УДК 517.9

А. М. Самойленко

Приводимость системы линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами

Пусть $P(\varphi, \varepsilon) = \{P_{ij}(\varphi, \varepsilon)\}_{i,j=\overline{1,n}}$ — n-мерная матрица, 2π-периодическая по $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, аналитическая по (φ, ε) в области $\Pi_\rho \times S_{\varepsilon_0}$:

$$|\operatorname{Im} \varphi| = \max_{\nu=\overline{1,m}} |\operatorname{Im} \varphi_\nu| \leqslant \rho, \qquad |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0,$$

вещественная при вещественных значениях (φ, ε) и удовлетворяющая условиям

$$\operatorname{tr} P(\varphi, \varepsilon) = \sum_i P_{ii}(\varphi, \varepsilon) = 0, \quad \|P(\varphi, \varepsilon)\| = \max_j \sum_j |P_{ij}(\varphi, \varepsilon)| \leqslant 1.$$

Пусть $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ — фиксированный вектор частот квазипериодической матрицы $P(\omega t, \varepsilon)$, удовлетворяющий условию

$$|(k, \omega)| \geqslant K |k|^{-d_0}, \qquad d_0 \geqslant m + 1,$$

где $|k| = |k_1| + \ldots + |k_m| \geqslant 1$, $k \in \mathbb{Z}^m = \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел, $K = \text{const} > 0$.

Обозначим через $N = N(\alpha, \beta, \lambda)$ — $n = (d + 2p)$-параметрическое семейство вещественных матриц вида

$$N(\alpha, \beta, \lambda) = \operatorname{diag}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_d, \beta_1 E + \lambda_1 J, \ldots, \beta_p E + \lambda_p J\},$$

где E и J — двухмерные матрицы, E — единичная, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ — квадратный корень из $(-E)$, $d \geqslant 0$, $p \geqslant 0$,

$$\operatorname{tr} N(\alpha, \beta, \lambda) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d + \beta_1 + \ldots + \beta_p = 0.$$

Пусть $N = \{(\nu, \ ): \beta_\nu = \beta_j\}$ — множество всех пар индексов (ν, j), для которых $\beta_\nu = \beta_j$, $\nu = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, p}$. Предположим, что числа α_j, $\beta_\nu \pm i\lambda_\nu$, $j = 1, d$; $\nu = \overline{1, p}$, $i^2 = -1$ разные и берутся из области G:

$$|\min_{\nu \neq j} |\alpha_\nu - \alpha_j|, \min_{\beta_\nu \neq \alpha_j} |\beta_\nu - \alpha_j|, \min_{(\nu, j) \in N} |\beta_\nu - \beta_j|| \geqslant K.$$

Определим полосы $\Pi_k^{(\nu)}$ и $\Pi_k^{(\nu, j)}$ полупространства $R_p^+ = R^+ \times \ldots \times R^+$, $R^+ = [0, +\infty)$ параметров λ, положив

$$\Pi_k^{(\nu)} = \left\{\lambda: \left| \lambda_\nu - \frac{1}{2} |(k, \omega)| \right| < K (1 + |k|)^{-d_0} \right\}, \qquad \nu = \overline{1, p}, \ k \in \mathbb{Z}^m,$$

$$\Pi_k^{(\nu, j)} = \{\lambda: [|\lambda_\nu + \lambda_j - |(k, \omega)||, \ ||\lambda_\nu - \lambda_j| - |(k, \omega)||] < K (1 + |k|^{-d_0}\},$$

$$(\nu, j) \in N, \ \nu \neq j, \ \nu = \overline{1, p}, \ j = \overline{1, p}.$$

Положим

$$\mathscr{O}_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^m} \Big(\bigcup_{\nu = \overline{1, p}} \Pi_k^{(\nu)} \Big), \ \mathscr{O}_2 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^m} \Big(\bigcup_{(\nu, j) \in N} \Pi_k^{(\nu, j)} \Big), \quad \mathscr{O} = \mathscr{O}_1 \cup \mathscr{O}_2.$$

Обозначим через $\Omega_0^t(Q)$ матрицант системы линейных дифференциальных уравнений с матрицей коэффициентов $Q = Q(\omega t + \varphi)$, где $Q(\varphi)$ — непрерывная и 2π-периодическая по φ матрица.

Проблема приводимости такой системы уравнений квазипериодической заменой переменных с частотным базисом ω равносильна представлению матриціанта $\Omega_0^t(Q)$ в виде

$$\Omega_0^t(Q) = \Phi(\omega t + \varphi) e^{At} \Phi^{-1}(\varphi), \tag{1}$$

где $\Phi(\varphi)$ — непрерывная, 2π-периодическая по φ матрица, A — постоянная матрица.

В настоящей работе излагаются новые результаты по этой проблеме, полученные методами из работы [1]. Приведем эти результаты.

Теорема 1. *Пусть матрицы $N(\alpha, \beta, \lambda)$, $P(\varphi, \varepsilon)$ и частоты удовлетворяют приведенным выше условиям.*

Тогда можно указать достаточно малое положительное $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(K^{-1}, d_0) < \varepsilon_0$, $\varepsilon_1(K^{-1}, d_0) \to 0$ при $K^{-1} + d_0 \to \infty$, положительное $C = C(\varepsilon_1)$, $(C^{-1}(\varepsilon_1), \varepsilon_1 C(\varepsilon_1)) \to 0$ при $\varepsilon_1 \to 0$, а также функции $\alpha' = \alpha'(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)$, $\beta' = \beta'(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)$, $\lambda' = \lambda'(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)$ и матрицу $Y = Y(\varphi, \alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)$, 2π-периодическую по φ, определенные в области $\Pi_{\rho/2} \times G \times (R_p^+ \setminus \mathscr{O}) \times S_{\varepsilon_1}$, аналитические по φ, ε и удовлетворяющие условиям

$$\operatorname{tr} N(\alpha', \beta', \lambda') = 0, \quad |\alpha'| + |\beta'| + |\lambda'| + \|Y\| \leqslant C, \tag{2}$$

такие, что при

$$Q(\varphi) = N(\alpha + \varepsilon\alpha', \ \beta + \varepsilon\beta', \ \lambda + \varepsilon\lambda') + \varepsilon P(\varphi, \varepsilon)$$

имеет место равенство (2) *с матрицами $\Phi(\varphi) = E + \varepsilon Y(\varphi, \alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)$, $A = N(\alpha, \beta, \lambda)$.*

При $n = 2$ и $p = 1$ из теоремы 1 следует приводимость системы уравнений с матрицей $Q(\varphi) = (\lambda + \varepsilon\lambda') J + \varepsilon P(\varphi, \varepsilon)$ к системе уравнений с матрицей $A = \lambda J$ для всех $\lambda = \lambda_1 \in R^+ \setminus \mathscr{O}$, где $\mathscr{O} = \bigcup\limits_k \Pi_k^{(1)}$.

Из этого выводится результат, аналогичный теореме 1 [2], о чем будет идти речь ниже.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Тогда можно указать функции α', β', λ', не зависящие от φ, и матрицу Y, 2π-периодическую по φ, определенные в области*

$$\Pi_{\rho/2} \times G \times (R_p^+ \setminus \mathscr{O}) \times I_{\varepsilon'}, \ I_{\varepsilon'} = [0, \varepsilon'], \ \varepsilon' = \varepsilon_1(K^{-(p+1)}, d_0^{(p+1)}),$$

аналитические по φ, имеющие по ε производные до порядка p включительно и удовлетворяющие условиям (2) *при C равном $C(\varepsilon')$, такие, что при*

$$Q = N(\alpha, \beta, \lambda + \varepsilon\lambda') + \varepsilon P(\varphi, \varepsilon)$$

имеет место равенство (2) *с матрицами*

$$\Phi = E + \varepsilon Y, \ A = N(\alpha + \varepsilon\alpha', \ \beta + \varepsilon\beta', \lambda).$$

Из этого результата выводится теорема о приводимости, аналогичная теореме о мере [1].

Приведем некоторые выкладки, характеризующие доказательства приведенных теорем. Пусть формула (1) имеет место. Положим $X(t, \varphi) = \Phi(\varphi) e^{At}$. Тогда матрица

$$X(t, \omega t + \varphi) = \Phi(\omega t + \varphi) e^{At} = \Omega_0^+ \Phi(\varphi)$$

является интегральной матрицей исходной системы уравнений, так что для дифференцируемой по φ матрицы $\Phi(\varphi)$ справедливо равенство

$$\frac{\partial \Phi(\varphi)}{\partial \varphi} \omega + [\Phi(\varphi), A] = [Q(\varphi) - A] \Phi(\varphi), \tag{3}$$

где

$$[\Phi, A] = \Phi A - A\Phi. \tag{4}$$

Таким образом разрешимость уравнения (4) в $C^1(\mathscr{T}_m)$ при условии, что $\det \Phi(\varphi) \neq 0$, $\varphi \in \mathscr{T}_m$, равносильна представимости матрицанта $\Omega_0^t(Q)$ в виде (2) с матрицей $\Phi(\varphi) \in C^1(\mathscr{T}_m)$.

Рассмотрим уравнение (4). Из (4) видно, что наряду с матрицей $\Phi(\varphi)$

решением уравнения (4) является матрица $\Phi(\varphi) C_A$, где C_A — произвольная постоянная матрица, коммутирующая с $A : [A, C_A] = 0$. Чтобы избежать трудностей, вызванных неединственностью решения уравнения (3), наложим на искомое решение дополнительное условие

$$S\Phi(\varphi) = E \tag{5}$$

и выберем оператор S так, чтобы гарантировать единственность решения задачи (3), (5).

В исследованиях [1] S — оператор усреднения матрицы $\Phi(\varphi)$:

$$S\Phi(\varphi) = \Phi_0 = \int_{\mathcal{T}_m} \Phi(\varphi)\, d\varphi,$$

где $\int_{\mathcal{T}_m} \cdot\, d\varphi = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \cdot\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_m$.

В настоящей работе оператором S служит проектор множества матриц $P(\varphi)$ на множество $\{C_A\}$ всех постоянных матриц, коммутирующих с A, определяемый соотношением

$$SP(\varphi) = SP_0 = C_A(P_0),\ P_0 = \int_{\mathcal{T}_m} P(\varphi)\, d\varphi. \tag{6}$$

Покажем, как определяется матрица $C_A(P_0) \subset \{C_A\}$ для случая, когда $A = N(\alpha, \beta, \lambda)$ и среди чисел α_ν, $\nu = \overline{1, d}$, и пар (β_j, λ_j), $j = \overline{1, p}$, нет равных.

В этом случае

$$\{C_A\} = N(\alpha', \beta', \lambda'),\ \alpha' \in R^d,\ \beta' \in R^p,\ \lambda' \in R^p,$$

и S проектирует матрицу P_0 на некоторую матрицу из $N(\alpha', \beta', \lambda')$.

Определим вид оператора S. Положим

$$N(P_0) = \operatorname{diag}\{P_{11}, \ldots, P_{dd},\ P_0^{(1)}, \ldots, P_0^{(p)}\}, \tag{7}$$

где $P_0^{(\nu)}$ — двухмерный диагональный блок матрицы P_0, стоящий на $(d+\nu)$-м месте, $P_{\nu\nu}$ — блок, образованный $(d+2\nu-1)$- и $(d+2\nu)$-й строками и такими же столбцами матрицы P_0.

Зададим действие оператора S на двухмерный блок $Q = P_0^{(\nu)} = \{q_{ij}\}$, $i, j = \overline{1, r}$, соотношением

$$SQ = \hat{Q} = \frac{Q - JQJ}{2}. \tag{8}$$

Непосредственной проверкой устанавливается, что

$$SO = 0,\ SE = E,\ SJ = J,\ S(QJ) = (SQ) J,\ S(JQ) = J(SQ),$$
$$[SQ, J] = 0,\ SQ = \rho E + \mu J,\ [[J, Q], J] = 4(Q - SQ), \tag{9}$$

где $\rho = \operatorname{tr} Q$, $\mu = q_{12} - q_{21} = A \operatorname{tr} Q$.

Последняя из формул доказывает, что задача $[Y, J] = Q$, $SY = 0$ при условии, что $SQ = 0$, имеет единственное решение $Y = \frac{1}{4}[J, Q]$. Положим

$$SP_0 = SN(P_0) = \widehat{N}(P_0) = \operatorname{diag}\{p_{11}, \ldots, p_{dd},\ SP^{(1)}, \ldots, SP^{(p)}\}. \tag{10}$$

Формулы (6), (7), (8), (10) задают искомый оператор S. Из определения оператора S следует $\operatorname{tr} SP_0 = \operatorname{tr} P_0$ значит, $\operatorname{tr} SP_0$ при $\operatorname{tr} P_0 = 0$.

Запишем уравнение (4) для случая, когда A, Q и Φ имеют вид

$$N + \varepsilon A_1,\ N + \varepsilon A_2 + \varepsilon P(\varphi, \varepsilon),\ E + U(\varphi, \varepsilon) = E + \varepsilon Y(\varphi, \varepsilon),$$

где $N = N(\alpha, \beta, \lambda)$, $A_1 = A_1(\varepsilon)$, $A_2 = A_2(\varepsilon)$.

В этом случае уравнение (3) принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} \omega [U, N + \varepsilon A_1] = \varepsilon [A_2 - A_1 + P(\varphi, \varepsilon)](E + U).$$

Будем решать это уравнение при дополнительном условии

$$SU = 0, \tag{11}$$

где S — введенный выше оператор.

Следуя методу [1] первое приближение $U^{(0)} = \varepsilon Y^{(0)}$ к решению уравнения (3) определим из уравнения для $Y^{(0)}$ вида

$$\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\omega + [Y, N] = \overline{A}_2 - \overline{A}_1 + P(\varphi, \varepsilon), \tag{12}$$

где $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$ — подходящим образом подобранные значения матриц A_1 и A_2 как матриц параметров α', β', λ'.

Запишем уравнение (12) для случая, когда

$$A_1 = 0,\ A_2 = N(\mu'),\ \mu' = (\alpha', \beta', \lambda'). \tag{13}$$

В этом случае положим $\overline{A}_2 = N(-\overline{\mu}) = -N(\overline{\mu})$ и запишем (12), (13) в виде

$$\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\omega + [Y, N] = P(\varphi, \varepsilon) - N(\overline{\mu}). \tag{14}$$

Определим $\overline{\mu}$ из разложения

$$SP(\varphi, \varepsilon) = SP_0(\varepsilon) = N(\mu). \tag{15}$$

Покажем, что система (14), (15) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию (11), если только φ, α, β, λ, ε брать из соответствующей области.

Действительно, определим Y рядом

$$Y = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} Y_k e^{i(k, \varphi)}. \tag{16}$$

Для его коэффициентов получаем уравнения

$$[Y_0, N] = P_0 - SP_0, \tag{17}$$

$$i(k, \omega) Y_k + [Y_k, N] = P_k, \qquad k \neq 0, \tag{18}$$

где P_k — коэффициенты Фурье матрицы $P(\varphi, \varepsilon)$.

Рассмотрим уравнение (17). Разобьем матрицы Y_0 и P_k на блоки, согласованные с квазидиагональным видом матрицы $N = N(\alpha, \beta, \lambda)$. Тогда уравнение (17) распадается на системы уравнений

$$[Y, \beta_\nu E + \lambda_\nu J] = P^{(\nu)} - SP^{(\nu)}, \qquad \nu = \overline{1, p}, \tag{19}$$

для двухмерных диагональных блоков, и системы вида

$$y(\alpha_\nu - \alpha_j) = P_0^{(1)},\ Y[(\beta_\nu - \beta_j)E + \lambda_\nu J] = \lambda_j JY + P_0^{(1)}, \qquad \nu \neq j,$$

$$Y_1[(\beta_\nu - \alpha_j)E + \lambda_\nu J] = P_0^{(2)},\ [(\alpha_\nu - \beta_j)E - \lambda_j J]Y_2 = P_0^{(3)} \tag{20}$$

для недиагональных блоков, где y — скаляр, Y — двухмерная квадратная матрица, Y_1, Y_2 — прямоугольные матрицы размеров (1×2) и (2×1) соответственно, $P_0^{(1)}$, $P_0^{(1)}$, $P_0^{(2)}$ и $P_0^{(3)}$ — блоки матрицы P_0 соответствующих размеров.

Уравнение (19) при $\lambda_\nu \neq 0$, $\nu = \overline{1, p}$, имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $SY = 0$:

$$Y = Y^{(\nu)} = \frac{1}{4\lambda_\nu}[J, P_0^{(\nu)}], \qquad \nu = \overline{1, p}.$$

Каждое из уравнений (20) в области

$$G \times (R_p^+ \setminus \mathcal{O}) \times S_{\varepsilon_0} \tag{21}$$

также имеет единственное решение.

Таким образом, уравнение (17) в области (21) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию (11), и это решение, как следует из вида уравнений (20) и матриц $Y^{(\nu)}$, является аналитической функцией ε и удовлетворяет оценке

$$\| Y_0 \| \leqslant C/K, \tag{22}$$

где C — положительное число.

Рассмотрим уравнение (18). Это уравнение можно записать в виде

$$Y_k N(\alpha + i(k, \omega),\ \beta + i(k, \omega), \lambda) = N(\alpha, \beta, \lambda) Y_k + P_k. \tag{23}$$

Разбив Y_k и P_k на блоки, согласованные с квазидиагональным видом матрицы $N(\alpha, \beta, \lambda)$, получим вместо (23) систему уравнений вида

$$y[\alpha_\nu + i(k, \omega) - \alpha_j] = P_k^{(1)},\ Y[(\beta_\nu - \beta_j + i(k, \omega)) E + \lambda_\nu J] =$$
$$= \lambda_j J Y + P_k^{(1)},\ Y_1[(\beta_\nu - \alpha_j + i(k, \omega)) E - \lambda_\nu J] = P_k^{(2)},$$
$$[(\alpha_\nu - \beta_j + i(k, \omega)) E + \lambda_j J] Y_2 = P_k^{(3)}, \qquad k \neq 0, \tag{24}$$

где y, Y, Y_1, Y_2 и $P_k^{(1)}$, $P_k^{(1)}$, $P_k^{(2)}$ и $P_k^{(3)}$ — соответствующих размеров блоки матриц Y и P_k. Из вида системы (24) следует, что в области (21) эта система имеет единственное решение. Это решение является аналитической функцией по ε и удовлетворяет неравенству

$$\| Y_k \| \leqslant \frac{C_1}{K} (1 + |k|)^{d_0} \| P_k \|, \tag{25}$$

где C_1 — положительная постоянная, зависящая разве что от d_0.

Неравенств (22), (25) достаточно, чтобы ряд (16) равномерно сходился в области

$$\Pi_{\rho-2\delta} \times G \times (R_r^+ \setminus \mathcal{O}) \times S_{\varepsilon_0}, \qquad 0 < 2\delta < \rho,$$

и определял аналитическую по φ, ε в этой области матрицу $Y = Y(\varphi, \varepsilon)$, удовлетворяющую неравенствам

$$\| Y \| \leqslant \frac{C_2}{K} \left(\frac{1}{\delta} \right)^{d_0+m} \quad \left\| \frac{\partial Y}{\partial \varphi_\nu} \right\| \leqslant \frac{C_2}{K} \left(\frac{1}{\delta} \right)^{d_0+m+1}, \tag{26}$$

где C_2 — положительная постоянная, зависящая лишь от d_0. Возвратимся к уравнению (3), записав его для матрицы $\Phi = E + U$.

Имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \omega + [\Phi, N] = [N(\varepsilon \mu') + \varepsilon P(\varphi, \varepsilon)] \Phi. \tag{27}$$

Совершим в (27) замену переменных, положив $\Phi = \Phi^{(0)} \Phi^{(1)}$, $\Phi^{(0)} = E + \varepsilon Y^{(0)} = E + U^{(0)}$, где $Y^{(0)} = Y^{(0)}(\varphi, \alpha, \beta, \lambda, \varepsilon)$ — решение уравнения (14), удовлетворяющее условию (11). В результате вместо (27) получим уравнение

$$\left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial \varphi} \omega \right) \Phi^{(1)} + \Phi^{(0)} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \varphi} \omega + [\Phi^{(0)} \Phi^{(1)}, N] =$$
$$= [N(\varepsilon \mu') + \varepsilon P(\varphi, \varepsilon)] \Phi^{(0)} \Phi^{(1)}. \tag{28}$$

С учетом уравнения для $Y^{(0)}$ и равенства

$$[\Phi^{(0)} \Phi^{(1)}, N] = \Phi^{(0)} [\Phi^{(1)}, N] + [\Phi^{(0)}, N] \Phi^{(1)}$$

переписываем (28) в виде

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \varphi} \omega + [\Phi^{(1)}, N] = [N(\mu^{(1)}) + P^{(1)}(\varphi, \mu^{(1)}, \varepsilon)] \Phi^{(1)}, \tag{29}$$

где

$$P^{(1)}(\varphi, \mu^{(1)}, \varepsilon) = [\Phi^{(0)}]^{-1}\{-U^{(0)}N(\mu^{(1)}) + N(\mu^{(1)})U^{(0)} + \\ + \varepsilon[P(\varphi, \varepsilon) - SP(\varphi, \varepsilon)]U^{(0)}\}, \tag{30}$$

$$\mu^{(1)} = \varepsilon(\mu' + \bar{\mu}).$$

Относительно матрицы $U^{(1)} = \Phi^{(1)} - E$ уравнение (29) имеет вид

$$\frac{\partial U^{(1)}}{\partial \varphi}\omega + [U^{(1)}, N] = [N(\mu^{(1)}) + P^{(1)}(\varphi, \mu^{(1)}, \varepsilon)](E + U^{(1)}).$$

Будем предполагать, что $\mu^{(1)}$ подчинено условию $\operatorname{tr} N(\mu^{(1)}) = 0$. Покажем, что тогда

$$\operatorname{tr} P_0^{(1)}(\mu^{(1)}, \varepsilon) = 0, \; P_0^{(1)}(\mu^{(1)}, \varepsilon) = \int\limits_{\mathcal{T}m} P^{(1)}(\varphi, \mu^{(1)}, \varepsilon)\,d\varphi. \tag{31}$$

Действительно, замена переменных, приводящая уравнение (27) к виду (29), преобразовывает систему уравнений, определяемую матрицей коэффициентов $N + N(\varepsilon\mu') + \varepsilon P(\varphi, \varepsilon)$, в систему уравнений с матрицей коэффициентов $N + N(\mu^{(1)}) + P^{(1)}(\varphi, \mu^{(1)}, \varepsilon)$. Поэтому матриканты этих систем связаны соотношением

$$\Omega_0^t(N + N(\varepsilon\mu') + \varepsilon P(\varphi, \varepsilon))\Phi^{(0)}(\varphi, \varepsilon) = \\ = \Phi^{(0)}(\omega t + \varphi, \varepsilon)\Omega_0^t(N + N(\mu^{(1)}) + P^{(1)}(\varphi, \mu^{(1)}, \varepsilon)). \tag{32}$$

Переходя от равенства (32) к равенству для определителей, получаем с учетом формулы Остроградского — Лиувилля и того, что $\operatorname{tr} N = \operatorname{tr} N(\mu') = \operatorname{tr} N(\mu^{(1)}) = 0$, равенство

$$\operatorname{tr}[\varepsilon P(\varphi, \varepsilon) - P^{(1)}(\varphi, \mu^{(1)}, \varepsilon)] = \frac{\partial \ln \delta(\varphi, \varepsilon)}{\partial \varphi}\omega, \; \delta(\varphi, \varepsilon) = |\det \Phi^{(0)}(\varphi, \varepsilon)|.$$

Из этого равенства при $\operatorname{tr} P_0(\varepsilon) = 0$ следует соотношение (31). Так как по предположению $\operatorname{tr} P(\varphi, \varepsilon) = 0$, то $\operatorname{tr} P_0(\varepsilon) = 0$, что завершает доказательство равенства (31). Отметим, что для справедливости (31) достаточно потребовать вместо $\operatorname{tr} P(\varphi, 0) = 0$ выполнения предположения $\operatorname{tr} P_0(\varepsilon) = 0$.

Уравнение (29) является исходным для применения итерационного процесса с ускоренной сходимостью итераций. Оно отличается от исходного тем, что матрица $P^{(1)}$ зависит от параметра $\mu^{(1)}$, подлежащего определению, и что вместо следа матрицы $P^{(1)}(\varphi, \mu^{(1)}, \varepsilon)$ равен нулю след матрицы $P_0^{(1)}(\mu^{(1)}, \varepsilon)$.

Приведем некоторые оценки. Пусть $\delta = \dfrac{\rho}{4 + \rho}$, $1 < \varkappa < 2$, $\varepsilon_1 = M$, $M^{\varkappa} = M_1$, где M — достаточно малое положительное число, $\rho \leqslant 1$, $M < 1$.
Выберем M настолько малым, чтобы

$$M\frac{C_2}{K}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{a_0+m+1} \leqslant \frac{1}{\gamma}M^{\varkappa-1}. \tag{33}$$

В рассматриваемой области для всех

$$|\varepsilon| \leqslant M, \; |\mu^{(1)}| = \max_{\nu=\overline{1,n}}|\mu_\nu^{(1)}| \leqslant M_1 \tag{34}$$

справедливы неравенства

$$\|U^{(0)}\| \leqslant \frac{1}{\gamma}M^{\varkappa-1}, \quad \left\|\frac{\partial U^{(0)}}{\partial \varphi_\nu}\right\| \leqslant \frac{1}{8}M^{\varkappa-1}, \\ \|P^{(1)}(\varphi, \mu^{(1)}, \varepsilon)\| \leqslant \frac{6}{7}M^{\gamma} \leqslant M_1, \quad \left\|\frac{\partial P^{(1)}}{\partial \mu_\nu^{(1)}}\right\| \leqslant M^{\varkappa-1}. \tag{35}$$

Итерационный процесс преобразования уравнения (29) состоит в том, что $\Phi^{(1)}$ и $\mu^{(1)}$ преобразуются в $\Phi^{(2)}$ и $\mu^{(2)}$ по формулам

$$\Phi^{(1)} = [E + U^{(1)}(\varphi, \mu^{(1)}, \varepsilon)]\,\Phi^{(2)},\ \ \mu^{(2)} = \mu^{(1)} + \Delta^{(1)}(\mu^{(1)}, \varepsilon), \tag{36}$$

где $U^{(1)}(\varphi, \mu^{(1)}, \varepsilon)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial U^{(1)}}{\partial \varphi}\,\omega + [U^{(1)}, N] = (E - S)\,P^{(1)}(\varphi, \mu^{(1)}, \varepsilon),$$

удовлетворяющее условию $SU^{(1)} = 0$, $\Delta^{(1)}(\mu^{(1)}, \varepsilon)$ — функция, определяемая из представления

$$SP^{(1)}(\varphi, \mu^{(1)}, \varepsilon) = N(\Delta^{(1)}(\mu^{(1)}, \varepsilon)),$$

$\Phi^{(2)}$ и $\mu^{(2)}$ преобразовываются аналогичным образом в $\Phi^{(3)}$ и $\mu^{(3)}$ и т. д.

Чтобы завершить описание итерационного процесса, докажем разрешимость относительно $\mu^{(1)}$ второго из соотношений (36). Перепишем его в виде

$$\mu^{(1)} = \mu^{(2)} - \Delta^{(1)}(\mu^{(1)}, \varepsilon) \tag{37}$$

и будем считать, что $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$ и ε берутся из области

$$|\mu^{(2)}| \leqslant M_2 = M_1^{\varkappa},\ \ |\mu^{(1)}| \leqslant M_1,\ \ |\varepsilon| \leqslant M.$$

В этой области правая часть уравнения (37) определена, представляет собой аналитическую по $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$ и ε функцию и удовлетворяет неравенствам

$$|\mu^{(2)} - \Delta^{(1)}(\mu^{(1)}, \varepsilon)| \leqslant M_1^{\varkappa} + \frac{6}{7}M_1 \leqslant M_1\left(M_1^{\varkappa-1} + \frac{6}{7}\right) \leqslant M_1,$$

$$\left\|\frac{\partial \Delta^{(1)}(\mu^{(1)}, \varepsilon)}{\partial \mu^{(1)}}\right\| \leqslant 4nM^{\varkappa-1} \leqslant 1/2,\ \ M^{\varkappa-1} \leqslant \frac{1}{8n}\ .$$

Согласно принципу сжатых отображений этого достаточно для разрешимости уравнения (37) в виде $\mu^{(1)} = \mu^{(1)}(\mu^{(2)}, \varepsilon)$ с функцией $\mu^{(1)}(\mu^{(2)}, \varepsilon)$, заданной и аналитической по $\mu^{(2)}, \varepsilon$ в области $|\mu^{(2)}| \leqslant M_2$, $|\varepsilon| \leqslant M$ и удовлетворяющей соотношениям $|\mu^{(1)}(\mu^{(2)}, \varepsilon)| \leqslant M_1$, $\mu^{(1)}(\mu^{(2)}, 0) = \mu^{(2)}$.

Вторые приближения к решению уравнения (27) и вторые поправки к значениям $\varepsilon\mu'$ определяем формулами

$$\Phi = \Phi^{(0)}\Phi^{(1)} = \Phi^{(0)}[E + U^{(1)}(\varphi, \mu^{(1)}(0, \varepsilon), \varepsilon)],\ \ \varepsilon\mu' = \mu^{(1)}(0, \varepsilon - \varepsilon\bar{\mu},$$

в которых

$$U^{(1)}(\varphi, \mu^{(1)}(0, \varepsilon), \varepsilon) = \varepsilon\int_0^1 \frac{\partial U^{(1)}(\varphi, \mu^{(1)}(0, \tau\varepsilon), \tau\varepsilon)}{\partial(\tau\varepsilon)}\,d\tau, \tag{38}$$

$$\mu^{(1)}(0, \varepsilon) = \varepsilon\int_0^1 \frac{\partial \mu^{(1)}(0, \tau\varepsilon)}{\partial(\tau\varepsilon)}\,d\tau.$$

Дальнейшие рассуждения доказательства теоремы 1 носят стандартный характер и повторяют доказательство обобщенной теоремы о приводимости [1].

Перейдем к рассмотрению случая $A_1 = N(\varepsilon\alpha', \varepsilon\beta', 0)$, $A_2 = N(0, \varepsilon\lambda')$. В этом случае уравнение (3) для матрицы $\Phi = E + U$ имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\,\omega + \Phi N(\alpha + \varepsilon\alpha', \beta + \varepsilon\beta', \lambda) = [N(\alpha, \beta, \lambda + \varepsilon\lambda') + \varepsilon P(\varphi, \varepsilon)]\,\Phi. \tag{39}$$

Уравнение первого приближения — это уравнение (14) и его решение и свойства описаны выше.

Совершим в (39) замену переменных $\Phi = \Phi^{(0)}\Phi^{(1)}$. В результате получим уравнение

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \varphi}\omega + \Phi^{(1)} N(\alpha + \varepsilon\alpha', \beta + \varepsilon\beta', \lambda) - N(\alpha + \varepsilon\bar{\alpha}, \beta + \varepsilon\bar{\beta}, \lambda)\Phi^{(1)} =$$
$$= [N(0, \lambda^{(1)}) + P^{(1)}(\varphi, \lambda^{(1)}, \varepsilon)]\Phi^{(1)}, \tag{40}$$

в котором

$$P^{(1)}(\varphi, \lambda^{(1)}, \varepsilon) = [\Phi^{(0)}]^{(-1)}\{-U^{(0)}N(\varepsilon\bar{\alpha}, \varepsilon\bar{\beta}, \lambda^{(1)}) +$$
$$+ [N(0, \lambda^{(1)} - \varepsilon\bar{\lambda}) + \varepsilon P(\varphi, \varepsilon)]U^{(0)}\},$$
$$\lambda^{(1)} = \varepsilon\lambda' + \varepsilon\bar{\lambda}.$$

Уравнение (40) является исходным для применения итерационного процесса с ускоренной сходимостью итераций.

Будем предполагать, что $\operatorname{tr} N(0, \lambda^{(1)}) = 0$. Тогда матрица $P^{(1)}(\varphi, \lambda^{(1)}, \varepsilon)$ удовлетворяет условию вида (31)

$$\operatorname{tr} P_0^{(1)}(\lambda^{(1)}, \varepsilon) = 0, \quad P_0^{(1)}(\lambda^{(1)}, \varepsilon) = \int\limits_{\mathcal{T}_m} P^{(1)}(\varphi, \lambda^{(1)}, \varepsilon)\, d\varphi.$$

Более того, при выборе M из условия (33) в области $|\varepsilon| \leqslant M$, $|\lambda^{(1)}| \leqslant \leqslant M_1$ матрицы $U^{(0)}$ и $P^{(1)}$ удовлетворяют неравенствам (35) с тем изменением, что производная от $P^{(1)}$ берется не по $\mu_\nu^{(1)}$, а по $\lambda_\nu^{(1)}$, $\nu = \overline{1, p}$.

Итерационный процесс преобразований уравнения (40) состоит в том, что $\Phi^{(1)}$ и $\lambda^{(1)}$ преобразовываются в $\Phi^{(2)}$ и $\lambda^{(2)}$ по формулам

$$\Phi^{(1)} = [E + U^{(1)}(\varphi, \lambda^{(1)}, \varepsilon)]\Phi^{(2)}, \ \lambda^{(2)} = \lambda^{(1)} + \Delta^{(1)}(\lambda^{(1)}, \varepsilon), \tag{41}$$

где $U^{(1)} = U^{(1)}(\varphi, \lambda^{(1)}, \varepsilon)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial U^{(1)}}{\partial \varphi}\omega + [U^{(1)}, N(\alpha + \varepsilon\bar{\alpha}, \ \beta + \varepsilon\bar{\beta}, \lambda)] = (E - S)P^{(1)}(\varphi, \lambda^{(1)}, \varepsilon), \tag{42}$$

удовлетворяющее условию $SU^{(1)} = 0$, $\Delta^{(1)}(\lambda^{(1)}, \varepsilon)$ — функция, определяемая из представления

$$SP^{(1)}(\varphi, \lambda^{(1)}, \varepsilon) = N(\bar{\alpha}^{(1)}(\lambda^{(1)}, \varepsilon), \ \bar{\beta}^{(1)}(\lambda^{(1)}, \varepsilon), \ \Delta^{(1)}(\lambda^{(1)}, \varepsilon)),$$

$\Phi^{(2)}$ и $\lambda^{(2)}$ преобразовываются аналогичным образом в $\Phi^{(3)}$ и $\lambda^{(3)}$ и т. д.

Выясним характер зависимости решения уравнения (42) от параметра ε. Для этого заметим, что система уравнений вида (24), определяющая гармонику $U_k e^{i(k,\varphi)}$ решения уравнения (42), получается из (24) заменой величин α_ν и β_j, $\nu = \overline{1, d}$, $j = \overline{1, p}$, на величины $\alpha_\nu + \varepsilon\bar{\alpha}_\nu$ и $\beta_j + \varepsilon\bar{\beta}_j$, $\nu = = \overline{1, d}$, $j = \overline{1, p}$. Поэтому матрица U_k содержит слагаемое с множителями вида $\{\varepsilon(\bar{\beta}_\nu - \bar{\alpha}_j) + i[(k, \omega) \pm \lambda_\nu]\}^{-1}$ при $\beta_\nu = \alpha_j$ или $\{\varepsilon(\bar{\beta}_\nu - \bar{\beta}_j) + i[(k, \omega) \pm \pm (\lambda_\nu \pm \lambda_j)]\}^{-1}$ при $(\nu, j) \in N$, $\nu \neq j$.

Эти множители рождают полюсы функций U_k как функции параметра ε, изменяющегося в области $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_1$ комплексной плоскости. Из-за этого приходится рассматривать решение уравнения (42) лишь для вещественных значений параметра ε.

Эти же множители ухудшают оценку производных $\dfrac{d^n U_k}{d\varepsilon^n} = U_k^{(n)}$ функции U_k по ε, определяя ее неравенством вида

$$\| U_k^{(n)} \| \leqslant \frac{C_2}{K^n}(1 + |k|)^n \sum_{\nu=0}^{n} \left\| \frac{d^\nu P_k^{(1)}}{d\varepsilon^\nu} \right\| \tag{43}$$

при α, β, λ, ε, изменяющихся в области $G \times (R_p^+ \setminus \mathcal{O}) \times I_{\varepsilon_1}$, $I_{\varepsilon_1} = [0, \varepsilon_1]$.

Неравенства (43) при $n=0$ обеспечивают равномерную сходимость в области

$$\Pi_{\rho-2\delta}\times G\times(R_\rho^+\setminus\mathscr{O})\times I_{\varepsilon_1} \tag{44}$$

при достаточно малом ε_1 и произвольном $0<2\delta<\rho$ ряда $\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} U_k e^{i(k,\varphi)}$, который определяет аналитическую по φ и n раз непрерывно дифференцируемую по ε матрицу $U=U(\varphi,\varepsilon)$, удовлетворяющую уравнению (42). Для этой матрицы справедливы в области (44) оценки вида (26) и оценки аналогичного вида для произвольных по ε:

$$\|U^{(n)}\|\leqslant\frac{C_3}{K^n}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{nd_0+m}\sum_{\nu=0}^{n}\max\left\|\frac{d^\nu P^{(1)}(\varphi,\varepsilon)}{d\varepsilon^\nu}\right\|,$$

где C_3 — положительная постоянная, зависящая лишь от d_0, $\max=\max\limits_{(\varphi,\varepsilon)\in\Pi_\rho\times I_{\varepsilon_0}}$.

Второе из соотношений (41) разрешается в виде $\lambda^{(1)}=\lambda^{(1)}(\lambda^{(2)},\varepsilon)$ для $\lambda^{(2)}$ и ε из области $|\lambda^{(2)}|\leqslant M_1^\varkappa$, $\varepsilon\in I_{\varepsilon_1}$ с достаточно малым $\varepsilon_1>0$ и представляет собой аналитическую по $\lambda^{(2)}$ и n раз непрерывно дифференцируемую по ε в этой области функцию, удовлетворяющую соотношениям $|\lambda^{(1)}(\lambda^{(2)},\varepsilon)|\leqslant M_1$, $\lambda^{(1)}(\lambda^{(2)},0)=\lambda^{(2)}$.

Вторые приближения к решению уравнения (39) и вторые поправки к значениям $\varepsilon\alpha'$, $\varepsilon\beta'$, $\varepsilon\lambda'$ определяем формулами

$$\Phi=\Phi^{(0)}\Phi^{(1)}=\Phi^{(0)}[E+U^{(1)}(\varphi,\lambda^{(1)}(0,\varepsilon),\varepsilon)],$$

$$\varepsilon\alpha'=\varepsilon\bar\alpha+\bar\alpha^{(1)}(\lambda^{(1)}(0,\varepsilon),\varepsilon),\ \ \varepsilon\beta'=\varepsilon\bar\beta+\bar\beta^{(1)}(\lambda^{(1)}(0,\varepsilon),\varepsilon),$$

$$\varepsilon\lambda'=\varepsilon\bar\lambda+\lambda^{(1)}(0,\varepsilon),$$

допускающими для $U^{(1)}$, $\bar\alpha^{(1)}$, $\bar\beta^{(1)}$, $\lambda^{(1)}$ представление вида (38).

Дальнейшие рассуждения доказательства теоремы 2 имеют стандартный характер и повторяют доказательство обобщенной теоремы о приводимости и теоремы о приводимости [1].

Сделаем несколько замечаний общего характера.

1°. Приведенный анализ зависимости решения уравнения (42) от параметра ε показывает, что «потеря гладкости» по параметру происходит за счет наличия комплексно-сопряженных собственных значений матрицы $N(\alpha,\beta,\lambda)$.

В случае, когда все собственные числа этой матрицы действительные — случай, когда $d=n$, потери гладкости по параметру ε не происходит. Это приводит к следующему дополнению к теореме 2.

Теорема 3. *Пусть матрицы N, P и частоты ω удовлетворяют приведенным выше условиям и $d=n$. Тогда имеет место равенство* (1) *с матрицами Q, Φ и A, аналитическими по своим переменным φ и ε в области $\Pi_{\rho/2}\times S_{\varepsilon_1}$.*

Следует отметить, что случай, характеризуемый теоремой 3, имеет обширное освещение в математической литературе (см. ссылки в [1] и работы [3—5]).

2°. Пусть C — невырожденная постоянная матрица. Матрица $CN(\alpha,\beta,\lambda)C^{-1}$ допускает тогда представление

$$CNC^{-1}=\sum_{\nu=1}^{p}(\lambda_\nu A_\nu+\beta_\nu B_\nu)+\sum_{j=1}^{a}\alpha_j D_j, \tag{45}$$

определяющее n-параметрическое семейство матриц. Как теорема 1, так и теорема 2, допускает очевидную перефразировку для такого семейства.

Например, пусть $n = 2$ и $p = 1$. В этом случае представление (45) имеет вид

$$CNC^{-1} = \lambda A_1,\ A_1^2 = -E,\ A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}, \tag{46}$$

где λ, α, β, γ — действительные параметры, подчиненные условиям $\alpha^2 + \beta\gamma = 1$, $\lambda > 0$.

Теорема 1 для этого случая допускает следующее обобщение.

Теорема 4. *Пусть матрица P и частоты ω удовлетворяют приведенным выше условиям и $n = 2$. Предположим, что элементы $a = (\alpha, \beta, \gamma)$ матрицы A_1 из (46) удовлетворяют неравенству*

$$|a| = \max(|\alpha|, |\beta|, |\gamma|) \leqslant D. \tag{47}$$

Тогда можно указать достаточно малое положительное $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(K^{-1}, d_0, D) < \varepsilon_0$, $\varepsilon_1(K^{-1}, d_0, D) \to 0$ при $(K^{-1}, d_0, D) \to \infty$, положительное $C = C(\varepsilon_1)$, $(C^{-1}(\varepsilon_1), \varepsilon_1 C(\varepsilon_1)) \to 0$ при $\varepsilon_1 \to 0$), а также функцию $\lambda' = \Delta(\lambda, a, \varepsilon)$, аналитическую по $a = (\alpha, \beta, \gamma)$ и ε для всех a, λ, ε из области $\lambda \in R_1^+ \setminus \mathcal{O}$, $|a| \leqslant D$, $\varepsilon \in S_{\varepsilon_1}$, и матрицу $Y = Y(\varphi, \lambda, a, \varepsilon)$, 2π-периодическую по φ и аналитическую по φ, a и ε из области $\varphi \in \Pi_{\rho/2}$, $\lambda \in R_1^+ \setminus \mathcal{O}$, $|a| \leqslant D$, $\varepsilon \in S_{\varepsilon_1}$, удовлетворяющие условиям $|\Delta| + \|Y\| \leqslant C$, такие, что при $\Phi(\varphi) = (\lambda + \varepsilon\Delta) A_1 + \varepsilon P(\varphi, \varepsilon)$ имеет место равенство (1) с матрицами $\Phi(\varphi) = E + \varepsilon Y(\varphi, \lambda, a, \varepsilon)$, $A = \lambda A_1$.

Новым в формулировке теоремы 4 является утверждение об аналитичности функции Δ и матрицы Y по параметрам α, β, γ матрицы A_1. Чтобы подтвердить указанный характер зависимости от этих параметров, запишем уравнение вида (14), определяющее первое приближение к функции Δ и матрице Y. Это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\omega + \lambda[Y, A_1] = P(\varphi, \varepsilon) - \bar{\lambda} A_1, \tag{48}$$

где $\bar{\lambda}$ определяется из разложения

$$SP(\varphi, \varepsilon) = SP_0 = \hat{P}_0 = \frac{P_0 - A_1 P_0 A_1}{2} = \bar{\lambda} A_1.$$

Для SP_0 разложение справедливо в силу свойств оператора SP_0 вида (9):

$$SO = 0,\quad SE = E,\quad SA_1 = A_1,\quad S(QA_1) = (SQ_1) A_1,\quad S(A_1 Q) = A_1 SQ,$$
$$[SQ, A_1] = 0,\quad SQ = \rho E + \mu A_1, \tag{49}$$
$$[[A_1, Q], A_1] = 4[Q - SQ],$$

где

$$\rho = \operatorname{tr} Q,\quad \mu = \alpha(q_{22} - q_{11}) + \gamma q_{12} - \beta q_{21} = Q, \tag{50}$$

Зависимость первого приближения функции Δ, равной значению $\bar{\lambda}$, от параметров α, β, γ определяется вторым из равенств (50), так как $\bar{\lambda} = \mu(P_0)$.

Зависимость первого приближения матрицы Y от параметров α, β, γ определяется из формул, выражающих решение уравнения (48) в виде

$$Y = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} Y_k e^{i(k,\varphi)}$$

и определяющих коэффициенты Фурье Y_k равенствами

$$Y_0 = \frac{1}{4\lambda}[A_1, P_0], \tag{51}$$

$$Y_k = \frac{SP_k}{2i\lambda_k} + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda} - \frac{1}{\lambda_k + \lambda}\right)[P_k, A_1] -$$

$$-\frac{i}{4}\left(\frac{1}{\lambda_k-\lambda}+\frac{1}{\lambda_k+\lambda}\right)(P_k-SP_k), \qquad k\neq 0,$$

где $\lambda\in R_1^+\setminus\mathcal{O}$, $\lambda_k=\frac{1}{2}(k, \omega)$.

Из этих формул видно, что первые приближения матриц Δ и Y являются полиномами второго порядка относительно параметров α, β, γ.

Последующие приближения, как и их равномерный предел, оказываются аналитическими функциями этих параметров, если брать их из области (47).

Относительно формул (51) отметим, что первая из них следует из последнего из соотношений (49). Вторая доказывается следующим образом.

При $k\neq 0$ положим

$$Y_k=\frac{SP_k}{2i\lambda_k}+V. \tag{52}$$

Учитывая свойства (49) оператора S, для V получаем уравнение

$$2i\lambda_k V+\lambda[V, A_1]=P_k-SP_k. \tag{53}$$

Умножая (53) на A_1/λ_k слева, находим

$$V=-A_1V\left(A_1+\frac{2i\lambda_k}{\lambda}E\right)+A_1B/\lambda, \quad B=P_k-SP_k. \tag{54}$$

Интегрируя уравнение (54):

$$V=-A_1\left[-A_1V\left(A_1+\frac{2i\lambda_k}{\lambda}E\right)+A_1B/\lambda\right]\left(A_1+\frac{2i\lambda_k}{\lambda}E\right)+A_1B/\lambda,$$

получаем для V новое уравнение

$$V=-V\left[-E+\frac{4i\lambda_k}{\lambda}A_1+\left(\frac{2i\lambda_k}{\lambda}\right)^2E\right]+\frac{A_1B+BA_1}{\lambda}+\frac{2i\lambda_k}{\lambda^2}B.$$

Из этого уравнения следует

$$4i\frac{\lambda_k}{\lambda}V\left(A_1+\frac{i\lambda_k}{\lambda}E\right)=\frac{A_1B+BA_1}{\lambda}+\frac{2i\lambda_k}{\lambda^2}B.$$

Умножая последнее уравнение справа на матрицу $\left(A-\frac{i\lambda_k}{\lambda}E\right)\lambda/i\lambda_k$, находим для V равенство

$$4\left(\frac{\lambda_k^2}{\lambda^2}-1\right)V=\frac{A_1B+BA_1}{i\lambda_k}\left(A_1-\frac{i\lambda_k}{\lambda}E\right)+2\frac{B}{\lambda}\left(A-\frac{i\lambda_k}{\lambda}E\right). \tag{55}$$

В силу тождества тождества

$$(A_1B+BA_1)A_1=A_1BA_1-B=A_1P_kA_1+SP_k-P_k+SP_k=0$$

равенство (55) принимает вид

$$4\left(\frac{\lambda_k^2}{\lambda^2}-1\right)V=\frac{1}{\lambda}[B, A_1]-\frac{i\lambda_k}{2\lambda^2}B.$$

Согласно (52) и значению (54) для B из него следует второе из равенств (51).

3°. Метод доказательства приведенных выше теорем без принципиальных затруднений можно изменить так, чтобы каждое из приближений вида $\Phi^{(0)}$, $\Phi^{(1)}$, ... являлось тригонометрическим полиномом по φ, содержащим определенное число гармоник N_0, N_1, ..., где N_s — подходящим образом подобранные целые числа, $N_s\to\infty$ при $s\to\infty$.

Для этого достаточно вместо точного уравнения для $U^{(0)}$ решать укороченное, полученное из него заменой матрицы $\varepsilon P(\varphi, \varepsilon)$ отрезком ее ряда Фурье $\varepsilon S_{N_0} P(\varphi, \varepsilon) = \varepsilon \sum\limits_{|k| \leqslant N_0} P_k e^{i(k,\varphi)}$ длины N_0, где N_0 выбирается из условия, чтобы остаток ряда Фурье $\varepsilon R_{N_0} P(\varphi, \varepsilon) = \varepsilon P(\varphi, \varepsilon) - \varepsilon S_{N_0} P(\varphi, \varepsilon)$ был величиной порядка малости $M_1 = M_0^{\varkappa}$ при всех φ, ε из рассматриваемой области их изменения. Характер дальнейших рассуждений хорошо известен из схемы доказательства теорем о приводимости для случая гладкой, но не аналитической по φ матрицы $P(\varphi, \varepsilon)$ [1].

4°. В условиях теоремы 2 как функции α', β', λ', так и матрица Y, являются бесконечно дифференцируемыми по ε в точке $\varepsilon = 0$. Это гарантирует асимптотический характер разложений этих функций и матрицы по степеням параметра ε, так что

$$(\alpha', \beta', \lambda') = \sum_{\nu=0}^{p} \varepsilon^{\nu} (\alpha'_{\nu}, \beta'_{\nu}, \lambda'_{\nu}) + o(\varepsilon^{p+1}), \quad Y = \sum_{\nu=0}^{p} \varepsilon^{\nu} Y_{\nu} + o(\varepsilon^{p+1})$$

для произвольного целого $p \geqslant 0$, где $(\alpha'_{\nu}, \beta'_{\nu}, \lambda'_{\nu})$ и Y_{ν} не зависят от параметра ε при $\nu = \overline{0, p}$.

Теорема 1 гарантирует сходящиеся разложения по степеням параметра ε аналогичных функций и матрицы Y.

5°. В формулировках приведенных теорем не отмечалось, что функции α', β', λ' и матрица Y принимают вещественные значения при вещественных значениях переменных φ и ε. Этот факт имеет место и легко усматривается из доказательств указанных теорем.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1969.— 248 с.
2. *Динабург Е. И., Синай Я. Г.* Об одномерном уравнении Шредингера с квазипериодическим потенциалом // Функцион. анализ и его прил.— 1975.— **9**, вып. 4.— С. 8—21.
3. *Блинов И. Н.* Аналитическое представление решений системы линейных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами, зависящими от параметра // Дифференц. уравнения.— 1965.— **1**, № 8.— С. 1042—1053.
4. *Баскаков А. Г.* Теорема о приводимости линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Укр. мат. журн.— 1983.— **35**, № 4.— С. 416—421.
5. *Johnson A. R., Sell R. G.* Smoothness of spectral subbundlas and reducibility of quasi-periodic linear differential systems // J. Different. Equat.— 1981.— **41**, № 2.— P. 262—288.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 27.06.89