УДК 517.938

И. Н. Грод, В. Л. Кулик

О свойствах непрерывности инвариантных торов и функции Грина линейных расширений на торе

В предположении, что система уравнений

$$d\varphi/dt = a(\varphi), \quad dx/dt = A(\varphi)x + f(\varphi), \tag{1}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in \mathcal{T}_m$, $x \in R^n$, $A(\varphi)$, $a(\varphi) \in C^r(\mathcal{T}_m)$, обладает инвариантным тором $\mathcal{T}_m$:

$$x = u(\varphi), \tag{2}$$

возникает вопрос о степени непрерывности функции $u(\varphi)$ в зависимости (2) от степени непрерывности вектор-функций $a(\varphi)$, $f(\varphi)$ и матричной функции $A(\varphi)$. Эта зависимость имеет далеко не очевидный характер. Так, правые части в (1) могут быть непрерывно дифференцируемыми, а инвариантный тор (2) может не удовлетворять даже условию Липшица по переменным φ. Изучению данного вопроса посвящено много работ (см., например [1—5]). При развитии исследований работ [1—4] обнаружилось, что функция Грина $G_0(\tau, \varphi)$ обладает несколько большей степенью непрерывности по φ, чем тор (2). Об этом и пойдет речь в настоящей статье. В первой ее части сформулированы основные результаты, а во второй приведено их доказательство.

1. Предположим сначала, что функции $a(\varphi)$, $A(\varphi)$, $f(\varphi)$ удовлетворяют условию Липшица

$$\| a(\varphi) - a(\bar\varphi) \| \leqslant \alpha \| \varphi - \bar\varphi \|, \tag{3}$$

$$\max\{\| A(\varphi) - A(\bar\varphi) \|, \| f(\varphi) - f(\bar\varphi) \|\} \leqslant L \| \varphi - \bar\varphi \|. \tag{3'}$$

Обозначив через $\varphi_t(\varphi)$ решение задачи Коши $d\varphi/dt = a(\varphi)$, $\varphi|_{t=0} = \varphi_0$, а через $\Omega_\tau^t(\varphi_0)$ матрицант линейной системы $dx/dt = A(\varphi_t(\varphi_0))x$, напомним определение функции Грина задачи об инвариантных торах.

Определение. *Пусть существует $n \times n$-мерная матрица $C(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$ такая, что для функции*

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi) C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau < 0, \\ \Omega_\tau^0(\varphi)[C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n], & \tau > 0 \end{cases} \tag{4}$$

выполняется оценка

$$\| G_0(\tau, \varphi) \| \leqslant K e^{-\gamma|\tau|} \tag{5}$$

с положительными постоянными K, γ, не зависисящими от $\tau \in R$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Тогда функцию (4) *называют функцией Грина задачи об инвариантных торах системы*

$$d\varphi/dt = a(\varphi), \quad dx/dt = A(\varphi)x. \tag{6}$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть система* (6) *имеет единственную функцию Грина* (4) *и правые части системы* (1) *удовлетворяют условиям Липшица* (3), (3′). *Тогда для разностей $G_0(\tau, \varphi) - G_0(\tau, \bar{\varphi})$, $u(\bar{\varphi}) - u(\bar{\varphi})$ при всех $\varphi, \bar{\varphi} \in \mathcal{T}_m$, $\|\varphi - \bar{\varphi}\| \leqslant 1/2$, имеют место оценки*

$$\|G_0(\tau, \varphi) - G_0(\tau, \bar{\varphi})\| \leqslant K_0 e^{\gamma|\tau|} \begin{cases} \|\varphi - \bar{\varphi}\|, & \text{если } 2\gamma > \alpha, \\ \|\varphi - \bar{\varphi}\|^{2\gamma/\alpha}, & \text{если } 2\gamma < \alpha, \\ \|\varphi - \bar{\varphi}\| \, |\ln\|\varphi - \bar{\varphi}\||, & \text{если } 2\gamma = \alpha, \end{cases} \tag{7}$$

$$\|u(\varphi) - u(\bar{\varphi})\| \leqslant K_0 \begin{cases} \|\varphi - \bar{\varphi}\|, & \text{если } \gamma > \alpha, \\ \|\varphi - \bar{\varphi}\|^{\gamma/\alpha}, & \text{если } \gamma < \alpha, \\ \|\varphi - \bar{\varphi}\| \ln\|\varphi - \bar{\varphi}\|, & \text{если } \gamma = \alpha. \end{cases} \tag{8}$$

Отказываясь от условий Липшица (3′), предположим, что матричная функция $A(\varphi)$ и вектор-функция $f(\varphi)$ являются только непрерывными и обозначим их модули непрерывности через $\omega(A; \sigma) = \sup\limits_{\|\varphi - \bar{\varphi}\| \leqslant \sigma} \|A(\varphi) - A(\bar{\varphi})\|$, $\omega(f; \sigma) = \sup\limits_{\|\varphi - \bar{\varphi}\| \leqslant \sigma} \|f(\varphi) - f(\bar{\varphi})\|$.

В этом случае справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть система* (6) *имеет единственную функцию Грина* (4), *выполняется условие Липшица* (3) *и $A(\varphi)$, $f(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$. Тогда, если только $2\gamma > \alpha$, для функции Грина имеет место оценка*

$$\|G_0(\tau, \varphi) - G_0(\tau, \bar{\varphi})\| \leqslant K_0 e^{\gamma|\tau|} \omega(A; \|\varphi - \bar{\varphi}\|), \tag{9}$$

а если $\gamma > \alpha$, то для тора (2) *справедливо следующее:*

$$\|u(\varphi) - u(\bar{\varphi})\| \leqslant K_1 \omega(A; \|\varphi - \bar{\varphi}\|) + K_2 \omega(f; \|\varphi - \bar{\varphi}\|). \tag{10}$$

Рассматривая более общий, чем (3), случай, предполагаем, что модуль непрерывности вектор-функции $a(\varphi) : \omega(a; \sigma) = \sup\limits_{\|\varphi - \bar{\varphi}\| \leqslant \sigma} \|a(\varphi) - a(\bar{\varphi})\|$ такой, что $\int\limits_{+0} \frac{d\sigma}{\omega(a; \sigma)} = \infty$ Этого вполне достаточно для единственности решения задачи Коши $\varphi_t(\varphi_0)$ (известная теорема Осгуда).

Обозначив

$$F(z) = \int\limits_d^z \frac{d\sigma}{\omega(a; \sigma)}, \quad d = \text{const}, \tag{11}$$

$$\mathcal{I}_\gamma(A; z) = e^{\gamma F(z)} \int\limits_z^\infty e^{-\gamma F(\sigma)} \frac{\omega(A; \sigma)}{\omega(a; \sigma)} d\sigma, \tag{12}$$

сформулируем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть система* (6) *имеет единственную функцию Грина* (4) *и вектор-функция $a(\varphi)$ такая, что $F(z) \xrightarrow[z \to 0]{} -\infty$. Тогда $\mathcal{I}_\gamma(\cdot; z) \xrightarrow[z \to 0]{} 0$ и имеют место оценки*

$$\|G_0(\tau, \varphi) - G_0(\tau, \bar{\varphi})\| \leqslant K_0 e^{\gamma|\tau|} \mathcal{I}_{2\gamma}(A; \|\varphi - \bar{\varphi}\|), \tag{13}$$

$$\| u(\varphi) - u(\bar{\varphi}) \| \leqslant K_1 \mathcal{J}_\gamma (A; \| \varphi - \bar{\varphi} \|) + K_2 (f; \| \varphi - \bar{\varphi} \|). \tag{14}$$

2. Очевидно, в силу периодичности функций $a(\varphi)$, $A(\varphi)$, $f(\varphi)$ их модули непрерывности обладают свойством $\omega(\cdot\,;\sigma) \equiv \omega(\cdot, d)$ — const для всех $\sigma \geqslant d$ при достаточно большом фиксированном d (например, $d = 2\pi \sqrt{m}$). Для разности функций Грина $G_0(\tau, \varphi) - G_0(\tau, \bar{\varphi})$ известно [1] следующее представление:

$$G_0(r, \varphi) - G_0(\tau, \bar{\varphi}) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau_1, \varphi) [A(\varphi_{t_1}(\varphi)) - A(\varphi_{t_1}(\bar{\varphi}))] G_{t_1}(\tau, \bar{\varphi})\, dt_1,$$

оценивая которое, получаем

$$\| G_0(\tau, \varphi) - G_0(\tau, \bar{\varphi}) \| \leqslant K^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma(|t_1| + |t_1 - \tau|)} \omega(A; \| \varphi_{t_1}(\varphi) - \varphi_{t_1}(\bar{\varphi}) \|\, dt_1. \tag{15}$$

Разность решений $\varphi_t(\varphi) - \varphi_t(\bar{\varphi})$ можно оценить следующим образом:

$$\| \varphi_t(\varphi) - \varphi_t(\bar{\varphi}) \| \leqslant F^{-1}(F(\| \varphi - \bar{\varphi} \| + |t|)). \tag{16}$$

Подставляя (16) в (15), имеем

$$\| G_0(\tau, \varphi) - G_0(\tau, \bar{\varphi}) \| \leqslant K^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma(|t_1| + |t_1 - \tau|)} \omega(A; F^{-1}(|t_1| + F(\| \varphi - \bar{\varphi} \|)))\, dt_1.$$

Отсюда непосредственно получаем

$$\| G_0(r, \varphi) - G_0(\tau, \bar{\varphi}) \| \leqslant K^2 e^{\gamma|\tau|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\gamma|t_1|} \omega(A; F^{-1}(|t_1| + F(\| \varphi - \bar{\varphi} \|)))\, dt_1 = 2K^2 e^{\gamma|\tau|} \int_0^{\infty} e^{-2\gamma t_1} \omega(A; F^{-1}(t_1 + F(\| \varphi - \bar{\varphi} \|)))\, dt_1.$$

Произведя замену переменной $\sigma = F^{-1}(t_1 + F(\| \varphi - \bar{\varphi} \|))$, получаем оценку (13). Теперь покажем, что

$$\lim_{z \to 0} \mathcal{J}_{2\gamma}(z) = 0. \tag{17}$$

Для этого сначала предположим, что существует конечный предел

$$\lim_{z \to +0} \int_z^{\infty} e^{-2\gamma F(\sigma)} \frac{\omega(A; \sigma)}{\omega(a; \sigma)}\, d\sigma = C < \infty.$$

Тогда в силу того, что $F(z) \underset{z \to 0}{\to} -\infty$, имеем

$$\lim_{z \to +\infty} e^{2\gamma F(z} \int_z^{\infty} e^{-2\gamma F(\sigma)} \frac{\omega(A; \sigma)}{\omega(a; \sigma)}\, d\sigma = C \lim_{z \to +0} e^{2\gamma F(z)} = 0.$$

Для случая бесконечного предела, т. е.

$$\lim_{z \to 0} \int_z^{\infty} e^{-2\gamma F(\sigma)} \frac{\omega(A; \sigma)}{\omega(a; \sigma)} = \infty,$$

используя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{z\to 0}\mathcal{I}_{2\gamma}(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\int\limits_z^\infty e^{-2\gamma F(\sigma)}\frac{\omega(A;\sigma)}{\omega(a;\sigma)}d\sigma}{e^{-2\gamma F(z)}}=\lim_{z\to 0}\frac{-e^{-2\gamma F(z)}\frac{\omega(A;z)}{\omega(a;z)}}{(-2\gamma)e^{-2\gamma F(z)}\frac{1}{\omega(a;z)}}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{1}{2\gamma}\omega(A;z)=0.$$

Рассмотрим теперь случай, когда

$$\omega(a;\sigma)\leqslant\begin{cases}\alpha\sigma, & \sigma\in[0;d],\\ \alpha d, & \sigma\in]d,\infty[,\end{cases}\tag{18}$$

$$\omega(A;\sigma)\leqslant\begin{cases}L\sigma, & \sigma\in]0,d],\\ Ld, & \sigma\in]d,\infty[,\end{cases}\tag{19}$$

т. е. случай, когда функции $a(\varphi)$, $A(\varphi)$ удовлетворяют условиям Липшица (3), (3′). При этом функция $F(z)$ принимает вид

$$F(z)=\begin{cases}\frac{1}{\alpha}\ln\frac{z}{d}, & z\in]0,d],\\ \frac{1}{\alpha d}(z-d), & z\in[d,\infty[,\end{cases}$$

следовательно,

$$\mathcal{I}_{2\gamma}(z)=\left(\frac{z}{d}\right)^{2\gamma/\alpha}\left[\int\limits_z^d\left(\frac{d}{\sigma}\right)^{2\gamma/\alpha}\frac{L}{\alpha}+\frac{L}{\sigma}\int\limits_d^\infty e^{-(2\gamma/\alpha d)(\delta-\alpha)}d\sigma\right]=$$

$$=\frac{1}{\alpha}z^{2\gamma/\alpha}\int^d\sigma^{-2\gamma/\alpha}d\sigma+\frac{Ld^{1-2\gamma/\alpha}}{2\gamma}z^{2\gamma/\alpha}.\tag{20}$$

Для доказательства теоремы 1 рассмотрим следующие случаи:

1) $\frac{2\gamma}{\alpha}>1$; получаем

$$\mathcal{I}_{2\gamma}(z)=\frac{L}{2\gamma-\alpha}z+\left(\frac{Ld^{1-2\gamma/\alpha}}{2\gamma}-\frac{Ld^{1-2\gamma/\alpha}}{2\gamma-\alpha}\right)z^{2\gamma/\alpha}<\frac{L}{2\gamma-\alpha}z;$$

2) $\frac{2\gamma}{\alpha}<1$; имеем

$$\mathcal{I}_{2\gamma}(z)<\frac{\alpha}{(\alpha-2\gamma)2\gamma}z^{2\gamma/\alpha};$$

3) $\frac{2\gamma}{\alpha}=1$, следовательно,

$$\mathcal{I}_{2\gamma}(z)=-\frac{L}{z}\ln z+\frac{L}{\alpha}\left(\frac{1}{2}+\ln d\right)z\leqslant Cz|\ln z|.$$

Это и убеждает нас в справедливости неравенства (7).

Перейдем теперь к рассмотрению гладкости инвариантного тора (2). Как известно [1], в случае существования единственной функции Грина $G_0(\tau,\varphi)$ система (1) имеет единственный инвариантный тор $x=u(\varphi)$, который представим в следующем виде:

$$u(\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_0(\tau,\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau.\tag{21}$$

Следовательно,

$$u(\varphi)-u(\overline{\varphi})=\int\limits_{-\infty}^{\infty}[G_0(\tau,\varphi)-G_0(\tau,\overline{\varphi})]f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau+\int\limits_{+\infty}^{\infty}G_0(\tau,\varphi)\times$$
$$\times[f(\varphi_\tau(\varphi))-\varphi_\tau(\overline{\varphi}))]\,d\tau. \qquad (22)$$

Отсюда, используя оценку (15), непосредственно получаем

$$\|u(\varphi)-u(\overline{\varphi})\|\leqslant\|f_0\|K^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}[e^{-\gamma(|t_1|+|t_1-\tau|)}\omega(A;F^{-1}(\|\varphi-\overline{\varphi}\|))]\,d\tau+$$
$$+K\int\limits_{+\infty}^{\infty}e^{-\gamma|\tau|}\omega(f;F^{-1}(|\tau|+F(\|\varphi-\overline{\varphi}\|)))\,d\tau. \qquad (23)$$

В первом слагаемом интегралы можно поменять местами в силу равномерной сходимости интегралов. Таким образом, имеем

$$\|u(\varphi)-u(\varphi)\|\leqslant\frac{4K^2\|f\|_0}{\gamma}\int\limits_{\|\varphi-\overline{\varphi}\|}^{\infty}e^{-\gamma F(\sigma)+\gamma F(\|\varphi-\overline{\varphi}\|)}\frac{\omega(A;\sigma)}{\omega(a;\sigma)}\,d\sigma+$$
$$+2K\int\limits_{\|\varphi-\overline{\varphi}\|}^{\infty}e^{-\gamma F(\sigma)+\gamma F(\|\varphi-\overline{\varphi}\|)}\frac{\omega(f;\sigma)}{\omega(a;\sigma)}\,d\sigma\leqslant K_1\mathcal{J}_\gamma(A;\|\varphi-\overline{\varphi}\|+$$
$$+K_2\mathcal{J}_\gamma(f;\|\varphi-\overline{\varphi}\|). \qquad (24)$$

Полученные неравенства и убеждают нас в справедливости теоремы 3.

Как видно из оценок (24), для получения интересующих неравенств нужно более детально изучить интегралы $J_\gamma(A,z)$, $J_\gamma(f;z)$. Рассмотрим их в случае выполнения условия (18), т. е. $a(\varphi)\in C_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{J}_m)$. Очевидно, для любого модуля непрерывности $\omega(\delta)$ справедливо неравенство

$$2\frac{\omega(t)}{t}\geqslant\frac{\omega(\sigma)}{\sigma},\quad t\leqslant\sigma. \qquad (25)$$

Действительно, $\omega(\sigma)=\omega\left(\frac{\sigma}{t}t\right)\leqslant\omega\left(\left(\left[\frac{\sigma}{t}\right]+1\right)t\right)\leqslant\left(\left[\frac{\sigma}{t}\right]+1\right)\omega(t)\leqslant 2\times$ $\times\frac{\sigma}{t}\omega(t)$. В рассматриваемом случае интеграл $\mathcal{J}_\gamma(A;z)$ имеет вид

$$\mathcal{J}_\gamma(A;z)=\frac{1}{\alpha}z^{\gamma/\alpha}\int\limits_z^d\frac{\omega(A;\sigma)}{\sigma^{1+\gamma/\alpha}}\,d\sigma+\frac{\omega(A;d)\,d^{1-\gamma/\alpha}}{\gamma d}z^{\gamma/\alpha}. \qquad (26)$$

Используя неравенство (25), первое слагаемое в (26) оценим следующим образом ($\nu=\gamma/\alpha>1$):

$$z^\nu\int\limits_z^d\frac{\omega(A;\sigma)}{\sigma^{1+\nu}}\,d\sigma\leqslant z^\nu\frac{\omega(A;z)}{z}\int\limits_z^d\frac{d\sigma}{\sigma^\nu}=\frac{\omega(A;z)}{z}\frac{1}{\nu-1}[z-d^{1-\nu}z^\nu]\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\nu-1}\omega(A;z),$$

что и завершает доказательство теоремы 2.

1. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний.— М.: Наука, 1987.— 304 с.
2. *Самойленко А. М., Кулик В. Л.* О непрерывности функции Грина задачи об инвариантном торе // Укр. мат. журн.— 1978.— **30**, № 6.— С. 779—788.

3. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Применение квадратичных форм к исследованию систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.— 1985.— **21**, № 5.— С. 776—787.
4. *Митропольский Ю. А., Кулик В. Л.* Дифференцируемые инвариантные многообразия динамических систем // Там же.— 1986.— **22**, № 9.— С. 1523—1532.
5. *Sacker J. R., Sell G. R.* A spectral theory for linear differential systems // J. Different. Equat.— 1978.— **27**, N 3.— P. 320—358.

Ин-т математики АН УССР. Киев

Получено 04.10.88