УДК 517.9

А. Н. КОЧУБЕЙ, д-р физ.-мат. наук (Ин-т «Укрэнергосетьпроект», Киев)

Оператор Лиувилля

Получено полное описание инфинитезимального оператора однопараметрической группы изометрических операторов, построенной по динамической системе с отражением траекторий в области с кусочно-гладкой границей.

Одержано повний опис інфінітезімального оператора однопараметричної групи ізометричних операторів, побудованої за динамічною системою з відбиттям траєкторій в області з кусково-гладкою границею.

1. Рассмотрим гамильтонову систему

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где $n > 1$, $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$, $q = (q_1, \ldots, q_n) \in G$, $G \subset \mathbb{R}^n$ — область с кусочно-гладкой границей ∂G, состоящей из конечного числа подмногообразий коразмерности один,

$$H(p, q) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} p_i^2 + \Phi(q).$$

Предположим, что Φ — вещественная функция, $\Phi \in C^2(\overline{G})$ (т. е. функция Φ, заданная на $\overline{G}$, допускает продолжение $\Phi_1 \in C^2(G_1)$, $G_1 \supset \overline{G}$ — некоторая более широкая область), $\operatorname{grad} \Phi(q) = 0$ при $q \in \partial G$. Если область G не ограничена, будем также предполагать, что

$$|\operatorname{grad} \Phi(q)| \leqslant C(|q|^2 + 1)^{1/2}. \tag{2}$$

Условие (2) обеспечивает [1] неограниченное продолжение интегральных кривых системы (1), не пересекающих границу $\partial\Omega = \mathbb{R}^n \times \partial G$ области $\Omega = \mathbb{R}^n \times G$.

Пусть $x = (p, q) \in \Omega$. Определим в $\overline{\Omega}$ кусочно-непрерывную кривую $X(t; x)$ следующим образом. Пусть $X(0; x) = x$; далее $X(t; x)$ представляет собой интегральную кривую системы (1) до момента $t_1(x)$ пересечения с границей $\partial\Omega$ (включительно); пусть $x^1 = (p^1, q^1) = X(t_1(x); x)$. При $t > t_1(x)$ рассмотрим интегральную кривую $X(t - t_1(x); x_*^1)$ системы (1) с начальной точкой $x_*^1 = (p_*^1, q^1)$, где

$$p_*^1 = p^1 - 2(n(q^1), p^1)\, n(q^1), \tag{3}$$

$n(q^1)$ — орт внутренней нормали к ∂G в точке q^1 (условие «абсолютно упругого отражения»), и начальным моментом времени $t_1(x)$. Повторяя эту процедуру, определим $X(t; x)$ для всех $t > 0$; определение корректно, если интегральные кривые пересекают границу каждый раз в регулярных точках. Известно [2, 3], что это действительно так для почти всех начальных значений x. Подобным образом определяется $X(t; x)$ и при $t < 0$. Семейство отображений $S_t x = X(t; x)$ образует группу, относительно которой мера Лебега в Ω инвариантна.

Группе S_t соответствует группа I_t изометрических операторов в пространстве L_α $(1 \leqslant \alpha < \infty)$:

$$(I_t f)(x) = f(S_t x), \quad x \in \Omega.$$

Пусть A — инфинитезимальный оператор группы I_t. На финитных гладких функциях действие оператора A задается скобкой Пуассона

$$Af = \{f, H\} = \sum_{i=1}^{n} \left(p_i \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right), \quad f \in C_0^1(\Omega) \tag{4}$$

[1, 3, 4]. Цель настоящей работы — полное описание оператора A; это означает, в частности, описание класса начальных данных, обеспечивающих сильную разрешимость уравнения Лиувилля $\frac{\partial u}{\partial t} = -Au$. Наибольший интерес представляют случай $\alpha = 2$ (группа I_t в L_2 изучается в эргодической теории [2] и теории рассеяния [5]) и случай $\alpha = 1$ (в связи с задачами статистической механики [3, 4], где $n = 3N$, $G = \{Q = (Q_1, \ldots, Q_n),\ Q_j \in \mathbb{R}^3 \| Q_j - Q_k | > a;\ j, k = 1, \ldots, N;\ a > 0\}$). Для последнего случая рассматриваемая задача поставлена в [3, 4].

2. Пусть $u \in L_\alpha(\Omega)$. Будем говорить, что $\{u, H\} \in L_\alpha(\Omega)$, где скобка Пуассона понимаются в слабом смысле, если существует такая (очевидно, единственная) функция $f \in L_\alpha(\Omega)$, что для любой вещественной функции $\varphi \in C_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega u(x) \{\varphi, H\}(x)\, dx = -\int_\Omega f(x) \varphi(x)\, dx. \tag{5}$$

Обозначим через D множество всех $u \in L_\alpha(\Omega)$, для которых в слабом смысле $\{u, H\} \in L_\alpha(\Omega)$.

Будем говорить, что подмножество N границы $\partial\Omega$ имеет меру нуль, если для любой карты (V, ρ), $\rho: V \to \mathbb{R}^{2n-1}$, на каждой из регулярных частей границы $\partial\Omega$

$$\operatorname{mes} \rho(N \cap V) = 0.$$

Теперь имеет смысл выражение «почти всюду на $\partial\Omega$». Можно считать, что регулярные компоненты границы пересекаются по подмногообразиям меньших размерностей, так что множество N_0 особых точек границы имеет меру нуль.

Пусть $N_1 \subset \partial\Omega \setminus N_0$—множество тех точек, в которых векторное поле F, определяемое правыми частями системы (1), касательно к границе или обращается в нуль. Если $x = (p, q) \in N_1$, то векторное поле в точке x равно $(0, \ldots, 0, p_1, \ldots, p_n)$, где $p \perp n(q)$, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i n_i(q) = 0$. Последнее условие задает в каждой регулярной компоненте $\partial\Omega$ подмногообразие коразмерности один, т. е. множество N_1 имеет меру **нуль**.

Если $x_0 \in \partial\Omega \setminus N_0 \setminus N_1$, то в Ω существует интегральная кривая $x(t) = x(t; x_0)$ системы (1), проходящая через точку x_0 и пересекающая границу под ненулевым углом. Эта кривая удовлетворяет либо условию $x(0) = x_0$, либо условию $x(\theta) = x_0$, где $\theta > 0$, в зависимости от направления векторного поля F в точке x_0. Соответствующие множества точек $x_0 \in \partial\Omega \setminus N_1 \setminus N_0$ будем обозначать через Γ_+ и Γ_-.

Л е м м а 1. *Пусть $u \in D$. Для почти всех $x_0 \in \partial\Omega$ функция $z(t) = u(x(t; x_0))$ является (после исправления на множестве меры нуль) абсолютно непрерывной на некотором замкнутом интервале $[0, \delta(x_0)]$, если $x_0 \in \Gamma_+$, или $[\theta - \delta(x_0), \theta]$, если $x_0 \in \Gamma_-$, причем $z'(t) = f(x(t; x_0))$, где $f = \{u, H\}$ (скобка Пуассона понимается в слабом смысле).*

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем для $x_0 \in \Gamma_+$; случай $x_0 \in \Gamma_-$ рассматривается аналогично.

По теореме о выпрямлении [6] существует окрестность U (в $\mathbb{R}^{2n}$) точки x_0 и C^1-диффеоморфизм Ψ, определенный на $\overline{U}$, обладающие следующими свойствами:

$$\Gamma' = \partial\Omega \cap U \subset \Gamma_+, \quad \Psi(x(t; x')) = \Psi(x') + et, \quad e = (1, 0, \ldots, 0),$$

для всех $x' \in \Gamma'$ и при достаточно малых t, например, $t \in [0, \delta(x_0)]$; диффеоморфизм $y = \Psi(x)$ переводит дифференциальное выражение $\varphi \to \{\varphi, H\}$ в дифференцирование $\partial/\partial y_1$. Будем считать окрестность U ограниченной и настолько малой, что $\Psi(\Gamma')$ однозначно проектируется на гиперплоскость, ортогональную вектору e; при этом на $\Psi(\Gamma')$ индуцируется мера $\nu(dy')$. Достаточно доказать утверждение леммы для почти всех точек из Γ'.

Пусть $U_0 = U \cap \Omega$, $V_0 = \Psi(U_0)$. Рассмотрим функцию

$$g(y) = \begin{cases} f(\Psi^{-1}(y))\,\mu(y), & y \in V_0; \\ 0, & y \notin V_0, \end{cases}$$

где μ — якобиан преобразования Ψ^{-1}. Очевидно, $g \in L_\alpha(\mathbb{R}^{2n})$. Пусть $\omega_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ — усредняющее ядро, $\omega_\varepsilon(x) = 0$ при $|x| \geqslant \varepsilon$ (об усреднении по Соболеву см., например, [7]). Тогда

$$\| g - \omega_\varepsilon * g \|_{L_\alpha(\mathbb{R}^{2n})} \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

В частности,

$$\int\limits_\Delta | g(y) - (\omega_\varepsilon * g)(y) |^\alpha dy \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \tag{6}$$

где $\Delta = \{y = \Psi(x') + et,\ x' \in \Gamma',\ t \in [0, \delta(x_0)]\}$. По теореме Фубини левая часть (6) равна

$$\int\limits_{\Psi(\Gamma')} \nu(dy') \int\limits_0^{\delta(x_0)} |g(y' + et) - (\omega_\varepsilon * g)(y' + et)|^\alpha dt.$$

Для почти всех y' внутренний интеграл конечен и представляет собой суммируемую функцию от y', сходящуюся в среднем к нулю при $\varepsilon \to 0$. Поэтому существует такая последовательность $\varepsilon_k \to 0$, что для почти всех $y' \in \Psi(\Gamma')$

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} |g(y'+et)-(\omega_{\varepsilon_k} * g)(y'+et)|^\alpha dt \to 0, \quad k\to\infty. \tag{7}$$

Пусть $\sigma \in C_0^\infty(0, \delta(x_0))$. Обозначим

$$\eta_{\varepsilon,x'}(s) = \int\limits_0^{\delta(x_0)} \omega_\varepsilon(\Psi(x')+et-\Psi(s))\,\sigma(t)\,dt, \quad s\in U_0,$$

где $\varepsilon > 0$, $x'\in\Gamma'$. Ясно, что $\eta_{\varepsilon,x'} \in C^1(U_0)$. Вблизи ∂U_0 функция $\eta_{\varepsilon,x'}$ равна нулю. Действительно, пусть $\operatorname{supp}\sigma \subset [\gamma, \delta(x_0)-\gamma]$, $0<\gamma<\delta(x_0)$. Отрезок прямой $\{\Psi(x')+et,\ \gamma\leqslant t\leqslant \delta(x_0)-\gamma\}$ не пересекает многообразие $\Psi(\partial U_0)$, а значит, и его достаточно малую окрестность. Поэтому существуют такие числа $\beta > 0$, $d>0$, что из неравенства $\operatorname{dist}(s, \partial U_0) < \beta$ следует

$$|\Psi(x')+et-\Psi(s)| > d,$$

и при $\varepsilon \leqslant d$ $\omega_\varepsilon(\Psi(x')+et-\Psi(s))=0$, откуда $\eta_{\varepsilon,x'}(s)=0$. Теперь функцию $\eta_{\varepsilon,x'}$, $\varepsilon\leqslant d$, можно продолжить до функции из $C_0^1(\Omega)$ (для которой оставим прежнее обозначение).

Из теоремы Фубини следует, что для почти всех $x'\in\Gamma'$ функция $f(x(t; x'))$ принадлежит $L_\alpha(0, \delta(x_0))$. Если $\varepsilon_k \leqslant d$, то

$$\int\limits_\Omega f(s)\,\eta_{\varepsilon_k,x'}(s)\,ds - \int\limits_0^{\delta(x_0)} f(x(t;x'))\,\sigma(t)\,dt = \int\limits_0^{\delta(x_0)} \sigma(t)\,dt \Big[\int\limits_{U_0} f(s)\,\omega_{\varepsilon_k}(\Psi(x') +$$

$$+ et - \Psi(s))\,ds - f(x(t;x'))\Big] = \int\limits_0^{\delta(x_0)} \sigma(t)\,[(\omega_{\varepsilon_k} * g)(\Psi(x')+et) -$$

$$-g(\Psi(x')+et)]\,dt \to 0$$

при $k\to\infty$ для почти всех $x'\in\Gamma'$. Здесь использовано (7) и тот факт, что $d\Psi(x') = d\Psi(x(t;x'))\circ d_{x'}x(t;x')$, откуда в силу теоремы Лиувилля $\mu(\Psi(x')+et)=1$ для всех $t\in[0,\delta(x_0)]$. Таким образом, при $k\to\infty$

$$\int\limits_\Omega f(s)\,\eta_{\varepsilon_k,x'}(s)\,ds \to \int\limits_0^{\delta(x_0)} f(x(t;x'))\,\sigma(t)\,dt \tag{8}$$

для почти всех $x'\in\Gamma'$.

По определению диффеоморфизма Ψ

$$\{\eta_{\varepsilon,x'}, H\}(s) = \int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{\partial}{\partial\xi_1}\omega_\varepsilon(\Psi(x')+et-\xi)|_{\xi=\Psi(s)}\,\sigma(t)\,dt =$$

$$= -\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{\partial}{\partial t}\omega_\varepsilon(\Psi(x')+et-\Psi(s))\,\sigma(t)\,dt = \int\limits_0^{\delta(x_0)} \omega_\varepsilon(\Psi(x')+et-$$

$$-\Psi(s))\,\sigma'(t)\,dt.$$

Аналогично (8) для почти всех $x'\in\Gamma'$ при $k\to\infty$

$$\int\limits_\Omega u(s)\,\{\eta_{\varepsilon_k}, H\}(s)\,ds \to \int\limits_0^{\delta(x_0)} u(x(t;x'))\,\sigma'(t)\,dt. \tag{9}$$

Полагая в (5) $\varphi = \eta_{\varepsilon_k}$ и переходя к пределу при $k\to\infty$, с учетом

(8), (9) получаем

$$\int_0^{\delta(x_0)} u(x(t;\ x'))\,\sigma'(t)\,dt = -\int_0^{\delta(x_0)} f(x(t;\ x'))\,\sigma(t)\,dt \qquad (10)$$

для произвольной $\sigma \in C_0^\infty(0, \delta(x_0))$ и для всех $x' \in \Gamma'$, кроме множества меры нуль, не зависящего от σ. Из (10) следует [7] утверждение леммы.

3. Пусть задано множество $M \subset \partial\Omega$ меры нуль, и пусть $\mathfrak{M} \subset \Omega$ состоит из тех $x \in \Omega$, для которых траектория $X(t; x)$, $0 < t \leqslant T$ (T — фиксированное число) хотя бы один раз пересекает границу $\partial\Omega$ в точке из M.

Лемма 2. *Лебегова мера множества $\mathfrak{M}$ равна нулю.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что для любой точки $x \in \mathfrak{M}$ существует такая окрестность U, что

$$\operatorname{mes}(U \cap \mathfrak{M}) = 0.$$

Пусть $t_1(x) < \ldots < t_m(x) \leqslant T$ — моменты пересечения траекторией $X(t; x)$ границы $\partial\Omega$. Выберем окрестность U так, чтобы число m было конечным и одинаковым для всех $x \in U$ (множество точек $x \in \Omega$, для которых этого сделать нельзя, лежит на подмногообразии меньшей размерности [3]). В области U (считая ее достаточно малой) введем новые координаты $t_1(x)$, $b_1(x)$, где $b_1(x) = X(t_1(x); x)$. Отображение $x \to (t_1(x),\ b_1(x))$ есть C^1-диффеоморфизм, откуда

$$\operatorname{mes}\{x \in U \mid b_1(x) \in M\} = 0.$$

Пусть $\chi: \partial\Omega \setminus N_0 \to \partial\Omega \setminus N_0$ — отображение отражения, т. е. $\chi y = y_*$ (см. п. 1); пусть, далее, $b_2: \Gamma_+ \to \partial\Omega$ переводит точку $x_0 \in \Gamma_+$ в точку первого пересечения интегральной кривой системы (1), начинающейся в точке x_0, с границей $\partial\Omega$. Отображения χ и b_2 являются локальными C^1-диффеоморфизмами регулярной части границы. Игнорируя множества меры нуль, можно считать, что $X(t_2(x); x) = b_2 \circ \chi(X(t_1(x); x))$, откуда, в силу уже доказанного,

$$\operatorname{mes}\{x \in U \mid X(t_2(x); x) \in M\} = 0.$$

Повторяя эти рассуждения еще $(m-2)$ раз, завершаем доказательство леммы.

Докажем теперь следующий «глобальный» вариант леммы 1.

Лемма 3. *Пусть $u \in D$. Для почти всех $x \in \Omega$ функция $Z(t) = u(X(t; x))$ (после исправления на множестве меры нуль) абсолютно непрерывна по $t > 0$ в промежутках между моментами пересечения границы траекторией $X(t; x)$; при этом $Z'(t) = f(X(t; x))$, где $f = \{u, H\}$; (в слабом смысле), $f(X(\cdot; x)) \in L_\alpha^{\mathrm{loc}}(0, \infty)$.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что множество $\mathfrak{M}_0 = \{x \in \Omega | F(x) = 0\}$ лежит на подмногообразии $\{(p, q) \in \Omega \mid p = 0\}$ коразмерности $n > 1$. Отсюда (ср. [3]) следует, что для почти всех $x \in \Omega$ траектория $X(t; x)$ не пересекает $\mathfrak{M}_0$; далее будут рассматриваться только такие траектории.

Зафиксируем произвольным образом $x_0 \in \Omega$ и докажем существование такой окрестности $U \ni x_0$, что утверждение леммы выполняется для почти всех $x \in U$. Зафиксируем произвольное $T > 0$ и предположим, отбрасывая множество меры нуль, что траектория $X(t; x_0)$ при $0 < t < T$ пересекает границу конечное число раз в ее регулярных точках $t_1(x_0), \ldots, t_k(x_0)$ (случай, когда траектория не пересекает границу, проще и рассматривается аналогично).

Покроем отрезок траектории $X(t; x_0)$, $0 \leqslant t \leqslant t_1(x_0)$, конечным числом шаров $V_{11}, \ldots, V_{1,l_1}$ с центрами на нем так, чтобы в каждом из них имело место выпрямление траекторий некоторым диффеоморфизмом и каждый шар пересекался только с двумя соседними (а V_{11} и V_{1,l_1} — с одним соседним шаром). Аналогичное покрытие $V_{\mu\nu}$ ($\mu = 1, \ldots, k$; $\nu = 1, \ldots, l_\mu$) введем для последующих отрезков траектории. Шары нумеруются в порядке роста параметра t. Выберем окрестность U так, чтобы вся трубка $W = \{X(t; x),\ x \in U,\ t \in [0, t_k]\}$ содержалась внутри покрытия.

Рассмотрим последний шар V_{k,l_k} Рассуждая, как в доказательстве леммы 1, найдем такое множество $N_{k,l_k} \subset \partial V_{k,l_k} \cap W \subset V_{k,l_k-1}$ сферической меры нуль, что требуемое утверждение выполнено для всех участков траекторий, идущих внутрь шара V_{k,l_k} через множество

$$M_{k,l_k} = (\partial V_{k,l_k} \cap W) \setminus N_{k,l_k}.$$

Эти траектории при меньших t проходят через часть границы $\partial V_{k,l_k-1}$, лежащую вне V_{k,l_k}. Поскольку трубка траекторий задает C^1-диффеоморфизм множеств на сферах, найдем на указанной части $W_{k,l_k-1} \subset \partial V_{k,l_k-1}$ множество M_{k,l_k-1}, дополнение которого в $W_{k,l_k-1} \cap W$ имеет меру нуль и обладает тем свойством, что утверждение леммы выполнено для траекторий, идущих из M_{k,l_k-1} в $V_{k,l_k-1} \cup V_{k,l_k}$. Повторяя этот процесс, найдем множество M_{k1}, лежащее на границе шара V_{k1} (и не принадлежащее следующим шарам) с аналогичным свойством, относящимся к отрезкам траекторий с $t_{k-1}(x) < t < t_k(x)$.

Прообраз M_{k1} при отражении $x \to x_*$ имеет полную меру в множестве, высекаемом трубкой траекторий из сферы $\partial V_{k-1,\, l_{k-1}}$. Повторяя все рассуждения, в конце концов получим на сфере ∂V_{11} множество M_{11} полной меры в $\partial V_{11} \cap W$ такое, что утверждение леммы справедливо на всех траекториях, проходящих через M_{11}. Теперь искомое утверждение следует из выпрямляемости траекторий в V_{11}.

4. Пусть $u \in D$. Согласно лемме 1 для почти всех $x \in \partial\Omega$ функция u имеет в точке x предельное значение $u(x)$ вдоль интегральной кривой системы (1), проходящей через точку x. Более того, для почти всех $x \in \partial\Omega$ существуют одновременно предельные значения $u(x)$, $u(x_*)$.

Т е о р е м а. *Область определения $D(A)$ оператора A состоит из всех тех функций $u \in D$, для которых $u(x) = u(x_*)$ для почти всех $x \in \partial\Omega$. Если $u \in D(A)$, то $Au = \{u, H\}$, где скобка Пуассона понимается в слабом смысле.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Временно обозначим оператор, описанный в формулировке теоремы, через A_1, так что $D(A_1) = \{u \in D \mid u(x) = u(x_*)$ почти всюду на $\partial_\Omega\}$, $A_1 u = \{u, H\}$ (в слабом смысле). Докажем, что $A_1 = A$.

Пусть $u \in D(A_1)$. Тогда в силу леммы 2 для почти всех $x \in \Omega$ функция $Z(t) = u(X(t; x))$ непрерывна на полуоси $[0, \infty)$. Учитывая лемму 3, получаем для почти всех $x \in \Omega$

$$u(X(t;\, x)) - u(x) = \int_0^t f(X(\tau;\, x))\, d\tau,$$

где

$$f = \{u, H\} \in L_\alpha(\Omega), \quad f(X(\cdot\,;\, x)) \in L_\alpha^{\mathrm{loc}}(0, \infty).$$

Отсюда

$$\left\| \frac{1}{t} [u(X(t;\,\cdot)) - u] - f \right\|_{L_\alpha(\Omega)} \leqslant \frac{1}{t} \int_0^t \| I_\tau f - f \|_{L_\alpha(\Omega)} d\tau. \tag{11}$$

Поскольку группа I_τ сильно непрерывна [3], то функция $\| I_\tau f - f \|$ непрерывна по τ и обращается в нуль при $\tau = 0$, так что правая часть (11) стремится к нулю при $t \to 0$. Это означает, что $u \in D(A)$, $Au = f$, т. е. $A_1 \subset \subset A$.

Ясно, что оператор A_1 плотно задан. Его область определения инвариантна относительно группы I_τ. Действительно, предельные значения вдоль траекторий у функций u и $I_\tau u$ одни и те же. С другой стороны, пусть $u \in \in D(A_1)$, $v_\tau = I_\tau u$. Тогда

$$\frac{dv_\tau}{d\tau} = Av_\tau = I_\tau A u = I_\tau A_1 u = I_\tau \{u, H\},$$

откуда, в частности, следует, что $dv_\tau/d\tau \in L_\alpha(\Omega)$. Для любой вещественной функции $\varphi \in C_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega v_\tau(x)\{\varphi, H\}(x)\,dx = \int_\Omega v_\tau(x)\left[\frac{\partial}{\partial t}(I_t\varphi)(x)\right]_{t=0} dx =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_\Omega v_\tau(x)(I_t\varphi)(x)\,dx\right]_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_\Omega (I_{-t}v_\tau)(x)\,\varphi(x)\,dx\right]_{t=0} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial s}\left[\int_\Omega v_s(x)\,\varphi(x)\,dx\right]_{s=\tau} = -\int_\Omega \frac{\partial v_\tau}{\partial \tau}(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

т. е. $v_\tau \in D(A_1)$.

По теореме X.49 из [1] оператор A является замыканием оператора A_1. Поэтому для доказательства теоремы осталось убедиться, что оператор A_1 замкнут.

Пусть $u_m \in D(A_1)$, $f_m = A_1 u_m$, $u_m \to u$, $f_m \to f$ в $L_\alpha(\Omega)$. Из определения множества D видно, что $u \in D$, $f = \{u, H\}$ (в слабом смысле). Далее будем пользоваться обозначениями из доказательства леммы 1. По теореме Фубини

$$\|u_m - u\|_{L_\alpha(\Omega)} \geqslant \|u_m - u\|_{L_\alpha(u_0)} = \left\{\int_{V_0} |u_m(\Psi^{-1}(\xi)) - u(\Psi^{-1}(\xi))|^\alpha \mu(\xi)\times\right.$$

$$\left.\times\, d\xi\right\}^{1/\alpha} \geqslant \gamma\left\{\int_{\Psi(\Gamma')} \nu(dy')\int_0^{\delta(x_0)} |u_m(\Psi^{-1}(y'+et)) - u(\Psi^{-1}(y'+et))|^\alpha dt\right\}^{1/\alpha},$$

$$\gamma > 0.$$

Отсюда следует существование такой последовательности $\{m_k\}$, что для почти всех $x' \in \Gamma'$

$$\int_0^{\delta(x_0)} |u_{m_k}(x(t;\,x')) - u(x(t;\,x'))|^\alpha dt \to 0, \quad k \to \infty. \tag{12}$$

Заменяя, если потребуется, последовательность $\{m_k\}$ ее подпоследовательностью, имеем

$$\int_0^{\delta(x_0)} |f_{m_k}(x(t;\,x')) - f(x(t;\,x'))|^\alpha dt \to 0, \quad k \to \infty. \tag{13}$$

Согласно (10) $f_m(x(t;\,x'))$ является (при каждом m) обобщенной производной функции $u_m(x(t;\,x'))$, а $f(x(t;\,x'))$ — обобщенной производной $u(x(t;\,x'))$. Соотношения (12), (13) означают, что $u_{m_k}(x(\cdot;\,x')) \to u(x(\cdot;\,x'))$ в пространстве Соболева $W_\alpha^1(0, \delta(x_0))$. По теореме вложения [7] $u_{m_k}(x(t;\,x')) \to u(x(t;\,x'))$ равномерно по $t \in [0, \delta(x_0)]$. В частности $u_{m_k}(x') \to u(x')$ для почти всех $x' \in \Gamma$. Уменьшая, если потребуется, окрестность U и переходя к подпоследовательности, можно показать также, что $u_{m_k}(x'_*) \to u(x'_*)$. Таким образом, для почти всех $x' \in \Gamma'$ и, тем самым, для почти всех $x \in \partial\Omega$ получаем равенство $u(x) = u(x_*)$. Теорема доказана.

5. Замечания. А) В механике системы упругих шаров [3, 4]; вид области G указан выше, в п. 1) естественно рассматривать сужение группы I_t в инвариантное для нее подпространство функций, симметрических относительно перестановки аргументов Q_j. Инфинитезимальный оператор этого сужения получается сужением на Y оператора A: область его определения есть $Y \cap D(A)$.

Б). Теорема остается справедливой и в том случае, когда «абсолютно упругое» отражение (3) заменяется преобразованием

$$p_* = p - (1+k)(n(q),\ p)\,n(q),\ 0 < k < 1 \tag{14}$$

(по поводу механического смысла величины k—коэффициента восстановления при не абсолютно упругом соударении — см. [8]). Определитель линейного преобразования (14) равен $-k$. Пользуясь этим, нетрудно, повторяя рассуждения из [3], показать, что в данном случае I_t $(t > 0)$ — обратимая полугруппа сжатий.

1. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики; В 4-х т.— М. : Мир, 1978.— Т. 2.— 400 с.
2. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
3. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В.* Математические основы классической статистической механики.— Киев : Наук. думка, 1985.— 264 с.
4. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И.* Математические проблемы статистической механики системы упругих шаров // Успехи мат. наук.— 1990.— 45, № 3.— С. 136—182.
5. *Лакс П., Филлипс Р.* Теория рассеяния.— М. : Мир, 1971.— 312 с.
6. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Наука, 1984.— 272 с.
7. *Мынбаев К. Т., Отелбаев М. О.* Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов.— М. : Наука, 1988.— 288 с.
8. *Кильчевский Н. А.* Курс теоретической механики: В 2-х т.— М. : Наука, 1977. — Т. 2.— 544 с.

Получено 21.02.91