УДК 519.21

Н. Н. ЛЕОНЕНКО, канд. физ.-мат. наук, А. Я. ОЛЕНКО, асп. (Киев. ун-т)

Тауберова и абелева теоремы для корреляционной функции однородного изотропного случайного поля

Доказаны теоремы тауберового и абелевого типа для неинтегрируемых корреляционных функций однородных изотропных случайных полей и рассмотрены приложения этих теорем к изучению асимптотических распределений локальных функционалов от гауссовских полей.

Доведені теореми тауберового та абелевого типу для неінтегровних кореляційних функцій однорідних ізотропних випадкових полів та розглянуто застосування цих теорем до вивчення асимптотичних розподілів локальних функціоналів від гаусівських полів.

1. Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности $n \geqslant 1$, $v(r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| > r\}$ — шар в $\mathbb{R}^n$. На протяжении всей статьи

$\xi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$,— действительное измеримое непрерывное в среднем квадратическом однородное и изотропное в широком смысле случайное поле с нулевым средним и корреляционной функцией $B_n(r) = B_n(\|x\|) = M\xi(0) \times \xi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Известно (см., например, [1, с. 6]), что существует такая ограниченная неубывающая функция $\Phi(\lambda)$, $\lambda \geqslant 0$, называемая спектральной функцией поля $\xi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, что справедливо спектральное разложение

$$B_n(r) = 2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \int_0^\infty \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{n-2}{2}}} d\Phi(\lambda), \tag{1}$$

где $J_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка $\nu > -1/2$. В дальнейшем без ограничения общности считаем, что

$$\int_0^\infty d\Phi(\lambda) = B_n(0) = 1.$$

Отметим (см. замечание 1.2.1 в книге [2]), что в (1) по непрерывности можно считать $\nu \geqslant -1/2$, включив в формулу (1) и размерность $n = 1$.

Из результатов работ [1, с. 26] и (2, с. 31—33] следует

$$b_n(r) = D\left[\int_{v(r)} \xi(x)\,dx\right] = \int_{v(r)} \times \int_{v(r)} B_n(\|x-y\|)\,dxdy = (2\pi)^n r^{2n} \times$$

$$\times \int_0^\infty J^2_{n/2}(\lambda r)\,(\lambda r)^{-n} d\Phi(\lambda) = \frac{4\pi^n}{n\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}\, r^n \int_0^{2r} z^{n-1} B_n(z)\, I_{1-\left(\frac{z}{2r}\right)^2} \times$$

$$\times \left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) dz, \tag{2}$$

где здесь и далее

$$I_\mu(p, q) = \frac{1}{B(p, q)} \int_0^\mu t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt, \quad p > 0, \quad q > 0, \quad \mu \in [0, 1]$$

— неполная бета-функция.

В данной статье нас будет интересовать связь поведения функции $\Phi(\lambda)$ при $\lambda \to +0$ и функции $b_n(r)$ (или $B_n(r)$) при $r \to +\infty$.

Отметим, что формула (1) представляет собой интегральное преобразование ганкелевого типа. Используя формулу обращения (см., например, [1, с. 7]), из результатов работы [3] можно получить такой результат: для того чтобы $\Phi(\lambda)/\lambda^\alpha \sim c$, $\lambda \to +0$ необходимо и достаточно, чтобы $B_n(r) \times r^\alpha \sim c'$, $r \to \infty$, где $\alpha > n$. Однако при $\alpha \in (0, n)$ и $n \geqslant 2$ подобные результаты методами работы [3] получить не удается. Отметим, что если при $r \to \infty$, $B_n(r) \sim c'/r^\alpha$, $0 < \alpha < n$, то корреляционная функция не интегрируема, а при $\alpha > n$ интегрируема. С целью изучить именно случай $\alpha \in (0, n)$ будем использовать некоторые идеи Лауэ [4] (в этой работе $n = 1$) и искать связь между поведением $\Phi(\lambda)/\lambda^\alpha$ при $\lambda \to +0$ и $b_n(r)/r^{2n-\alpha}$ при $r \to \infty$ где $\alpha \in (0, n)$.

Отметим также, что в монографиях [1, 2] имеется один частный случай приведенного ниже результата при $n \geqslant 1$. В монографиях [5, 6] имеются иные варианты многомерных тауберовых теорем.

2. Тауберова и абелева теоремы. Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Если* $0 < \alpha < n$, *то каждое из соотношений*:

$a)$ $\dfrac{\Phi(\lambda)}{\lambda^\alpha} \sim A$, $\lambda \to +0$;

б) $$\frac{b_n(r)}{r^{2n-\alpha}} \sim c(n,\alpha)A, \quad r\to+\infty, \quad c(n,\alpha) =$$

$$= \frac{\alpha 2^{\alpha-1}\pi^n\Gamma(n-\alpha+1)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n-\alpha+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2n-\alpha+2}{2}\right)}$$

влечет за собой другое.

Замечание 1. Если следовать терминологии, принятой в теории преобразований Лапласа (см., например, [7, с. 498]), то утверждение: а) влечет б) — следует назвать теоремой абелевого типа, а утверждение: б) влечет а) — следует назвать теоремой тауберового типа. Мы сохраняем эту историческую преемственность.

Замечание 2. Ниже будет показано, что функции $\Phi(\lambda)/\lambda^\alpha$ и $b_n(r)/r^{2n-\alpha}$ имеют пределы в нуле и на бесконечности соответственно. Из доказательства будет видно, что каждый из этих пределов зависит только от значения другого. Следовательно, значения этих пределов и их связь можно взять из упоминавшегося частного случая, приведенного в [1, с. 31] и [2, с. 33]. В связи с этим, чтобы не делать лишних вычислений, символами L_k, $L(k)$ будем обозначать несущественные константы.

Сформулируем теорему абелевого и тауберового типа для преобразований Лапласа — Стильтьеса [8]. Пусть F — функция распределения, а f — отвечающая ей характеристическая функция.

Лемма 1. *$F(x)/x^\alpha \sim A$, $x\to+0$ тогда и только тогда, когда $y^\alpha f(iy)\sim A\Gamma(1+\alpha)$ при $y\to\infty$, $\alpha>0$.*

Доказательство теоремы 1. Пусть $\Phi(\lambda)/\lambda^\alpha\sim A\geqslant 0$, $\lambda\to+0$. Сделаем следующие преобразования:

$$\frac{b_n(r)}{r^{2n-\alpha}} = (2\pi)^n r^\alpha \int_0^\infty \frac{J^2_{n/2}(\lambda r)}{(\lambda r)^n}\Phi(d\lambda) = (2\pi)^n r^\alpha \int_0^\infty \frac{J^2_{n/2}(u)}{u^n}\Phi\left(\frac{du}{r}\right) =$$

$$= \frac{(2\pi)^n r^\alpha J^2_{n/2}(u)}{u^n}\Phi\left(\frac{u}{r}\right)\Bigg|_0^\infty - (2\pi)^n r^\alpha \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{2J_{n/2}(u)\left[J_{n/2-1}(u)+J_{n/2+1}(u)\right]u^n - nu^{n-1}J^2_{n/2}(u)}{u^{2n}} \times$$

$$\times \Phi\left(\frac{u}{r}\right)du = (2\pi)^n \int_0^\infty \frac{\Phi(u/r)}{(u/r)^\alpha}\left[\frac{nJ^2_{n/2}(u)}{u^{n+1-\alpha}} - \frac{2J_{n/2}(u)}{u^{n-\alpha}}(J_{n/2-1}(u) + \right.$$

$$\left. + J_{n/2+1}(u))\right] du.$$

Рассмотрев поведение J_ν в нуле и на бесконечности [9], легко заметить, что выражение, стоящее в квадратных скобках, абсолютно интегрируемо. Следовательно, существует $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{b_n(r)}{r^{2n-\alpha}}$.

Рассмотрим теперь случай, когда существует предел $b_n(r)/r^{2n-\alpha}$ при $r\to\infty$. Пусть $f(y)$ — характеристическая функция, отвечающая $\Phi(\lambda)$. По формуле Пуассона [10]

$$f(iy) = \frac{2y}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Re} f(u)}{u^2+y^2}du, \quad y>0.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$f(iy) = \frac{2y}{\pi}\left[\frac{1}{u^2+y^2}\int_0^u \operatorname{Re} f(v)\,dv\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{2u}{(u^2+y^2)^2}\int_0^u \operatorname{Re} f(v)\,dvdu\right] =$$

$$= \frac{2y}{\pi}\int_\pi^\infty \frac{2u}{(u^2+y^2)^2}\int_0^u \operatorname{Re} f(v)\,dvdu.$$

Так как f — характеристическая функция $\Phi(\lambda)$, то

$$\int_0^u \operatorname{Re} f(v)\,dv = \int_0^u\int_0^\infty \cos(\lambda v)\,\Phi(d\lambda)\,dv = \int_0^\infty\int_0^u \cos(\lambda v)\,dv\,\Phi(d\lambda) =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda u)}{\lambda}\,\Phi(d\lambda).$$

Можем изменить порядок интегрирования, так как

$$\sup_{v\in[0,u]}\int_A^\infty \cos(\lambda v)\,\Phi(d\lambda) \leqslant \sup_{v\in[0,u]}\Phi([A,\infty)) \to 0, \quad A\to\infty.$$

Следовательно,

$$f(iy) = \frac{2y}{\pi}\int_0^\infty \frac{2u^2}{(u^2+y^2)^2}\int_0^\infty \frac{J_{\frac{3-2}{2}}(\lambda u)}{(\lambda u)^{1/2}}\,\Phi(d\lambda)\,du. \tag{3}$$

Легко заметить, что если $n=3$, то

$$f(iy) = L(3)\,y\int_0^\infty \frac{u^2}{(u^2+y^2)^2}B_3(u)\,du.$$

Воспользовавшись формулами для дифференцирования бесселевых функций [9], получаем

$$\left(\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda u)}{(\lambda u)^{\frac{n-2}{2}}}\right)' = \frac{J_{\frac{n-2}{2}-1}(\lambda u)}{u(\lambda u)^{\frac{n-2}{2}-1}} - \frac{(n-2)\,J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda u)}{u(\lambda u)^{\frac{n-2}{2}}}.$$

Отсюда

$$\int_0^u \frac{J_{\frac{n-2}{2}-1}(\lambda v)}{(\lambda v)^{\frac{n-2}{2}-1}}\,dv = \int_0^u \frac{(n-2)\,J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda v)}{(\lambda v)^{\frac{n-2}{2}}}\,dv +$$

$$+ \int_0^u v\,\frac{d}{dv}\left(\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda v)}{(\lambda v)^{\frac{n-2}{2}}}\right)dv = (n-3)\int_0^u \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda v)}{(\lambda v)^{\frac{n-2}{2}}}\,dv + u\,\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda u)}{(\lambda u)^{\frac{n-2}{2}}}. \tag{4}$$

Пусть $n=2k+1$. Докажем по индукции, что

$$f(iy) = L(n)\,y\int_0^\infty \frac{u^{2k}B_n(u)}{(u^2+y^2)^{k+1}}\,du. \tag{5}$$

В случае $n = 3$ это было показано ранее. Воспользуемся (4):

$$\int_0^\infty \frac{u^{2k} B_n(u)}{(u^2+y^2)^{k+1}} du = -\int_0^\infty \left(\frac{u^{2k}}{(u^2+y^2)^{k+1}}\right)' \int_0^u B_n(v)\, dv du =$$

$$= -\int_0^\infty \left(\frac{u^{2k}}{(u^2+y^2)^{k+1}}\right)' \left[u B_{2(k+1)+1}(u) + 2k \int_0^u B_{2(k+1)+1}(v)\, dv\right] du =$$

$$= -\int_0^\infty \left[\left(\frac{u^{2k}}{(u^2+y^2)^{k+1}}\right)' u - \frac{2ku^{2k}}{(u^2+y^2)^{k+1}}\right] B_{2k+1}(u)\, du =$$

$$= \int_0^\infty \frac{2(k+1)\, u^{2k+2}}{(u^2+y^2)^{k+2}} B_{2k+3}(u)\, du.$$

Следовательно, для нечетных n формула (5) выполняется. Покажем справедливость (5) для четных n. Для $n = 2$:

$$\int_0^\infty \frac{u}{(u^2+y^2)^{3/2}} B_2(u)\, du = \int_0^\infty \frac{u}{(u^2+y^2)^{3/2}} \int_0^\infty J_0(\lambda u)\, \Phi(d\lambda)\, du. \tag{6}$$

Поменяем порядок интегрирования в формулах (3) и (6)

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{u^2}{(u^2+y^2)^2} \frac{J_{1/2}(\lambda u)}{(\lambda u)^{1/2}} du \Phi(d\lambda) = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \frac{u}{(u^2+y^2)^2} (\lambda u)^{1/2} \times$$

$$\times J_{1/2}(\lambda u)\, du = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\lambda \pi^{1/2}}{2^{3/2} y e^{y\lambda} \Gamma(2)} \Phi(d\lambda) = \int_0^\infty \frac{\pi^{1/2}}{2^{3/2} y e^{y\lambda}} \Phi(d\lambda),$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{u}{(u^2+y^2)^{3/2}} J_0(\lambda u)\, du\, \Phi(d\lambda) = \int_0^\infty \frac{\Phi(d\lambda)}{\lambda^{1/2}} \int_0^\infty \frac{u^{1/2}}{(u^2+y^2)^{3/2}} \times$$

$$\times J_0(\lambda u)(\lambda u)^{1/2} du = \int_0^\infty \frac{1}{y e^{y\lambda}} \Phi(d\lambda).$$

Здесь мы использовали значения Ганкелевых преобразований функции $u^\nu (u^2 + y^2)^{-\mu}$ [11]. Итак, для $n = 2$ формула (5) выполняется. Проделав те же рассуждения, что и для нечетных n, получим следующий результат.

Л е м а 2. *Пусть* $y \geqslant 0$, *тогда*

$$f(iy) = L(n)\, y \int_0^\infty \frac{u^{n-1}}{(u^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}}} B_n(u)\, du. \tag{7}$$

С л е д с т в и е. *Пусть* $B_n(r) r^\alpha \sim c'$, $r \to +\infty$, $0 < \alpha < n$. *Тогда* $\Phi(\lambda)/\lambda^\alpha \sim c' L(n) a_n(\alpha)/\Gamma(1+\alpha)$, $\lambda \to +0$, *где*

$$a_n(\alpha) = \int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{(t^2+1)^{\frac{n+1}{2}} t^\alpha} dt.$$

Вернемся к доказательству теоремы. Интегрируем по частям в (7):

$$f(iy) = L(n)\, y \int_0^\infty \frac{u(n+1)}{(u^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}+1}} \int_0^u v^{n-1} B_n(v)\, dv du.$$

Пусть n нечетное. Покажем, что можно выбрать функцию $g_n(u, y)$ таким образом, что

$$\int_0^\infty \frac{u}{(u^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}+1}} \int_0^u v^{n-1} B_n(v)\, dv du = \int_0^\infty g_n(u, y) \int_0^u v^{n-1} B_n(v)\, I_{1-(v/u)^2} \times$$

$$\times \left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) dv du. \tag{8}$$

Для нечетного n $I_{1-(v/u)^2}\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ — полином степени n от v/u. Подставляя в (8) и интегрируя по частям, получаем выражение для определения $g_n(u, y)$:

$$\int_0^u \left(\frac{v}{(v^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}+1}}\right) dv = \int_0^u g_n(v, y)\, I_{1-(u/v)^2}\left(\frac{h+1}{2}, \frac{1}{2}\right) dv.$$

Отсюда, дифференцируя, получаем

$$\frac{u}{(u^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}+1}} = \int_0^u \frac{g_n(v, y)}{v} \left(1 - \left(\frac{u}{v}\right)^2\right)^{\frac{n-1}{2}} dv.$$

Пусть $n = 2k+1$. Продолжая дифференцировать, имеем

$$\frac{g_n(u, y)}{u^{2k+1}} = L_1 \underbrace{\left(\left(\cdots\left(\left(\frac{u}{(u^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}+1}}\right)' \frac{1}{u}\right)' \cdots\right)' \frac{1}{u}\right)'}_{k \text{ раз}}.$$

Легко видеть, что на бесконечности $g_n(u, y)$ имеет порядок u^{-n-2}, а в нуле — u. Следовательно, $t^{n-\alpha} g_n(t, 1)$ абсолютно интегрируема. Отсюда получаем

$$y^\alpha f(iy) = L_2 \int_0^\infty g_n(t, 1)\, t^{n-\alpha} \frac{b_n(ty)}{(ty)^{2n-\alpha}}\, dt \sim A L_2 \int_0^\infty t^{n-\alpha} g_n(t, 1)\, dt.$$

Следовательно, по лемме 1 $\Phi(\lambda)/\lambda^\alpha \sim A$, $\lambda \to +0$. Итак, теорема справедлива, если n нечетное.

Пусть n четное. Рассмотрим следующие выражения:

$$\varphi_1(u) = \int_0^u v^n B_n(v) \left(1 - \left(\frac{v}{u}\right)^2\right)^{\frac{n-1}{2}} dv = u^{n+1} \int_0^1 t^n B_n(tu)\,(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt,$$

$$\varphi_2(u) = u^{n+1} \int_0^1 t^{n+1} B_n(tu)\,(1-t^2)^{n/2} dt.$$

Воспользуемся тем, что преобразование Меллина [12] функции $x^\alpha \times \times \int_0^\infty t^\beta f_1(xt) f_2(t)\, dt$ равно

$$g(s) = g_1(s+\alpha)\, g_2(1-s-\alpha+\beta), \tag{9}$$

где g_1 и g_2 — преобразования Меллина функций f_1 и f_2 соответственно (6.1.13 [13]). Получаем

$$g(s) = g_1(s+n+1)\, g_2(-s),$$

$$\tilde{g}(s) = g_1(s+n+1)\, \tilde{g}_2(1-s),$$

где $g(s)$ и $x(s)$ — преобразования Меллина функций φ_1 и φ_2, g_1 — преобразование Меллина B_n, а g_2 и g_2 — преобразования Меллина функций

$$\begin{cases} (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}, & |t| \leqslant 1, \\ 0, & |t| > 1, \end{cases} \quad \text{и} \begin{cases} (1-t^2)^{n/2}, & |t| \leqslant 1, \\ 0, & |t| > 1, \end{cases}$$

соответственно.

Используя (9), подберем такие функции f и $\tilde{f}$ с преобразованиями Меллина g_3 и $\tilde{g}_3$, чтобы $g(s)\, g_3(1-s+\beta_1)$ и $\tilde{g}(s)\, \tilde{g}_3(1-s+\beta_2)$ совпадали. По (6.2.31) из [13] получаем

$$g_2(-s) = \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, -\frac{s}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}-\frac{s}{2}\right)},$$

$$\tilde{g}_2(1-s) = \frac{1}{2} B\left(\frac{n+2}{2}, \frac{1-s}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}-\frac{s}{2}\right)\left(\frac{n+1-s}{2}\right)}.$$

Положим теперь

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad \beta_1 = 0;$$

$$\tilde{f}(x) = \frac{n+1}{2} e^{-x^2} + 2x^2 e^{-x^2}, \quad \beta_2 = -1.$$

Воспользовавшись (6.3.1.), (6.1.3), (6.1.5) [13], получим

$$g_3(1-s) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \text{ и } \tilde{g}_3(-s) = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2}-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right).$$

Итак, преобразования Меллина функций

$$\begin{gathered} \psi_1(t^{-2}) = \int_0^\infty e^{-x^2}\varphi_1(tx)\, dx, \\ \int_0^\infty e^{-x^2}\left(\frac{n+1}{2} + 2x^2\right)\frac{1}{x}\varphi_2(tx)\, dx \end{gathered} \tag{10}$$

отличаются только на постоянный множитель. Так как все эти выражения определены корректно для чисто мнимых s, то по формуле обращения для преобразований Меллина [12] совпадают с точностью до постоянного множителя и сами функции (10). Преобразуем первую из них:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\varphi_1(tx)\, dx = \int_0^\infty e^{-u}\frac{1}{2\sqrt{u}}\varphi_1(t\sqrt{u})\, du = |\, t\sqrt{u} = \sqrt{z}\,| =$$

$$= \int_0^\infty e^{-z/t^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{z}}\, t\varphi_1(\sqrt{z})\frac{dz}{t^2} = \frac{1}{2t}\int_0^\infty e^{-z/t^2}\frac{\varphi_1(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}\, dz.$$

Как легко заметить, последний интеграл представляет собой преобразование Лапласа функции $\varphi_1(\sqrt{z})/\sqrt{z}$. Исследуем асимптотическое поведение

$\varphi_1(z)$. Из определения $b_n(r)$ легко получить

$$\frac{b_n\left(\frac{r}{2}\right)}{\left(\frac{r}{2}\right)^n} = L_3 \int_0^r z^{n-1} B_n(z) \int_{z/r}^1 (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} dx dz.$$

Продифференцируем это тождество:

$$\left(\frac{b_n\left(\frac{r}{2}\right)}{\left(\frac{r}{2}\right)^n}\right)' = \frac{L_4}{r^2} \int_0^r z^n B_n(z) \left(1-\left(\frac{z}{r}\right)^2\right)^{\frac{n-1}{2}} dz = L_4 \frac{\varphi_1(r)}{r^2}.$$

Отсюда сразу же получаем $\varphi_1(r) \sim L_5 r^{n-\alpha+1}$ при $r \to \infty$. Следовательно, $\varphi_1(\sqrt{z})/\sqrt{z} \sim L_5 z^{\frac{n-\alpha}{2}}$ при $z \to \infty$. По тауберовым теоремам для преобразований Лапласа [7]

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \varphi_1(tx)\, dx \sim L_6/t^{n-\alpha+1}.$$

Теперь рассмотрим вторую из функций (10):

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\left(\frac{n+1}{2}+2x^2\right)\frac{1}{x}\varphi_2(tx)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{n+1}{2}+2u\right)\frac{1}{u} \times$$

$$\times \varphi_2(t\sqrt{u})\, du = |t\sqrt{u} = \sqrt{z}| = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{z}{t^2}}\left(\frac{n+1}{2}+\frac{2z}{t^2}\right)\frac{t^2}{z}\varphi_2(\sqrt{z}) \times$$

$$\times \frac{dz}{t^2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-z/t^2}\left(\frac{n+1}{2}+\frac{2z}{t^2}\right)\frac{\varphi_2(\sqrt{z})}{z}\, dz.$$

Обозначим преобразование Лапласа

$$\psi(p) := \int_0^\infty e^{-zp}\varphi_2(\sqrt{z})\, z^{-1} dz, \quad p = \frac{1}{t^2}.$$

По свойствам преобразования Лапласа [14] вторая из функций (10) равна

$$\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2}\psi(p) - 2p\psi'(p)\right).$$

Из сказанного выше следует, что $\psi(p)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $(n+1)\psi(p) - 4p\psi'(p) = L_7\psi_1(p)$. Решением этого уравнения будет функция

$$\psi(p) = L_8 \cdot p^{\frac{n+1}{4}} \int_0^p \frac{\psi_1(u)}{u^{\frac{n+5}{4}}}\, du.$$

Следовательно, $\psi(p) \sim L_9\psi_1(p)$ при $p \to 0$. Воспользовавшись тауберовыми теоремами для преобразований Лапласа [7], получаем $\varphi_2(\sqrt{z})/\sqrt{z} \sim L_{10} z^{\frac{n-\alpha-1}{2}}$ при $z \to \infty$, и следовательно,

$$\varphi_2(z) \sim L_{11} \cdot z^{n-\alpha+1}. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь функции φ_2 и φ_3, где

$$\varphi_3(u) = u^{n+1}\int_0^1 t^{n+1} B_{n+1}(tu)(1-t^2)^{n/2} dt$$

По формуле (9) преобразования Меллина для них будут иметь вид

$$g_1(s+n+1)\,\tilde{g}_2(1-s) \text{ и } \tilde{g}_1(s+n+1)\,\tilde{g}_2(1-s)$$

соответственно, где $\tilde{g}_1$ — преобразование Меллина функции B_{n+1}, а остальные функции определены так же, как и ранее. Так как в силу (1)

$$B_n(u)=\frac{L_{12}}{u^{\frac{n-2}{2}}}\int\limits_0^\infty \lambda^{1/2} J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda u)\frac{\Phi(d\lambda)}{\lambda^{\frac{n-1}{2}}},$$

$$B_{n+1}(u)=\frac{L_{13}}{u^{\frac{n-1}{2}}}\int\limits_0^\infty J_{\frac{n-1}{2}}(\lambda u)\frac{\Phi(d\lambda)}{\lambda^{\frac{n-1}{2}}},$$

то по формуле (9) $g_1(s+n+1)=g_0\left(s+\frac{n}{2}+2\right)g_4\left(1-s-\frac{n}{2}-1\frac{1}{2}\right)$ и $\tilde{g}_1(s+n+1)=\tilde{g}_0\left(s+\frac{n}{2}+1\frac{1}{2}\right)g_4\left(1-s-\frac{n}{2}-1\frac{1}{2}\right)$, где $g_0, \tilde{g}_0$ — преобразования Меллина функций $J_{\frac{n-2}{2}}$ и $J_{\frac{n-1}{2}}$ соответственно, а g_4 — преобразование Меллина $\dfrac{\Phi(d\lambda)}{\lambda^{\frac{n-1}{2}}d\lambda}$. Воспользовавшись (6.8.1) из [13], получим

$$g_0\left(s+\frac{n}{2}+2\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot 2^{s+\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(-\frac{1+s}{2}\right)},$$

$$\tilde{g}_0\left(s+\frac{n}{2}+1\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{h}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot 2^{s+\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)}.$$

Аналогично тому, как мы делали для функций φ_1 и φ_2, подбираем функции $f_0(x)=\tilde{f}_0(x)=e^{-x^2}$, $\beta_1=-2$, $\beta_2=-1$. Рассуждения, подобные предыдущим, приводят к выводу, что выражения

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\frac{1}{x^2}\varphi_2(tx)\,dx \text{ и } \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\frac{1}{x}\varphi_3(tx)\,dx$$

совпадают с точностью до постоянной.

Преобразуем их как прежде. Получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty e^{-u}\frac{1}{u^{1\,1/2}}\varphi_2(t\sqrt{u})\,du=\frac{t}{2}\int\limits_0^\infty e^{-z\cdot\frac{1}{t^2}}\frac{\varphi_2(\sqrt{z})}{z^{1\,1/2}}\,dz,$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty e^{-u}\frac{1}{u}\varphi_3(t\sqrt{u})\,du=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty e^{-z\cdot\frac{1}{t^2}}\frac{\varphi_3(\sqrt{z})}{z}\,dz.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^\infty e^{-z/t^2}\frac{\varphi_3(\sqrt{z})}{z}\,dz=L_{14}t\int\limits_0^\infty e^{-z/t}\frac{\varphi_2(\sqrt{z})}{z^{1\,1/2}}\,dz.$$

Используя (11) и тауберовы теоремы для преобразований Лапласа [7], получаем $\varphi_3(z)\sim L_{15}\cdot z^{n-\alpha+1}$, $z\to\infty$. Аналогично тому, как это делалось для φ_1, получаем

$$\varphi_3(u)=\frac{1}{u}\int_0^u v^{n+1}B_{n+1}\left(1-\left(\frac{v}{u}\right)^2\right)^{n/2}dv=L_{16}u\left(\frac{b_{n+1}\left(\frac{u}{2}\right)}{\left(\frac{u}{2}\right)^{n+1}}\right)^1.$$

Следовательно, при $r\to\infty$, $b_{n+1}(r)/r^{2(n+1)-\alpha}\sim L_{17}$. Так как теорема была доказана для нечетных n, то имеем $\Phi(\lambda)/\lambda^\alpha\sim A$, $\lambda\to+0$. Теорема 1 доказана.

Замечание 3. Пусть $\Phi(\lambda)/\lambda^\alpha\sim A$, $\lambda\to+0$. Интегрируя по частям в (1), получаем

$$B_n(r)r^\alpha=r^\alpha 2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left[\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{n-2}{2}}}\Phi(\lambda)\Big|_0^{+\infty}+r\int_0^\infty\frac{J_{n/2}(\lambda r)}{(\lambda r)^{n/2}}(\lambda r)\Phi\times\right.$$

$$\left.\times(\lambda)\,d\lambda\right]=2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\int_0^\infty r^{\alpha+1}\frac{J_{n/2}(\lambda r)}{(\lambda r)^{n/2}}(\lambda r)\Phi(\lambda)\,d\lambda.$$

Сделав замену переменных, будем иметь

$$B_n(r)r^\alpha=2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\int_0^\infty\frac{J_{n/2}(u)}{u^{n/2}}u^{\alpha+1}\frac{\Phi\left(\frac{u}{r}\right)}{\left(\frac{u}{r}\right)^\alpha}du,$$

$J_{n/2}(u)u^{\alpha+1-n/2}$ — абсолютно интегрируемая функция при $\alpha<(n-3)/2$. Поэтому в последнем выражении при $\alpha<(n-3)/2$ можем перейти к пределу под знаком интеграла. Если воспользоваться следствием, то к теореме 1 можно добавить такое эквивалентное утверждение:

в) при $\alpha<\frac{n-3}{2}$

$$B_n(r)r^\alpha\sim c_1(n,\alpha)A,$$

где

$$c_1(n,\alpha)=2^\alpha\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}.$$

3. Предельная теорема для локальных функционалов от гауссовского поля.

Теорема 1 позволяет в некоторых случаях конкретизировать теорему 2.10.3 [2], которая дополняет результаты работ [15, 16].

1. Пусть $\xi(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, — гауссовское однородное изотропное случайное поле с $M\xi(x)=0$, $M\xi^2(x)=1$ и корреляционной функцией $B_n(r)\sim c_\infty/r^\alpha$, $0<\alpha<n$.

Если выполнено 1, то интеграл от корреляционной функции поля расходится

$$\int_{\mathbb{R}^n}B_n(\|x\|)\,dx=\infty,$$

поэтому говорят о случайном поле с сильной зависимостью.

2. Пусть $G(u)$, $u\in\mathbb{R}^1$, — неслучайная функция такая, что $MG(\xi(0))=0$, $MG^2(\xi(0))<\infty$.

Если $\varphi(u)=\exp\{-u^2/2\}/\sqrt{2\pi}$, $u\in\mathbb{R}^1$, — стандартная гауссова плотность, а $\{H_k(u)\}_{k=0}^\infty$ — полиномы Чебышева — Эрмита, образующие полную ортогональную систему в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^1, \varphi(u)\,du)$, то при условии 2

$$G(u) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k H_k(u)/k!, \quad c_k = \int_{-\infty}^{\infty} G(u) H_k(u) \varphi(u)\,du, \quad k=0, 1, 2, \dots .$$

Пусть $|s(1)| = 2\pi^{n/2}/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$. Нам понадобится значение постоянной из леммы 2.1.3 [2], которую обозначим

$$c_2(n, \alpha, m) = m!\, 2^{n-m\alpha+1}\pi^{n-1/2}\Gamma\left(\frac{n-m\alpha+1}{2}\right) \Big/ \left[(n-m\alpha)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \times \right.$$

$$\left. \times\, \Gamma\left(\frac{2n-m\alpha+2}{2}\right)\right].$$

Сформулируем теперь другой основной результат статьи.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1, *причем существует изотропная спектральная плотность* $f(\lambda)$, $\lambda \geqslant 0$, *т. е.* $\Phi'(\lambda) = |s(1)| \times \lambda^{n-1} f(\lambda)$. *Тогда если* $f(\lambda)$ *непрерывна и ограничена на любом отрезке* $[A_0, \infty)$, $A_0 > 0$, *то при* $\lambda \to +0$: $f(\lambda) \sim c_0/\lambda^{n-\alpha}$, *где* $c_0 = c_\infty \alpha c_2(n, \alpha, 1) / c(n, \alpha)\,|s(1)|$. *Если* $m \geqslant 1$ *целое такое, что* $c_1 = \dots = c_{m-1} = 0$, $c_m \neq 0$, *то при* $0 < \alpha < n/m$ *и* $r \to \infty$ *конечномерные распределения случайных процессов*

$$X_r(t) = r^{\frac{m\alpha}{2}-n} \int_{v(rt^{1/n})} G(\xi(x))\,dx, \quad t \in [0, 1],$$

слабо сходятся к конечномерным распределениям процесса

$$X_m(t) = (2\pi)^{n/2} c_0^{m/2} \sqrt{t}\, \frac{c_m}{m!} \int_{\mathbb{R}^{nm}}' \frac{J_{n/2}(\|z_1 + \dots + z_m\|\, t^{1/n})}{\|z_1 + \dots + z_m\|^{n/2}} \times$$

$$\times \frac{W(dz_1) \dots W(dz_m)}{\|z_1\|^{\frac{n-\alpha}{2}} \dots \|z_m\|^{\frac{n-\alpha}{2}}},$$

где в правой части стоит кратный стохастический интеграл [17] *по комплексному гауссову белому шуму* $W(\cdot)$ *в* $\mathbb{R}^n$ (*интегрирование по гиперплоскостям* $z_i = \pm z_j$; $i, j = 1, \dots, m$ *исключается*).

Замечание 4. При $m = 1$ процесс $X_1(t)$, $t \in [0, 1]$, гауссов, при $m \geqslant 2$ процессы $X_m(t)$, $t \in [0, 1]$ не гауссовы, но $MX_m^2(t) < \infty$.

Замечание 5. При условии существования изотропной спектральной плотности процессы $X_m(t)$, $t \in [0, 1]$, в теореме 2 заданы более конкретно, чем предельные процессы в теореме 2.10.3 [2].

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим случайное поле $\eta(x) = H_m(\xi(x))$, $x \in \mathbb{R}^n$, где целое $m > 1$ выбрано из условий теоремы. Из леммы 2.1.1 [2] вытекает, что корреляционная функция этого поля $C(\|x\|) = \operatorname{cov}(\eta(0), \eta(x)) = m!\; B_n^m(\|x\|)$. Следовательно, при условии 1 из леммы 2.1.3. [2] вытекает, что при $0 < \alpha < n/m$ и $r \to \infty$

$$\sigma_m^2(r) = D\left[\int_{v(r)} H_m(\xi(x))\,dx\right] \sim c_2(n, \alpha, m)\, c_\infty^m r^{2n-m\alpha}.$$

Из леммы 2.1.5 [2] вытекает, что при $r \to \infty$

$$D\left[\int_{v(r)} G(\xi(x))\,dx\right] \sim \frac{c_m^2}{(m!)^2}\, c_\infty^m c_2(n, \alpha, m)\, r^{2n-m\alpha}.$$

Из теоремы 2.5.2. [2] следует, что при $r \to \infty$ слабые пределы конечномерных распределений процессов $X(t)$, $t \in [0, 1]$, и процессов

$$Y_{m,r}(t) = r^{\frac{m\alpha}{2}-n} \frac{c_m}{m!} \int\limits_{v(rt^{1/n})} H_m(\xi(x))\,dx, \quad t \in [0, 1],$$

совпадают (если один из них существует).

Из условия 1 и тауберовой части теоремы 1 следует, что в условиях теоремы 2 при $\lambda \to +0 : f(\lambda) \sim c_0/\lambda^{n-\alpha}$. По формуле Ито (см., например, [2, с. 104; 17])

$$H_m(\xi(x)) = \int\limits_{\mathbb{R}^{nm}}' e^{i(x,u_1+\ldots+u_m)} \left\{\prod_{j=1}^{m} f^{1/2}(\|u_j\|)\right\} W(du_1)\ldots W(du_m).$$

Используя (1.4.5) [2] и последнее соотношение, находим

$$Y_{m,r}(t) = r^{\frac{m\alpha-n}{2}} (2\pi)^{n/2} \sqrt{t}\,\frac{c_m}{m!} \int\limits_{\mathbb{R}^{nm}}' \frac{J_{n/2}(r\|y_1+\ldots+y_m\|)\,t^{1/n})}{\|y_1+\ldots+y_m\|^{n/2}} \times$$

$$\times \left\{\prod_{j=1}^{m} f^{1/2}(\|y_j\|)\prod_{j=1}^{m} W(dy_j).$$

Выполняя замену переменных $y_j z = z_j$, $j = 1, \ldots, m$, и используя полуустойчивость порядка $n/2$ гауссовского белого шума (формально $W(d(ax)) \overset{d}{=} \overset{d}{=} a^{n/2} W(dx)$), из последнего соотношения находим

$$Y_{m,r}(t) \overset{d}{=} (2\pi)^{n/2} \frac{c_m}{m!} \sqrt{t} c_0^m \int\limits_{\mathbb{R}^{nm}}' \frac{J_{n/2}(\|z_1+\ldots+z_m\|\,t^{1/n})}{\|y_1+\ldots+y_m\|^{n/2}} \times$$

$$\times \frac{r^{\frac{m}{2}(\alpha-n)}}{c_0^m} \left\{\prod_{j=1}^{m} f^{1/2}(\|y_j\|)\right\} \prod_{j=1}^{m} W(dy_j).$$

Пусть теперь

$$R_{m,r}(t) = M[Y_{m,r}(t) - X_m(t)]^2 = \frac{c_m^2}{m!}(2\pi)^n t c_0^{2m} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{nm}} \frac{J_{n/2}^2(\|z_1+\ldots+z_m\|\,t^{1/n})}{\|z_1+\ldots+z_m\|^n} Q_r(z_1, \ldots, z_m) \prod_{j=1}^{m} dz_j, \tag{12}$$

$$Q_r = Q_r(z_1, \ldots, z_m) = \left[r^{\frac{m}{2}(\alpha-n)} \frac{1}{c_0^m} \prod_{j=1}^{m} f^{1/2}\left(\frac{\|z_j\|}{r}\right) - \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{\|z_j\|^{\frac{n-\alpha}{2}}}\right]^2 \to 0, \tag{13}$$

если $\frac{\|z_j\|}{r} \to +0$, $j = 1, \ldots, m$, в силу того, что $f(\lambda) \sim c_0/\lambda^{n-\alpha}$, $\lambda \to +0$.

Пусть $\psi(r) \to \infty$, но $\psi(r)/r \to 0$ при $r \to \infty$. Разобьем интеграл в (12) на два, в первом из которых (обозначим его I_1) интегрирование ведется по множеству $B_1 = \{z_j \in \mathbb{R}^n : \|z_j\| \leqslant \psi(r),\ j = 1, \ldots, m\}$, а во втором (обозначим его I_2) — по множеству $B_2 = \mathbb{R}^{nm} \setminus B_1$. Если $(z_1, \ldots, z_m) \in B_1$, то из (13) вытекает, что при любом $\varepsilon > 0$ существует r_0 такое, что при $r > r_0$: $Q_r < \varepsilon$. Тогда из того, что $MX_m^2(t) < \infty$ следует, что $I_1 \leqslant \varepsilon L_1$, и следовательно, интеграл I_1 может быть сделан как угодно малым вместе с ε при больших r. Если $(z_1, \ldots, z_m) \in B_2$, то из условий теоремы вытекает, что $Q_r < L_2$. Используя вид множества B_2 и $MX_m^2(t) < \infty$, отсюда получаем $\lim\limits_{r\to\infty} I_2 = 0$. Таким образом, $\lim\limits_{r\to\infty} R_{m,r}(t) = 0$, откуда нетрудно получить, что для любых a_j, $j = 1, \ldots, m$,

$$\lim_{r\to\infty} M\Big(\sum_{j=1}^{p} a_j (Y_{m,r}(t) - X_m(t))\Big)^2 = 0.$$

Доказательство теоремы 2 завершено.

1. *Ядренко М. И.* Спектральная теория случайных полей.— Киев : Вища шк. Изд-во при Киев. ун-те, 1980.— 270 с.
2. *Леоненко Н. Н., Иванов А. В.* Статистический анализ случайных полей.— Киев : Вища шк. Изд-во при Киев. ун-те, 1986.— 216 с.
3. *Binghem N. H.* A tauberian theorem for integral transforms of Hankel type // J. London Math. Soc.— 1972.— 5, N 3.— P. 493—503.
4. *Лауэ Г.* Тауберовы и абелевы теоремы для характеристических функций // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1987.— 37. — С. 78—92.
5. *Мирошин Р. Н.* Пересечение кривых гауссовскими процессами.— Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1981.— 211 с.
6. *Владимиров В. С., Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И.* Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций.— М. : Наука, 1986.— 304 с.
7. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2-х т.— М. : Мир, 1984.— Т. 2.— 751 с.
8. *Widder D. V.* The Laplace transform.— Princeton : Princeton Univ. press, 1969.— 406 p.
9. *Ватсон Г.* Теория бесселевых функций: В 2-х т.— М. : Изд-во иностр. лит., 1949.— Т. 1.— 799 с.
10. *Laue G.* Zur theorie der charakteristischen Funktionen nichnegativer zufallsgroben // Trans. 6-th Prague Conf, on Information Theory.— Prague, 1973.— P. 529—546.
11. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций: В 2-х т.— М. : Наука, 1970.— Т. 2.— 327 с.
12. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье.— М. : ОГИЗ, 1948.— 480 с.
13. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина: В 2-х т.— М. : Наука, 1969.— Т. 1.— 343 с.
14. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразований Лапласа.— М. : Наука, 1965.— 287 с.
15. *Dobrushin R. L., Major P.* Noncentral limit theorem for nonlinear functional of Gaussian field // Z. Wahrscheinlichkeits theor. verw. Geb.— 1979.— 50, N 1.— P. 27—52.
16. *Taqqu M. S.* Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rang // Ibid.— 1979.— 50, N 1.— P. 53—83.
17. *Major P.* Multiole Wiener-Ito integrals // Lect. Notes, Math.— 1981.— 849.— 127 p.

Получено 25.01.91