УДК 513.88+519.4

И. И. Рудинский, Ю. С. Самойленко

Неограниченные самосопряженные операторы, связанные алгебраическим соотношением

Пусть $(A_t)_{t\in\mathbb{R}^1}$ — семейство самосопряженных операторов в комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве H. Мы предполагаем, что существует ядерное линейное топологическое пространство Φ, плотное в H, инвариантное относительно операторов семейства и для всех $f \in \Phi$

а) $\frac{1}{2}[A_{t+s}+A_{t-s}]f = A_tA_sf,\ A_0 = I,\ t, s\in\mathbb{R}^1$;

б) вектор-функция $\mathbb{R}^1 \ni t \to A_tf \in H$ сильно непрерывна по t, $\|A_t\| \leqslant c$.

Для семейств ограниченных самосопряженных операторов, связанных соотношениями а), б) теорема о спектральном представлении

$$A_t = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \cos \lambda t dE(\lambda)$$

доказана в [1]. В п. 1 мы кратко приведем ее доказательство с помощью интегральных представлений ограниченных четно положительно определенных функций, подобное доказательству теоремы М. Стоуна о спектральном представлении однопараметрической сильно непрерывной группы унитарных операторов с помощью теоремы С. Бохнера. Случай неограниченных операторов $(A_t)_{t\in\mathbb{R}^1}$ рассмотрен в п. 2. Если равенство

$$\frac{1}{2}[A_{t+s}+A_{t-s}] = A_tA_s,\quad t, s\in\mathbb{R}^1,$$

понимается как равенство неограниченных операторов, то с помощью развитой в [2, 3] методики спектральных представлений семейств операторов, связанных соотношениями, спектральное представление

$$A_t = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \cos \sqrt{\lambda} t dE(\lambda),\qquad t\in\mathbb{R}^1,$$

получено в [4]. Но если требовать, чтобы соотношения имели место на плотном множестве Φ, то, как показывает теорема Э. Нельсона в теории представлений алгебр Ли неограниченными операторами [5], для того чтобы имело место соответствующее интегральное представление, для этих операторов на векторах $f\in\Phi$ должны еще выполняться те или иные оценки (см. теорему 2).

1. Теорема 1. *Для того чтобы для семейства $(A_t)_{t\in\mathbb{R}^1}$ ограниченных самосопряженных операторов имело место представление*

$$A_t = \int\limits_0^\infty \cos \lambda t dE(\lambda), \tag{1}$$

необходимо и достаточно, чтобы

а) $\frac{1}{2}[A_{t+s}+A_{t-s}] = A_tA_s,\ A_0 = I$;

б) A_t — *сильно непрерывно зависит от* t, $\|A_t\| \leqslant c$.

Разложение единицы $E(\cdot)$ *из* (1) *по* $(A_t)_{t\in\mathbb{R}^1}$ *определяется однозначно.*

Докажем достаточность. Пусть операторы A_t, коммутирующие в силу соотношения а), имеют совместный простой спектр, Ω — соответствующий циклический вектор, ЗЛО — замкнутая линейная оболочка, ЗЛО $\{A_t\Omega\}_{t\in\mathbb{R}^1} = H$. Положим $(A_t\Omega, \Omega) = k(t)$; ($k(t)$ — непрерывная четная ч. п. о. ограниченная функция на $\mathbb{R}^1$ (напомним, что четная функция $k(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, называется четно положительно определенной (ч. п. о.), если $\forall t_1, \ldots$ $\ldots, t_m \in \mathbb{R}^1$, $\forall \xi_1, \ldots, \xi_m \in \mathbb{C}^1$ выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{m} \frac{k(t_i+t_j)+k(t_i-t_j)}{2}\xi_i\bar{\xi}_j \geqslant 0).$$

Действительно, то, что функция $k(t)$ ч. п. о., вытекает из следующего:

$$\sum_{i,j=1}^{m} \frac{k(t_i+t_j)+k(t_i-t_j)}{2}\xi_i\bar{\xi}_j = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{(A_{t_i+t_j}\Omega, \Omega)+(A_{t_i-t_j}\Omega, \Omega)}{2}\xi_i\bar{\xi}_j =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} (A_{t_i}A_{t_j}\Omega, \Omega)\xi_i\bar{\xi}_j = \sum_{i,j=1}^{m} (A_{t_i}\Omega, A_{t_j}\Omega)\xi_i\bar{\xi}_j = \Big\| \sum_{i=1}^{m} \xi_i A_{t_i}\Omega \Big\|_H^2 \geqslant 0.$$

Непрерывность, четность и ограниченность функции $k(t)$ следует из условий а), б) теоремы. Таким образом, функция $k(t)$ имеет интегральное представление (см., например, [6, 7]) $k(t) = \int\limits_0^\infty \cos\lambda t\, d\rho(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^1_+$, $t \in \mathbb{R}^1$, где $d\rho(\lambda)$ — неотрицательная конечная мера на $\mathbb{R}^1_+ = [0, +\infty)$. Мера $\rho(\cdot)$ по $k(t)$ определяется однозначно.

Сопоставим векторам $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k A_{t_k}\Omega \in H$ функции $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \cos\lambda t_k \in L_2(\mathbb{R}^1_+,$ $d\rho(\lambda))$, $n = 1, 2, \ldots$. Это соответствие изометрично и продолжается до унитарного отображения $U: H \to L_2(\mathbb{R}^1_+, d\rho(\lambda))$ При этом отображении оператору A_t соответствует оператор умножения в $L_2(\mathbb{R}^1_+, d\rho(\lambda))$ на функцию $\cos\lambda t$. В самом деле вектору

$$A\left(\sum_{k=1}^{n} c_k A_{t_k}\Omega\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k\left(\frac{A_{t+t_k}+A_{t-t_k}}{2}\right)\Omega \in H$$

соответствует функция

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\cos\lambda(t+t_k)+\cos\lambda(t-t_k)}{2} =$$

$$= \cos\lambda t \sum_{k=1}^{n} c_k \cos\lambda t_k \in L_2(\mathbb{R}^1_+, d\rho(\lambda)).$$

Эквивалентность формулировок спектральной теоремы в терминах операторов умножения и в терминах разложения единицы завершает доказательство достаточности в теореме 1.

Единственность разложения единицы следует из единственности меры $d\rho(\lambda)$.

Необходимость условий а), б) следует непосредственно из представления (1).

2. Пусть $(A_t)_{t\in\mathbb{R}^1}$ — семейство самосопряженных неограниченных операторов.

Теорема 2. *Для того чтобы для семейства $(A_t)_{t\in\mathbb{R}^1}$ имело место представление*

$$A_t = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \cos \sqrt{\lambda} t dE(\lambda), \qquad (2)$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало плотное в H $\Phi \subset \bigcup\limits_{\in\mathbb{R}^1} D(A_t)$, инвариантное относительно операторов семейства, со свойствами

а) $\frac{1}{2}[A_{t+s} + A_{t-s}] f = A_t A_s f,\ A_0 = I$;

б) $A_t f$ *сильно непрерывна по* t;

в) $\| A_t f \| \leqslant c_f e^{N_f |t|}$ $(f \in \Phi)$.

Разложение единицы $E(\cdot)$ на $\mathbb{R}^1$ определяется однозначно.

Достаточность. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Векторы из Φ — целые векторы оператора A_t, $t\in\mathbb{R}^1$, т. е. $\Phi \subset \bigcap\limits_{t\in\mathbb{R}^1} H^c(A_t)$.*

Доказательство. Напомним, что $f \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} D(A_t^n)$ называется целым вектором оператора A_t, если функция $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\| A_t^n f \|}{n!} z^n$ целая, т. е. радиус сходимости бесконечен. Оценим

$$\| A_t^{2l} f \| = \left\| \frac{1}{2^{2l}} \left\{ \sum_{k=0}^{l-1} 2 \binom{2l}{k} A_{2(l-k)t} f + \binom{2l}{l} f \right\} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{2l}} \left(\sum_{k=0}^{l-1} 2 \binom{2l}{k} \| A_{2(l-k)t} f \| + \binom{2l}{l} \| f \| \right) \leqslant c_f e^{N_f 2l|t|},$$

$$\| A_t^{2l-1} f \| = \left\| \frac{1}{2^{2l-2}} \sum_{k=0}^{l-1} \binom{2l-1}{k} A_{(2l-2k-1)t} f \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{2l-2}} \sum_{k=0}^{l-1} \binom{2l-1}{k} \| A_{(2l-2k-1)t} f \| \leqslant c_f e^{N_f (2l-1)|t|}.$$

Здесь мы воспользовались свойствами а) и оценкой в).

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\| A_t^n f \|}{n!} \varepsilon^n \leqslant c_f \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^{N_f n|t|}}{n!} \varepsilon^n < \infty$ при $\forall \varepsilon > 0$, так как $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{N_f n|t|}(n+1)!}{e^{N_f (n+1)|t|}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{e^{N_f |t|}} = \infty$.

Лемма 2. *Операторы $(A_t)_{t\in\mathbb{R}^1}$ — коммутирующие самосопряженные операторы.*

Доказательство. Операторы A_{t_1} и A_{t_2} коммутируют на Φ, так как из соотношения а) следует, что $A_{-s} f = A_s f$, $s \in \mathbb{R}^1$ и, следовательно, $A_{t_1} A_{t_2} f = A_{t_2} A_{t_1} f$, т. е. самосопряженные операторы A_{t_1} и A_{t_2} коммутируют на плотном в H множестве целых для A_{t_1} и A_{t_2} векторов, и, следовательно, коммутируют все их спектральные проекторы [5].

Предположим, что существует циклический вектор Ω семейства

$$(A_t)_{t\in\mathbb{R}^1},\ \Omega \in \Phi,\ \underset{t\in\mathbb{R}^1}{\text{ЗЛО}} \{A_t \Omega\} = H.$$

Лемма 3. $k(t) = (A_t\Omega, \Omega)$ — *четно положительно определенная функция такая, что* $| k(t) | \leqslant c e^{N|t|}$.

Доказательство проводится так же, как и в теореме 1. Оценка $|k(t)| \leqslant ce^{N|t|}$ непосредственно следует из в).

Тогда $k(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \cos \sqrt{\lambda} t d\rho(\lambda)$, где мера $\rho(\cdot)$ определяется однозначно.

Лемма 4. *Отображение* $H \ni \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k A_{t_k}\Omega \to \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \cos \sqrt{\lambda} t_k \in L_2(\mathbb{R}^1, d\rho(\lambda))$ — *изометрия плотных множеств. Ее замыкание — унитарный оператор* $U: H \to L_2(\mathbb{R}^1, d\rho(\lambda))$ *такой, что* $A_t = U^* Q_{\cos\sqrt{\lambda}t} U$.

Доказательство. Отметим лишь доказательство моментов, связанных с неограниченностью операторов.

Плотность векторов $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \cos \sqrt{\lambda} t_k$ в $L_2(\mathbb{R}^1, d\rho(\lambda))$ следует из оценки $|k(t)| \leqslant ce^{N|t|}$ [6]. Соответствие операторов A_t и операторов $Q_{\cos\sqrt{\lambda}t}$ умножения на $\cos\sqrt{\lambda}t$ на плотных множествах показывается, как и в доказательстве теоремы 1. Так как эти векторы образуют существенную область для оператора A_t в H и для $Q_{\cos\sqrt{\lambda}t}$ в $L_2(\mathbb{R}^1, d\rho(\lambda))$ (плотное множество целых векторов), то $UD(A_t) = D(Q_{\cos\sqrt{\lambda}t})$ и $A_t = U^* Q_{\cos\sqrt{\lambda}t} U$.

Но так как для семейства $(Q_{\cos\sqrt{\lambda}t})_{t\in\mathbb{R}^1}$ имеет место интегральное представление $Q_{\cos\sqrt{\lambda}t} = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \cos\sqrt{\lambda} t dQ_{\chi_{\Delta}(\cdot)}$, то

$$A_t = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \cos \sqrt{\lambda} t dE(\lambda), \tag{3}$$

где $E(\Delta) = U^* Q_{\chi_\Delta(\cdot)} U$, $\chi_\Delta(\cdot)$ — характеристическая функция интервала $\Delta \in \mathbb{R}^1$.

Если же циклический вектор для семейства $(A_t)_{t\in\mathbb{R}^1}$, принадлежащий Φ, отсутствует, то выберем ортонормированный базис в H $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ $\ldots (e_k \in \Phi;\ k = 1, 2, \ldots)$ и положим $e_1 = \Omega_1$, $H_1 = \underset{t\in\mathbb{R}^1}{\text{ЗЛО}}\{A_t\Omega_1\}$, P_{H_1} — ортопроектор на H_1.

Лемма 5. *Операторы* P_{H_1} *и* A_{t_0}, $t_0 \in \mathbb{R}^1$, *коммутируют, т. е.* P_{H_1} *коммутирует со всеми спектральными проекторами* A_{t_0}, $t_0 \in \mathbb{R}^1$.

Доказательство. Спектральные проекторы оператора A_{t_0} коммутируют с P_{H_1}, если они приводят H_1. Но это эквивалентно тому, что H_1 приводят унитарные операторы $U_s = e^{isA_{t_0}}$ при всех $s \in \mathbb{R}^1$. Но $U_s\{A_t\Omega_1\} \subset \subset H_1$, так как векторы $A_t\Omega_1$ — целые для оператора $U_s: U_s(A_t\Omega_1) = $

$$= e^{isA_{t_0}}(A_t\Omega_1) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(isA_{t_0})^n}{n!}\right)(A_t\Omega_1) \in H_1.$$

Если $H_1 \neq H$, то выберем первый вектор $e_k \notin H_1$ и положим $\Omega_2 = e_k - P_{H_1}e_k$ (Ω_2 — также целый вектор для операторов $(A_t)_{t\in\mathbb{R}^1}$), $H_2 = \underset{t\in\mathbb{R}^1}{\text{ЗЛО}}\{A_t\Omega_2\}$, P_{H_2} — ортопроектор на H_2 и т. д. Воспользовавшись равенством (3) в каждом из H_k ($\oplus \Sigma H_k = H$), завершим доказательство достаточности в теореме 2.

Докажем необходимость. Пусть для семейства самосопряженных операторов $(A_t)_{t\in\mathbb{R}^1}$ в комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве H справедливо спектральное представление (2). Необходимо доказать, что существует область Φ со свойствами а) — в).

В качестве области Φ возьмем $\Phi = \bigcup\limits_{a\in\mathbb{R}^1} E([-a, a])H$. Пусть $f \in \Phi$, тогда $\exists a: f \in E([-a, a])H$ (a зависит от f). а). Введем ограниченные операторы $A_{t,a} = \int\limits_{-a}^{a} \cos\sqrt{\lambda} t dE(\lambda)$. В силу ортогональности операторнозначной меры $dE(\lambda)$ имеет место соотношение

$$\frac{1}{2}[A_{t+s}+A_{t-s}]f=\frac{1}{2}[A_{t+s,a}+A_{t-s,a}]f=$$

$$=\frac{1}{2}\Big(\int_{-a}^{a}\cos\sqrt{\lambda}(t+s)\,dE(\lambda)+\int_{-a}^{a}\cos\sqrt{\lambda}(t-s)\,dE(\lambda)\Big)f=$$

$$=\left(\int_{-a}^{a}\frac{\cos\sqrt{\lambda}(t+s)+\cos\sqrt{\lambda}(t-s)}{2}\,dE(\lambda)\right)f=$$

$$=\Big(\int_{-a}^{a}\cos\sqrt{\lambda}t\cos\sqrt{\lambda}s\,dE(\lambda)\Big)f=\Big(\int_{-a}^{a}\cos\sqrt{\lambda}t\,dE(\lambda)\times$$

$$\times\int_{-a}^{a}\cos\sqrt{\lambda}s\,dE(\lambda)\Big)f=A_{t,a}\cdot A_{s,a}f=A_tA_sf.$$

б). Докажем сильную непрерывность функции A_tf по t, $f\in\Phi$. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\lim_{t_n\to t_0}\|(A_{t_n}-A_{t_0})f\|_H^2=\lim_{t_n\to t_0}\int_{-a}^{a}(\cos\sqrt{\lambda}t_n-\cos\sqrt{\lambda}t_0)^2\times$$

$$\times d(E(\lambda)f,f)=\lim_{t_n\to t_0}\int_{-a}^{a}(\cos\sqrt{\lambda}t_n-\cos\sqrt{\lambda}t_0)^2\times$$

$$\times d\sigma_f(\lambda)=\int_{-a}^{a}\lim_{t_n\to t_0}(\cos\sqrt{\lambda}t_n-\cos\sqrt{\lambda}t_0)^2\,d\sigma_f(\lambda)=0.$$

Здесь мажорирующей функцией для последовательности функций

$$(\cos\sqrt{\lambda}t_n-\cos\sqrt{\lambda}t_0)^2$$

является функция

$$\varphi(\lambda)=\begin{cases}4\cos^2\sqrt{\lambda}t,\ t=\sup\limits_n t_n,\ \text{если}\ \lambda<0,\\ 4,\ \text{если}\ \lambda\geqslant 0,\ \lambda\in\mathbb{R}^1.\end{cases}$$

в). $\|A_tf\|=\|A_{t,a}f\|\leqslant c_fe^{\sqrt{a}|t|}=c_fe^{N_f|t|}$.

1. *Kurepa S.* A cosine functional equation in Hilbert space // Can. J. Math.— 1960.— **12**.— P. 45—50.
2. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных.— Киев : Наук. думка, 1978.— 360 с.
3. *Березанский Ю. М.* Спектральные представления решений некоторых классов функциональных и дифференциальных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1978.— № 7.— С. 579—583.
4. *Березанский Ю. М., Калюжный А. А.* Представление гиперкомплексных систем с локально компактным базисом // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 4.— С. 417—421.
5. *Nelson E.* Analytic vectors // Ann. Math.— 1959.— **70**, N 3.— P. 572—615.
6. *Крейн М. Г.* Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения // Докл. АН СССР.— 1946.— 53, № 1.— С. 3—5.
7. *Лопотко О. В., Рудинский И. И.* Интегральное представление четно-положительно определенных ограниченных функций бесконечного числа переменных // Укр. мат. журн.— 1982.— **34**, № 3.— С. 378—380.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 13.10.87

$$\frac{1}{2}[A_{t+s}+A_{t-s}]f=\frac{1}{2}[A_{t+s,a}+A_{t-s,a}]f=$$

$$=\frac{1}{2}\Big(\int_{-a}^{a}\cos\sqrt{\lambda}(t+s)\,dE(\lambda)+\int_{-a}^{a}\cos\sqrt{\lambda}(t-s)\,dE(\lambda)\Big)f=$$

$$=\Big(\int_{-a}^{a}\frac{\cos\sqrt{\lambda}(t+s)+\cos\sqrt{\lambda}(t-s)}{2}\,dE(\lambda)\Big)f=$$

$$=\Big(\int_{-a}^{a}\cos\sqrt{\lambda}t\cos\sqrt{\lambda}s\,dE(\lambda)\Big)f=\Big(\int_{-a}^{a}\cos\sqrt{\lambda}t\,dE(\lambda)\times$$

$$\times\int_{-a}^{a}\cos\sqrt{\lambda}s\,dE(\lambda)\Big)f=A_{t,a}\cdot A_{s,a}f=A_tA_sf.$$

б). Докажем сильную непрерывность функции A_tf по t, $f\in\Phi$. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\lim_{t_n\to t_0}\|(A_{t_n}-A_{t_0})f\|_H^2=\lim_{t_n\to t_0}\int_{-a}^{a}(\cos\sqrt{\lambda}t_n-\cos\sqrt{\lambda}t_0)^2\times$$

$$\times d(E(\lambda)f,f)=\lim_{t_n\to t_0}\int_{-a}^{a}(\cos\sqrt{\lambda}t_n-\cos\sqrt{\lambda}t_0)^2\times$$

$$\times d\sigma_f(\lambda)=\int_{-a}^{a}\lim_{t_n\to t_0}(\cos\sqrt{\lambda}t_n-\cos\sqrt{\lambda}t_0)^2\,d\sigma_f(\lambda)=0.$$

Здесь мажорирующей функцией для последовательности функций

$$(\cos\sqrt{\lambda}t_n-\cos\sqrt{\lambda}t_0)^2$$

является функция

$$\varphi(\lambda)=\begin{cases}4\cos^2\sqrt{\lambda}t,\ t=\sup\limits_n t_n,\ \text{если}\ \lambda<0,\\ 4,\ \text{если}\ \lambda\geqslant 0,\ \lambda\in\mathbb{R}^1.\end{cases}$$

в). $\|A_tf\|=\|A_{t,a}f\|\leqslant c_fe^{\sqrt{a}|t|}=c_fe^{N_f|t|}.$

1. *Kurepa S.* A cosine functional equation in Hilbert space // Can. J. Math.— 1960.— **12**.— P. 45—50.
2. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных.— Киев : Наук. думка, 1978.— 360 с.
3. *Березанский Ю. М.* Спектральные представления решений некоторых классов функциональных и дифференциальных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1978.— № 7.— С. 579—583.
4. *Березанский Ю. М., Калюжный А. А.* Представление гиперкомплексных систем с локально компактным базисом // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 4.— С. 417—421.
5. *Nelson E.* Analytic vectors // Ann. Math.— 1959.— **70**, N 3.— P. 572—615.
6. *Крейн М. Г.* Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения // Докл. АН СССР.— 1946.— 53, № 1.— С. 3—5.
7. *Лопотко О. В., Рудинский И. И.* Интегральное представление четно-положительно определенных ограниченных функций бесконечного числа переменных // Укр. мат. журн.— 1982.— **34**, № 3.— С. 378—380.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Получено 13.10.87