УДК 517.948

В. Н. Павленко

О существовании полуправильных решений задачи Дирихле для квазилинейных уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями

Полуправильные решения интегральных уравнений с разрывными нелинейностями были введены в работе М. А. Красносельского и А. В. Покровского [1], там же приводятся достаточные условия существования таких решений.

В данной работе получена теорема о существовании полуправильных решений задачи Дирихле для квазилинейных уравнений эллиптического типа с разрывной слабой нелинейностью. Доказательство основано на общем результате автора из [2] об уравнениях с разрывными операторами в банаховых пространствах. В отличие от [1] не предполагается, что нелинейность $f(x, u)$, входящая в уравнение, монотонная по u, кроме того, ослаблены ограничения на рост $f(x, u)$.

1. Формулировка основного результата. Рассматривается задача Дирихле

$$\tau u(x) + f(x, u(x)) = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \omega, \tag{1}$$

$$\partial_\nu^r(S)\, u(x) = g_r(x), \ x \in S, \ 0 \leqslant r \leqslant m-1, \tag{2}$$

где $\tau = \sum\limits_{1 \leqslant |\alpha|, |\beta| \leqslant m} D^\beta a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha$ — формальный дифференциальный оператор порядка $2m$ в дивергентной форме, определенный в ограниченной области ω с гладкой границей S и удовлетворяющий неравенству

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\, \xi^{\alpha+\beta} \geqslant \varkappa |\xi|^{2m}, \ x \in \omega, \ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

постоянная $\varkappa$ положительна и не зависит от x и ξ; функции $a_{\alpha\beta}$ вещественны и имеют s-непрерывные по Гельдеру производные порядка $|\beta|$ в $\overline{\omega}$, $0 < s < 1$, $\partial_\nu^r(S)$ — производные в направлении внутренней нормали к S, функция $f\colon \omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ суперпозиционно измерима, функции $g_r \in C_{2m-r,s}(S)$, $0 \leqslant r \leqslant m-1$

Определение 1 *Функцию* $u \in W_q^{2m}(\omega)$, $q > 1$, *назовем решением задачи* (1), (2), *если* u *удовлетворяет уравнению* (1) *почти всюду на* ω *и для некоторой функции* $\varphi \in C_{2m,s}(\overline{\omega})$, *удовлетворяющей условиям*

$$\partial_\nu^r(S)\, \varphi(x) = g_r(x), \ x \in S, \qquad 0 \leqslant r \leqslant m-1 \tag{3}$$

разность $u - \varphi \in \overset{0}{W}{}_2^m(\omega)$.

Замечание. В силу сделанных предположений относительно S и g_r существует функция $\varphi \in C_{2m,s}(\overline{\omega})$, обладающая свойством (3).

Определение 2. *Решение* u *задачи* (1), (2) *называется полуправильным, если для почти всех* $x \in \omega$ *значения* $u(x)$ *являются точками непрерывности функции* $f(x, \cdot)$.

Определение 3. *Будем говорить, что для функции* $f: \omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *выполнено* A*-условие по отношению к дифференциальному оператору* τ *порядка* $2m$, *если*

а) *для любого* $u \in \mathbb{R}$ *функция* $f(\cdot, u)$ *измерима на* ω *и для почти всех* $x \in \omega$ *функция* $f(x, \cdot)$ *имеет разрывы только первого рода и непрерывна справа на* $\mathbb{R}$;

б) *существует семейство поверхностей в* $\mathbb{R}^{n+1}$

$$S_i = \{(x, u) \mid x \in \bar{\omega},\ u = \varphi_i(x)\}, \quad \varphi_i \in C_{2m}(\bar{\omega}),$$

$i \in \Lambda$, Λ — *конечно или счетно, таких, что для почти всех* $x \in \omega$, *если* u — *точка разрыва функции* $f(x, \cdot)$, *то* $(x, u) \in S_i$ *для некоторого* $i \in \Lambda$ *и*

$$(f(x, \varphi_i(x) -) + \tau\varphi_i(x))(f(x, \varphi_i(x)) + \tau\varphi_i(x)) > 0. \qquad (4)$$

Отметим, что из условия а) определения 3 следует суперпозиционная измеримость функции f [3].

Теорема 1. *Предположим, что*

1) *функция* $f = f_1 + f_2$, $f_i: \omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, *для любого* $u \in \mathbb{R}$ *функции* $f_1(\cdot, u)$ *и* $f_2(\cdot, u)$ *измеримы на* ω, *причем функция* $f_1(x, \cdot)$ *неубывающая и непрерывная справа, а* $f_2(x, \cdot)$ *непрерывна на* $\mathbb{R}$ *для почти всех* $x \in \omega$, *и для* f *выполнено* A*-условие по отношению к дифференциальному оператору* τ;

2) *либо* $n \geqslant 2m$ *и для некоторого* $1 < p < 2n/(n - 2m)$

$$|f_i(x, u)| \leqslant a_i |u|^{p-1} + b_i(x) \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

и почти всех $x \in \omega$, $i = 1, 2$, *где* a_i — *положительные константы*, $b_i \in L^q(\omega)$, $q = p/(p-1)$; *либо* $n < 2m$ *и для любого* $d > 0$ *существует функция* $a_d \in L^q(\omega)$, $q > 1$, *такая, что* $|f_i(x, u)| \leqslant a_d(x)$ $\forall u \in [-d; d]$ *и почти всех* $x \in \omega$, $i = 1, 2$;

3) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant |\alpha|, |\beta| \leqslant m} (-1)^{|\beta|} \int_{\omega} a_{\alpha\beta}(x) D^{\alpha}u(x) D^{\beta}u(x)\, dx \geqslant M \sum_{|\alpha| = m} \| D^{\alpha}u \|^2_{L^2(\omega)}$ *для произвольной* $u \in \overset{0}{W}{}^m_2(\omega)$, *где постоянная* $M > 0$ *не зависит от* u, $\| \ \|_{L^2(\omega)}$ — *норма в* $L^2(\omega)$;

4) $f(x, u) \cdot u \geqslant -ku^2 - k_1(x)|u|^{2-\gamma} - k_2(x)$ $\forall u \in \mathbb{R}$ *и почти всех* $x \in \omega$, *где* $k > 0$, $0 < \gamma < 2$, $k_1 \in L^{2/\gamma}(\omega)$, $k_2 \in L(\omega)$, *причем* $M - kC > 0$, C — *постоянная в неравенстве*

$$\| u \|^2_{L^2(\omega)} \leqslant C \sum_{|\alpha| = m} \| D^{\alpha}u \|^2_{L^2(\omega)} \quad \forall u \in \overset{0}{W}{}^m_2(\omega).$$

Тогда задача (1), (2) *имеет решение и все ее решения полуправильные.*

Замечание. Ограничение (4) в определение 3 на точки разрыва функции f в теореме 1 существенно. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим задачу (1), (2) с $\tau = -\Delta$, функцией $f(x, u) = -1$, если $u \geqslant \varphi_1(x)$, и $f(x, u) = -3$, если $u < \varphi_1(x)$, для любого $x \in \omega$, где φ_1 — решение задачи
$-\Delta u(x) = 2$, $x \in \omega$, $u(x) = 0$, $x \in S$,
и $g_0(x) = 0$ на S. В этом случае выполнены все условия теоремы 1, кроме оценки (4) в определении 3, и решение не существует. Действительно, если u — решение поставленной задачи, то, учитывая равенство $(f(x, u(x)) + 2)(u(x) - \varphi_1(x)) = |u(x) - \varphi_1(x)|$ для любого $x \in \omega$, получаем

$$\int_{\omega} -\Delta(u - \varphi_1)(x) \cdot (u - \varphi_1)(x)\, dx + \int_{\omega} |u(x) - \varphi_1(x)|\, dx = 0.$$

Так как первое слагаемое в левой части этого равенства неотрицательно, то отсюда следует, что $u(x) = \varphi_1(x)$ почти всюду на ω. С другой стороны, $\tau\varphi_1(x) + f(x, \varphi_1(x)) = 1 \neq 0$ на ω. Получено противоречие.

Для доказательства существования решения задачи (1), (2) при выполнении условий теоремы 1 понадобится следующая общая теорема, которая является частным случаем теоремы 1 из [2].

Теорема 2. *Пусть выполнены условия*

1) *оператор* $T: E \to E^*$ *полумонотонный* [4, с. 267] *и ограниченный, E — вещественное рефлексивное банахово пространство, E^* — сопряженное с E пространство;*

2) *существует $R > 0$ такое, что $\langle Tx, x\rangle \geqslant 0$, если $\| x \| \geqslant R$;*

3) *точки разрыва T, принадлежащие шару $B(R) = \{x \in E \mid \| x \| \leqslant R\}$, регулярны* [2].

Тогда уравнение $Tx = 0$ имеет решение в шаре $B(R)$.

2. Доказательство теоремы 1. Из условия 3 теоремы 1, принадлежности коэффициентов $a_{\alpha\beta}$ оператора τ пространствам $C_{|\beta|,s}(\bar{\omega})$, $1 \leqslant |\alpha|, |\beta| \leqslant m$, а функций g_r к $C_{2m-r,s}(S)$, $0 \leqslant r \leqslant m-1$, следует, что существует классическое решение $\varphi \in C_{2m,s}(\bar{\omega})$ уравнения

$$\tau\varphi = 0, \tag{5}$$

удовлетворяющее (3).

Тогда существование решения задачи (1), (2) в силу определения 1 равносильно существованию решения задачи

$$\tau u(x) + f(x, u(x) + \varphi(x)) = 0, \quad x \in \omega,$$

$$\partial_\nu^r(S)\, u(x) = 0, \ x \in S, \qquad 0 \leqslant r \leqslant m-1,$$

где φ — решение задачи (3)—(5). Заметим, что функция $g(x, u) = f(x, u + \varphi(x))$ удовлетворяет тем же условиям теоремы 1, что и функция f, если поверхности S_i заменить на поверхности S_i', определяемые уравнением $u = \varphi_i(x) - \varphi(x)$, $i \in \Lambda$, а функции f_i — на функции $g_i(x, u) = f_i(x, u + \varphi(x))$, $i = 1, 2$, причем условие 2 теоремы 1 будет выполняться с теми же константами a_i, p и q, а условие 4 с той же постоянной k, $i = 1, 2$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $g_r(x) = 0$ на S, $0 \leqslant r \leqslant m-1$.

Пусть $E = \overset{0}{W}{}_2^m(\omega)$ с нормой $\| u \| = \Big(\sum\limits_{|\alpha|=m} \int\limits_\omega | D^\alpha u |^2 \, dx \Big)^{1/2}$. Так как функции f_1 и f_2 суперпозиционно измеримы, то из условия 2 теоремы 1 следует, что операторы Немыцкого $H_i u = f_i(x, u(x))$, $i = 1, 2$, являются ограниченными в случае, когда $n \geqslant 2m$ как операторы из $L^p(\omega)$ в $L^q(\omega)$, а в случае $n < 2m$ как операторы из $C(\bar{\omega})$ в $L^q(\omega)$ (p, q из условия 2 теоремы 1). Поскольку для почти всех $x \in \omega$ функция $f_2(x, \cdot)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, то оператор H_2 является и непрерывным. Кроме того, при сделанных предположениях оператор вложения J пространства $\overset{0}{W}{}_2^m(\omega)$ в $L^p(\omega)$ при $n \geqslant 2m$ и $\overset{0}{W}{}_2^m(\omega)$ в $C(\bar{\omega})$ при $n < 2m$ компактный [5, с. 94]. Определим операторы F_1, F_2, C, действующие из E в E^*, равенствами $\forall u, v \in E$

$$\langle F_1 u, v\rangle = \sum_{1 \leqslant |\alpha|, |\beta| \leqslant m} (-1)^{|\beta|} \int\limits_\omega a_{\alpha\beta}(x)\, D^\alpha u(x)\, D^\beta v(x)\, dx,$$

$$\langle F_2 u, v\rangle = \int\limits_\omega f_1(x, u(x))\, v(x)\, dx,$$

$$\langle Cu, v\rangle = \int\limits_\omega f_2(x, u(x))\, v(x)\, dx.$$

Тогда F_1 — линейный и ограниченный оператор, удовлетворяющий в силу условия 3 теоремы 1 неравенству

$$\langle F_1 u, u\rangle \geqslant M \| u \|^2 \qquad \forall u \in E \tag{6}$$

и, значит, F_1 — монотонный оператор. Так как $F_2 = J^* H_1 J$, $C = J^* H_2 J$, где J^* — сопряженный с J оператор, то F_2 — ограниченный, а C — усиленно непрерывный оператор. Из монотонности по u функции f_1 следует монотонность F_2. Таким образом, оператор $T = F_1 + F_2 + C$ полумонотонный и ограниченный.

Если $u \in E$ и для почти всех $x \in \omega$ значения $u(x)$ являются точками непрерывности функции $f_1(x, \cdot)$, то u является точкой h-непрерывности [2] оператора T. Это следует из условия 2 теоремы 1 и теоремы Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла.

Установим регулярность точек разрыва оператора T. Доказательство проведем от противного. Допустим, что u — точка разрыва оператора T и для любого $h \in E$

$$\lim_{t \to +0} \langle T(u + th), h \rangle \geqslant 0. \tag{7}$$

Рассмотрим линейный на $\overset{0}{W}{}_2^m(\omega)$ функционал

$$\varphi(h) = \sum_{1 \leqslant |\alpha|, |\beta| \leqslant m} (-1)^{|\beta|} \int_\omega a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u(x) D^\beta h(x)\, dx$$

и положим $\psi(x) = \max(|f_1(x, u(x)-)|, \ |f_1(x, u(x))|)$. Из неравенства (7) для произвольного $h \in \overset{0}{W}{}_2^m(\omega)$ получим

$$\varphi(h) \geqslant -\Bigl(\int_\omega f_2(x, u(x))\, h(x)\, dx + \int_\omega \lim_{t \to +0} f_1(x, u(x) + th(x))\, h(x)\, dx\Bigr) \geqslant$$

$$\geqslant -\| H_2 u \|_{L^q(\omega)} \| h \|_{L^p(\omega)} - \| \psi \|_{L^q(\omega)} \| h \|_{L^p(\omega)},$$

где q из условия 2 теоремы 1, $p = q/(q-1)$. Отсюда следует, что для любого $h \in \overset{0}{W}{}_2^m(\omega)$

$$|\varphi(h)| \leqslant M \| h \|_{L^p(\omega)},$$

$$M = \| H_2 u \|_{L^q(\omega)} + \| \psi \|_{L^q(\omega)}.$$

Множество $\overset{0}{W}{}_2^m(\omega)$ является всюду плотным линейным подпространством в $L^p(\omega)$, поэтому функционал φ допускает единственное продолжение до линейного непрерывного функционала на $L^p(\omega)$. Из этого заключаем о существовании функции $g \in L^q(\omega)$ такой, что

$$\varphi(h) = \int_\omega g(x) h(x)\, dx \quad \forall h \in \overset{0}{W}{}_2^m(\omega).$$

Из полученного равенства следует принадлежность u пространству $W_q^{2m}(\omega)$ [6] и, значит, $\tau u \in L^q(\omega)$. Поскольку u — точка разрыва оператора T, то множество тех $x \in \omega$, для которых $u(x)$ является точкой разрыва функции $f(x, \cdot)$ имеет ненулевую меру. Так как для функции f выполнено A-условие, то найдется $i \in \Lambda$ и $d > 0$ такие, что ненулевой будет мера хотя бы одного из двух множеств

$$\Omega_+ = \{x \in \omega \mid u(x) = \varphi_i(x), \ f(x, u(x)-) + \tau\varphi_i(x) > d\},$$

$$\Omega_- = \{x \in \omega \mid u(x) = \varphi_i(x), \ f(x, u(x)) + \tau\varphi_i(x) < -d\}.$$

Пусть для определенности $\operatorname{mes} \Omega_+ = \nu \neq 0$. Так как функции $\psi(x) = \max(|f(x, u(x)-)|, |f(x, u(x))|)$ и $\tau u(x)$ суммируемы на ω, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для любого измеримого множества $B \subset \omega$, мера которого меньше ε, верны неравенства

$$\int_B |\tau u(x)|\, dx < d\nu/8, \qquad \int_B \psi(x)\, dx < d\nu/8.$$

Существует открытое множество Ω_1, замыкание которого $\overline{\Omega}_1$ содержится в области ω, и замкнутое множество $\Omega_2 \subset \Omega_1 \cup \Omega_+$ такие, что $\operatorname{mes} \Omega_2 > 2^{-} \cdot \nu$, $\operatorname{mes}(\Omega_1 \setminus \Omega_2) < \varepsilon$. Пусть h — функция, удовлетворяющая следующим условиям: 1) $h \in C_\infty(\omega)$, 2) $0 \leqslant h(x) \leqslant 1$ на ω, 3) $h(x) = 1$ для $x \in \Omega_2$ и $h(x) = 0$ вне Ω_1. Из равенства функций u и φ_i на Ω_2 следует, что $\tau u(x) = \tau\varphi_i(x)$ почти всюду на Ω_2 [7]. Отсюда, учитывая принадлежность h пространству $\overset{0}{W}{}_2^m(\omega)$, неравенство $\operatorname{mes}(\Omega_1 \setminus \Omega_2) < \varepsilon$, для $h_1 = -h$

получаем

$$\lim_{t\to+0}\langle T(u+th_1),h_1\rangle=-\int\limits_{\Omega_1\setminus\Omega_2}\tau u(x)\,h(x)\,dx-$$

$$-\int\limits_{\Omega_1\setminus\Omega_2}f(x,u(x)-)\,h(x)\,dx-\int\limits_{\Omega_2}\tau\varphi_i(x)+f(x,\varphi_i(x)-)\,dx<$$

$$<d\nu/8+d\nu/8-d\nu/2=-4^{-1}d\nu<0.$$

Но это противоречит (7). Случай, когда $\operatorname{mes}\Omega_-\neq 0$ рассматривается аналогично. Таким образом, установлена регулярность точек разрыва оператора T во всем пространстве E. Из условий 3 и 4 теоремы 1 следует, что

$$\lim_{\|u\|\to+\infty}\langle Tu,u\rangle=+\infty$$

и, значит, существует $R>0$ такое, что $\langle Tu,u\rangle\geqslant 0$, если $\|u\|\geqslant R$. Проверено выполнение всех условий теоремы 2. Следовательно, найдется $u\in\overset{0}{W}{}_2^m(\omega)$, удовлетворяющая уравнению $Tv=0$, т. е. $\forall v\in\overset{0}{W}{}_2^m(\omega)$

$$\sum_{1\leqslant|\alpha|,|\beta|\leqslant m}(-1)^{|\beta|}\int\limits_{\omega}a_{\alpha\beta}(x)\,D^\alpha u(x)\,D^\beta v(x)\,dx=-\int\limits_{\omega}f(x,u(x))\,v(x)\,dx.$$

Так как $f(x,u(x))\in L^q(\omega)$, то из этого интегрального тождества следует, что $u\in W_q^{2m}(\omega)$ и $\tau u(x)=-f(x,u(x))$ почти всюду на ω [6]. Тем самым доказано, что u — решение задачи (1), (2). Осталось заметить, что выполнение A-условия для функции f относительно оператора τ гарантирует, что любое решение задачи (1), (2) является полуправильным.

Докажем это от противного. Пусть u — решение задачи (1), (2) и мера множества $x\in\omega$, для которых $u(x)$ — точка разрыва $f(x,\cdot)$ не равна нулю. Но тогда ненулевую меру будет иметь при некотором $i\in\Lambda$ множество

$$\Omega=\{x\in\omega\mid u(x)=\varphi_i(x),\ (f(x,\varphi_i(x)-)+\tau\varphi_i(x))\,(f(x,\varphi_i(x))+$$

$$+\tau\varphi_i(x))>0\}.$$

Как показано в [7], для почти всех $x\in\Omega$ должно выполняться равенство $\tau u(x)=\tau\varphi_i(x)$. Отсюда следует, что u не является решением задачи (1), (2). Получено противоречие. Теорема 1 полностью доказана.

Замечание. Полуправильные решения в [1] были введены в связи с проблемой существования корректных по отношению к различного рода возмущениям решений уравнений с сильными нелинейностями. Эти исследования были продолжены авторами в совместной работе [8] и работе А. В. Покровского [9]. В частности, были получены теоремы существования полуправильных и корректных (в определенном смысле) решений задачи Дирихле для уравнений эллиптического типа второго порядка с разрывной нелинейностью. Однако классы допустимых нелинейностей, рассмотренные в [8, 9] и данной работе, различны.

1. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Правильные решения уравнений с разрывными нелинейностями // Докл. АН СССР.— 1976.— **226**, № 3.— С. 506—509.
2. *Павленко В. Н.* Существование решений нелинейных уравнений с разрывными полумонотонными операторами // Укр. мат. журн.— 1981.— 33, № 4.— С. 547—551.
3. *Шрагин И. В.* Условия измеримости суперпозиций // Докл. АН СССР.— 1971.— **197**, № 2.— С. 295—298.
4. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов.— М.: Наука, 1972.— 416 с.
5. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике.— Изд-во Ленингр. ун-та, 1950.— 250 с.
6. *Кошелев А. И.* Априорные оценки в L^p и обобщенные решения эллиптических уравнений и систем // Успехи мат. наук.— 1958.— Вып. 4.— С. 29—89.
7. *Павленко В. Н.* Существование решений у нелинейных уравнений с разрывными монотонными операторами // Вест. Моск. ун-та. Мат., мех.— 1973.— № 6.— С. 21—29.
8. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Правильные решения эллиптических уравнений с разрывными нелинейностями // Тр. Всесоюз. конф. по уравнениям с частными

производными, посвященной 75-летию со дня рождения академика И. Г. Петровского.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978.— С. 346—347.
9. *Покровский А. В.* Корректные решения уравнений с сильными нелинейностями // Докл. АН СССР.— 1984.— **274**, № 5.— С. 1037—1040.

Челябин. ун-т

Получено 12.02.88