \|_\infty \leqslant 1$), имеем

$$\| \sigma_p(\Lambda f_0) \| = \lim_{m \to \infty} \| \sigma_p(\Lambda f_m) \| \leqslant \lim_{m \to \infty} \| \Lambda f_m \| = 1,$$

а значит, $\Lambda f_0 \in L_\infty$ и $\| \Lambda f_0 \|_\infty \leqslant 1$. Отсюда

$$\sup_{f \in C: \|\Lambda f\| \leqslant 1} \| \widetilde{\Lambda} f \| = \max_{f \in L_\infty: \|\Lambda f\|_\infty \leqslant 1} \| \widetilde{\Lambda} f \|.$$

IV «Тогда» следует из I и без предположения компактности Λ. «Только тогда». Спектр компактного оператора в банаховом пространстве состоит из нуля и ненулевых собственных значений $\{\lambda_k\}$ конечной кратности (Рис, Шаудер). Рассмотрим сужение оператора Λ на подпространство $C_{\mathbf{Z}\setminus S_1}$, где $S_1 = \{k \in \mathbf{Z} : \lambda_k = 1\}$. Теперь $\lambda = 1$ не является собственным значением Λ, и значит, является регулярным значением. Поэтому область значений оператора $I - \Lambda$ (I единичен) на $C_{\mathbf{Z}\setminus S_1}$ совпадает с $C_{\mathbf{Z}\setminus S_1}$, и он непрерывно обратим. Осталось применить утверждение II теоремы. Теорема 3 доказана.

Замечание. Если в III теоремы 3 $\left\{\frac{1}{\lambda_k}\right\}_{k\in\mathbf{Z}\setminus S_0}$ — слабо компактный оператор в C, то он же действует из L_∞ в C (см. доказательство теоремы 1) и поэтому утверждение III можно усилить таким образом:

$$\sup_{f\in C:\|\Lambda f\|\leqslant 1} \|\widetilde{\Lambda} f\| = \max_{f\in C:\|\Lambda f\|_\infty\leqslant 1} \|\widetilde{\Lambda} f\|.$$

Теоремы 1—3 анонсированы в [3].

В силу теоремы 2 любой мультипликатор на спектре S можно продолжить с сохранением нормы на все пространство C. Останется ли он компактным, если был таковым на C_S? В следующей теореме полностью исследуется случай, когда S — произвольное конечное множество целых чисел (card $S < \infty$). Очевидно, любой мультипликатор на C_S (card $S < \infty$) с нормой M можно продолжить до компактного мультипликатора в C с нормой не больше $M(1+\varepsilon)$ (ε — любое положительное, выбранное заранее).

Теорема 4. *Пусть* $1 \leqslant \operatorname{card} S < \infty$, $a\{\lambda_k\}_{k\subset S}$ — *мультипликатор. Для того чтобы его можно было продолжить до компактного оператора-мультипликатора на* C *без увеличения нормы, необходимо и достаточно, чтобы существовали* $p \in S$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *и функция* $f \in L(\mathbf{T})$ *такие, что* $\forall k \in S$ $2\pi\hat{f}(k) = \lambda_k$ *и почти всюду* $e^{i\alpha}e^{-ipx}f(x) \geqslant 0$. *При этом* $\|\{\lambda_k\}\|_{M(S)} = |\lambda_p|$.

Доказательство. Как видно из формулы теоремы 2 и теоремы 1 (см. также (3)), сформулированный выше вопрос при конечном S, во всяком случае, эквивалентен следующему: дана функция $f \in L(\mathbf{T})$, для которой $2\pi\hat{f}(k) = \lambda_k \wedge \forall k \in S$; существует ли на подпространстве $L_{\mathbf{Z}\setminus S}$ (функций со спектром в $\mathbf{Z}\setminus S$) ближайший к f элемент g^*

$$\|f - g^*\|_1 = \min_{g\in L_{\mathbf{Z}\setminus S}} \|f-g\|_1?$$

Лемма. *Пусть E — подпространство $L(\mathbf{T})$ и $f \in L \setminus E$. Для того чтобы элемент $g^* \in E$ был ближайшим к f, необходимо и достаточно существование функции h, зависящей лишь от f и E, такой, что* $|h| \leqslant 1$, $h(f-g^*) = |f-g^*|$ *почти всюду и* $\forall g \in E$ $\int_{\mathbf{T}} h(x)\,g(x)\,dx = 0$. *При этом* $\|f-g^*\|_1 = \int_{\mathbf{T}} h(x)\,f(x)\,dx$.

Этот критерий, вытекающий из теоремы Хана — Банаха и теоремы об общем виде функционалов в L, будем считать известным (случай вещественнозначных функций см. в [4, с. 55]).

В рассматриваемом в теореме случае $E = L_{\mathbf{Z}\setminus S}$. Следовательно, h — тригонометрический полином со спектром в $(-S)$; $|h| = 1$ тогда, когда $f - g^* \neq 0$. Так как $f \bar{\in} L_{\mathbf{Z}\setminus S}$, то это множество положительной меры. Но $|h|^2$ — полином. Поэтому $|h| \equiv 1$.

Пусть спектр h содержится в $[-n, n]$ и, например, $\hat{h}(n) \neq 0$. Тогда

$$1 \equiv h(x)\overline{h(x)} = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \sum_{m=-n}^{n} \bar{c}_m e^{-imx} = \sum_{q=-2n}^{2n} \Big(\sum_{k-m=q} c_k \bar{c}_m\Big) e^{iqx},$$

и значит,

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 = 1, \quad \sum c_k \bar{c}_{k-q} = 0 \quad (q \neq 0).$$

Если q последовательно принимает значения $2n, 2n-1, \ldots, 1$, то получаем $c_n\bar{c}_{-n} = 0$,

$$c_n\bar{c}_{-n+1} + c_{n-1}\bar{c}_{-n} = 0, \quad c_n\bar{c}_{-n+2} + c_{n-1}\bar{c}_{-n+1} + c_{n-2}\bar{c}_{-n} = 0, \ldots .$$

Учитывая, что $c_n \neq 0$, имеем $c_{-n} = 0$, $c_{-n+1} = 0$, $c_{-n+2} = 0, \ldots$. Каждый раз прибавляется равенство нулю одного нового коэффициента ($2n$ раз). Отсюда $h = c_n e_n$, $|c_n| = 1$. Кроме того (см. лемму), $h(f - g^*) \geqslant 0$ почти всюду и

$$\|f - g^*\|_1 = \int_{\mathbf{T}} hf = e^{i\alpha} \int_{\mathbf{T}} e^{-ipx} f(x)\, dx = 2\pi e^{i\alpha} \hat{f}(p) = |\lambda_p|.$$

Теорема 4 доказана.

Если $\operatorname{card} S = 1$, то такое продолжение всегда возможно. Если же $S = \{k_1, k_2\}$ и $\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2} \in \mathbf{C}$, то для существования продолжения до компактного мультипликатора с той же нормой необходимо и достаточно $|\lambda_{k_1}| \neq |\lambda_{k_2}|$. При этом, если возможно одно такое продолжение, то возможно и бесконечное их число. (См. также [5], где приведены другие примеры).

Теоремы 1—3 применимы в задачах теории приближений периодических функций: сравнение аппроксимативных свойств различных методов суммирования рядов Фурье, двусторонние оценки приближения, новые модули гладкости, асимптотика приближения на классе и др., не только в пространстве C, в случае кратных рядов Фурье. (См. [3, 6], а также [7], где приведены доказательства теорем о приближениях из [3].)

В применениях к теории приближений члены последовательности $\{\lambda_k\}$, определяющей мультипликатор, зависят от параметра, а спектром часто является множество $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

Т е о р е м а 5. I. *Если функция φ на $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ ограничена и непрерывна почти всюду, а*

$$\varliminf_{\varepsilon \to +0} \|\{\varphi(k\varepsilon)\}\|_{M(\mathbf{Z}_0)} = K < \infty,$$

то ее можно исправить в точках разрыва и доопределить в нуле по непрерывности, после чего

$$\sup_{\varepsilon > 0} \|\{\varphi(k\varepsilon)\}\|_M = K.$$

II. *Если $\varphi \in C(\mathbb{R})$, то*

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \|\{\varphi(k\varepsilon)\}\|_{M(\mathbf{Z}_0)} = \sup_{\varepsilon > 0} \|\{\varphi(k\varepsilon)\}\|_{M(\mathbf{Z}_0)} = \sup_{\varepsilon > 0} \|\{\varphi(k\varepsilon)\}\|_M.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. I. Пусть $\delta > 0$. Тогда для некоторой последовательности $\varepsilon_n \to 0$

$$\|\{\varphi(k\varepsilon_n)\}\|_{M(\mathbf{Z}_0)} < K + \delta.$$

В силу теоремы 2 вместо $\varphi(0)$ можно подставить $\lambda_{0,n}$ и

$$\|\{\varphi(k, \varepsilon_n)\}\|_M = \|\{\varphi(k\varepsilon_n)\}\|_{M(\mathbf{Z}_0)} < K + \delta.$$

Так как всегда $|\lambda_0| \leqslant \|\{\lambda_k\}\|_M$, то $|\lambda_{0,n}| \leqslant K + \delta$. Положим теперь $\varphi(0) = \lim_{n \to \infty} \lambda_{0,n}$ (один из частичных пределов). Тогда

$$\|\{\varphi(k, \varepsilon_n)\}\|_M < K + \delta + |\varphi(0) - \lambda_{0,n}|, \quad \varliminf_{\varepsilon \to +0} \|\{\varphi(k\varepsilon)\}\|_M < K + \delta,$$

и $\delta \to 0$. Применим теорему 1 из [6] (см также замечание к ней). Функцию φ можно исправить по непрерывности, после чего

$$\sup_{\varepsilon > 0} \|\{\varphi(k\varepsilon)\}\|_M \leqslant \varliminf_{\varepsilon \to +0} \|\{\varphi(k, \varepsilon)\}\|_M \leqslant K.$$

II. Если $\varphi \in C(\mathbf{R})$, то указанное в теореме равенство вытекает из следующей цепочки неравенств, где каждый шаг очевиден (в последнем случае используется I):

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to+0}} \|\{\varphi(k\varepsilon)\}\|_{M(Z_0)} \leqslant \sup_{\varepsilon>0} \|\{\varphi(k\varepsilon)\}\|_{M(Z_0)} \leqslant \sup_{\varepsilon>0} \|\{\varphi(k\varepsilon)\}\|_{M} = \\ = \underline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \|\{\varphi(k\varepsilon)\}\|_{M(Z_0)}.$$

Теорема доказана.

1. *А. Зигмунд.* Тригонометрические ряды: В 2-х т.— М. : Мир, 1965.— Т. 1.— 538 с.
2. *Р. Эдвардс.* Ряды Фурье в современном изложении: В 2-х т.— М. : Мир, 1985.— Т. 2.— 400 с.
3. *Р. М. Тригуб.* Мультипликаторы рядов Фурье и приближение функций полиномами в пространствах C и L // Докл. АН СССР.— 1989.— 306, № 2.— С. 292—296.
4. *Н. П. Корнейчук.* Экстремальные задачи теории приближения.— М. : Наука, 1976.— 320 с.
5. *Р. М. Тригуб.* О принципе сравнения разложений Фурье и подпространствах существования в интегральной метрике // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1987.— **180**.— С. 259—261.
6. *Р. М. Тригуб.* Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1980.— **44**, № 6.— С. 1378—1409.
7. *Р. М. Тригуб.* Приближение непрерывных периодических функций с ограниченной производной полиномами // Теория отображений и приближение функций.— Киев : Наук. думка, 1989.— С. 185—195.

Получено 24.12.90