УДК 517.956

В. А. Маловичко

О нелокальных краевых задачах для дифференциальных уравнений четвертого порядка

Настоящая работа является обобщением заметки [1].

1. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$; $y \in R^1$; Ω_1 — конечная односвязная осесимметричная относительно оси Oy область в полупространстве $y < 0$, ограниченная снизу кусочно гладкой поверхностью Γ_1, а сверху — частью G гиперплоскости $y = 0$; $\Omega_2 = G \times (0, 1)$; $\Omega = \Omega_1 \cup G \cup \Omega_2$; Γ — граница области Ω; $\Gamma_2 = \{(x, y) \in \Gamma : 0 \leqslant y < 1\}$, $\Gamma_3 = \{(x, y) \in \Gamma : y = 1\}$, $(l_1(x, y), \ldots, l_{n+1}(x, y))$ — вектор единичной внешней нормали к границе Γ в точке $(x, y) \in \Gamma$.

В области Ω рассмотрим уравнение

$$Lu(x, y) \equiv M^*Mu(x, y) + e(x, y)\, u = f(x, y), \tag{1}$$

где

$Mu(x, y) = (a^{ij}(x, y)\, u_{x_i})_{x_j} - (a(x, y)\, u_y)_y + a^i(x, y)\, u_{x_i} + b(x, y)\, u_y + c(x, y)\, u$ (по повторяющимся индексам происходит суммирование от 1 до n); M^* — оператор, формально сопряженный с оператором M; $a^{ij} = a^{ji}$; $a^{ij}(x, y) = 0$ при $y \geqslant 0$; при $y < 0$ матрица $\{a^{ij}(x, y)\}$ положительна; $a(x, y) \geqslant \alpha_1 > 0$, $e(x, y) \geqslant \alpha_2 > 0$ для всех $(x, y) \in \Omega$. Предполагается также, что a^i, b, $c \in C^2(\overline{\Omega})$; $e \in C(\overline{\Omega})$; функции a^{ij} трижды непрерывно дифференцируемы в $\overline{\Omega}$ по $x_1, \ldots, x_n$ и дважды по y; функция a дважды непрерывно дифференцируема в $\overline{\Omega}$ по $x_1, \ldots, x_n$ и трижды по y;

$$a^{ij}(x, y) = a^{ij}(-x, y), \quad b(x, y) = b(-x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_1; \tag{2}$$

$$a(x, y) = a(-x, y), \quad a^i(x, y) = -a^i(-x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2; \tag{3}$$

$$a^{ij}(x, y)\, l_i(x, y)\, l_j(x, y) - a(x, y)\, l_{n+1}^2(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_1. \tag{4}$$

В области Ω_1 оператор M является гиперболическим, а в области Ω_2 — ультрапараболическим. Условие (4) означает, что поверхность Γ_1 является характеристической для оператора M.

Разобьем Γ_1 на односвязные части $\Gamma_1^{(1)}$ и $\Gamma_1^{(2)}$ так, чтобы из условия $(x, y) \in \Gamma_1^{(1)}$ следовало $(-x, y) \in \Gamma_1^{(2)}$, а из условия $(x, y) \in \Gamma_1^{(2)}$ следовало $(-x, y) \in \Gamma_1^{(1)}$. Обозначим $\Gamma_2^* = \{(x, y) \in \Gamma_2 : a^i(x, y)\, l_i(x, y) \neq 0\}$ и разобьем Γ_2^* на односвязные части $\Gamma_2^{(1)}, \Gamma_2^{(2)}$ так, чтобы условия $(x, y) \in \Gamma_2^{(1)}$ и $(-x, y) \in \Gamma_2^{(2)}$ являлись следствием друг друга. Тогда в силу осесимметричности области Ω будут иметь место равенства

$$\int_{\Gamma_1^{(1)}} d\Gamma = \int_{\Gamma_1^{(2)}} d\Gamma, \quad \int_{\Gamma_2^{(1)}} d\Gamma = \int_{\Gamma_2^{(2)}} d\Gamma.$$

З а д а ч а 1. В области Ω найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, y) = \omega u(-x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_1^{(1)}, \tag{5}$$

$$Mu(x, y) = -\omega Mu(-x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_1^{(2)}, \tag{6}$$

$$u(x, y) = \nu(y)\, u(-x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_2^{(1)}, \tag{7}$$

$$Mu(x, y) = -\nu(y)\, Mu(-x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_2^{(2)}, \tag{8}$$

$$u(x, y) = u_y(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_3, \tag{9}$$

где $\omega = \mathrm{const}$, $\nu(y) = C([0,1])$,

$$Mu(-x, y) = [a^{ij}(-x, y)\, u_{-x_i}(-x, y)]_{-x_j} - [a(-x, y)\, u_y(-x, y)]_y +$$
$$+ a^i(-x, y)\, u_{-x_i}(-x, y) + b(-x, y)\, u_y(-x, y) + c(-x, y)\, u(-x, y).$$

Введем следующие обозначения: W — множество функций из $C^4(\bar{\Omega})$, удовлетворяющих условиям (5) — (9); H_+ — гильбертово пространство, полученное замыканием множества W по норме

$$\| u \| = \left\{ \int_{\Omega} [(Mu)^2 + u^2]\, d\Omega \right\}^{1/2}; \tag{10}$$

H_- — пространство с негативной нормой [2, с. 46], построенное по $L_2(\Omega)$ и H_+.

Л е м м а 1. *Задача 1 является самосопряженной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интегрируя по частям выражение $Lu \cdot v$, где $u, v \in W$, приходим к равенству

$$\int_{\Omega} Lu \cdot v d\Omega = \int_{\Gamma_1} [a^{ij}(Mu)_{x_i} l_j - a(Mu)_y l_{n+1}]\, v d\Gamma - \int_{\Gamma_2^*} (a^i l_i)\, Mu \cdot v d\Gamma -$$
$$- \int_{\Gamma_1} Mu \cdot [a^{ij} v_{x_i} l_j - a v_y l_{n+1} + (a^i l_i)\, v + b l_{n+1} v]\, d\Gamma + \int_{\Gamma_1} [a^{ij} u_{x_i} l_j - a u_y l_{n+1} +$$
$$+ (a^i l_i)\, u + b l_{n+1} u]\, Mv d\Gamma + \int_{\Gamma_2^*} (a^i l_i)\, u Mv d\Gamma - \int_{\Gamma_1} u\, [a^{ij}(Mv)_{x_i} l_j -$$
$$- a(Mv)_y l_{n+1}]\, d\Gamma + \int_{\Omega} u L v d\Omega. \tag{11}$$

Обозначим

$$Q(x, y) = [a^{ij}(x, y)\, (Mu(x, y))_{x_i} l_j(x, y) - a(x, y)\, (Mu(x, y))_y l_{n+1}(x, y)]\, v(x,y),$$
$$(x, y) \in \Gamma_1.$$

Так как на Γ_1 выполняются равенства $l_i(x, y) = -l_i(-x, y)$, $i = \overline{1, n}$, $l_{n+1}(x, y) = l_{n+1}(-x, y)$, то учитывая (2), (3), (5), (6), получаем

$$Q(-x, y) = [a^{ij}(-x, y)(Mu(-x, y))_{x_i} l_j(x, y) - a(-x, y) \times$$

$$\times (Mu(-x, y))_y l_{n+1}(x, y)]\, v(-x, y) = [a^{ij}(x, y)(-\omega Mu(x, y))_{x_i} l_j(x, y) -$$

$$- a(x, y)(-\omega Mu(x, y))_y l_{n+1}(x, y)]\, v(-x, y) = -[a^{ij}(x, y) \times$$

$$\times (Mu(x, y))_{x_i} l_j(x, y) - a(x, y)(Mu(x, y))_y l_{n+1}(x, y)] \cdot \omega v(-x, y) = -Q(x, y),$$

$$(x, y) \in \Gamma_1^{(1)}. \qquad (12)$$

Из (12) следует, что первый интеграл по Γ_1 в (11) равен нулю.

Обозначим

$$P(x, y) = a^i(x, y)\, l_i(x, y)\, Mu(x, y) \cdot v(x, y).$$

Поскольку на Γ_2^* выполняется равенство $a^i(x, y)\, l_i(x, y) = a^i(-x, y)\, l_i(-x, y)$, то из условий (8), (9) имеем

$$P(-x, y) = a^i(-x, y)\, l_i(-x, y)\, Mu(-x, y) \cdot v(-x, y) =$$

$$= a^i(x, y)\, l_i(x, y)\, [-\nu(y)\, Mu(x, y)]\, v(-x, y) =$$

$$= -a^i(x, y)\, l_i(x, y)\, Mu(x, y) \cdot [\nu(y)\, v(-x, y)] = -P(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_2^{(1)} \qquad (13)$$

Из (13) следует, что $\int\limits_{\Gamma_2^*} (a^i l_i)\, Mu \cdot v d\Gamma = 0$. Аналогично можно показать, что остальные интегралы по Γ_1 и Γ_2^* в (11) также равны нулю.

Лемма 2. *Для любой функции $u(x, y) \in W$ справедливы энергетические неравенства*

$$\gamma_1 \| u \|_{H_+} \geqslant \| Lu \|_{H_-} \geqslant \gamma_2 \| u \|_{H_+}, \quad \gamma_1 > 0, \quad \gamma_2 > 0.$$

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 2 из [1].

Определение 1. *Пусть $f(x, y) \in H_-$. Функцию $u(x, y) \in H_+$ назовем сильным решением задачи 1, если существует последовательность функций $u_p(x, y) \in W$ такая, что*

$$\lim_{p \to \infty} \| u_p - u \|_{H_+} = \lim_{p \to \infty} \| Lu_p - f \|_{H_-} = 0.$$

Согласно [2, с. 93—108; 3, с. 182—198], следствием лемм 1, 2 является такая теорема.

Теорема 1. *Для любой функции $f(x, y) \in H_-$ существует единственное сильное решение $u(x, y) \in H_+$ задачи 1.*

2. Рассмотрим нестационарный аналог задачи 1.

Задача 2. В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0, T)$, $T > 0$, найти решение уравнения

$$\tilde{L}u(x, y, t) \equiv [k(x, y, t)\, u_t]_t + M^* Mu(x, y, t) + q(x, y, t)\, u = f(x, y, t), \quad (14)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, y, t) = \omega u(-x, y, t), \quad (x, y, t) \in \Gamma_1^{(1)} \times (0, T), \qquad (15)$$

$$Mu(x, y, t) = -\omega Mu(-x, y, t), \quad (x, y, t) \in \Gamma_1^{(2)} \times (0, T), \qquad (16)$$

$$u(x, y, t) = \nu(y)\, u(-x, y, t), \quad (x, y, t) \in \Gamma_2^{(1)} \times (0, T), \qquad (17)$$

$$Mu(x, y, t) = -\nu(y)\, Mu(-x, y, t), \quad (x, y, t) \in \Gamma_2^{(2)} \times (0, T), \qquad (18)$$

$$u(x, y, t) = u_y(x, y, t) = 0, \quad (x, y, t) \in \Gamma_3 \times (0, T), \qquad (19)$$

$$u(x, y, 0) = u_t(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \overline{\Omega}, \qquad (20)$$

где $k(x, y, t) \geqslant \alpha_3 > 0$, $q(x, y, t) \geqslant \alpha_4 > 0$ для всех $(x, y, t) \in Q$; $k, k_t, q \in C(\bar{Q})$.

Задача 3. В области Q найти решение уравнения (14), удовлетворяющее краевым условиям (15)—(19) и условию

$$u(x, y, T) = u_t(x, y, T) = 0, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}. \tag{21}$$

Лемма 3. *Задачи 2 и 3 взаимно сопряженные.*

Доказательство леммы 3 аналогично доказательству леммы 1.

Введем обозначения: $\tilde{W}$ — множество функций из $C^4(\bar{Q})$, удовлетворяющих краевым условиям (15) — (20); $\tilde{W}^*$ — множество функций из $C^4(\bar{Q})$, удовлетворяющих краевым условиям (15) — (19) и (21); $\tilde{H}_+$ $(\tilde{H}^*_+)$ — гильбертово пространство, полученное замыканием множества $\tilde{W}$ $(\tilde{W}^*)$ по норме

$$\| u \| = \left\{ \int_Q [u_t^2 + (Mu)^2 + u^2] \, dQ \right\}^{1/2},$$

$\tilde{H}_-$ $(\tilde{H}^*_-)$ — пространство с негативной нормой, построенное по $L_2(Q)$ и $\tilde{H}_+$ $(\tilde{H}^*_+)$.

Лемма 4. *Для всех функций $u(x, y, t) \in \tilde{H}_+$, $v(x, y, t) \in \tilde{H}^*_+$ справедливы энергетические неравенства*

$$\gamma_3 \| u \|_{\tilde{H}_+} \geqslant \| \tilde{L} u \|_{\tilde{H}^*_-}, \quad \gamma_3 > 0,$$

$$\gamma_4 \| v \|_{\tilde{H}^*_+} \geqslant \| \tilde{L} v \|_{\tilde{H}_-}, \quad \gamma_4 > 0.$$

Доказательство леммы 4 аналогично доказательству леммы 2 из [1].

Лемма 5. *Если в области Q выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} k(x, y, t) - (T - t) k_t(x, y, t) \geqslant \alpha_5 > 0, \\ q(x, y, t) + (T - t) q_t(x, y, t) \geqslant \alpha_6 > 0, \end{aligned} \tag{22}$$

то для всех функций $u(x, y, t) \in \tilde{H}_+$ справедливо энергетическое неравенство

$$\| \tilde{L} u \|_{\tilde{H}^*_-} \geqslant \gamma_5 \| u \|_{L_2(Q)}, \quad \gamma_5 > 0. \tag{23}$$

Доказательство. Для функций $u(x, y, t) \in \tilde{W}$ введем интегральное преобразование

$$v(x, y, t) = \int_t^T (T - \tau) \, u(x, y, \tau) \, d\tau.$$

Легко заметить, что $v(x, y, t) \in \tilde{W}^*$ и $v_t(x, y, t) = -(T - t) \, u(x, y, t)$. Интегрируя по частям, получаем

$$\int_Q Lu \cdot v dQ = \int_Q (-k u_t v_t + Mu \cdot Mv + quv) \, dQ = \int_Q (T - t) \, k u_t u dQ -$$

$$- \int_Q (T - t)^{-1} [(Mv)_t Mv + q v_t v] \, dQ \geqslant \frac{1}{2} \int_Q [k - (T - t) \, k_t] \, u^2 dQ +$$

$$+ \frac{1}{2} \int (T - t)^{-2} \{(Mv)^2 + [q + (T - t) q_t] \, v^2\} \, dQ \geqslant \delta \int_Q (T - t)^{-2} [v_t^2 + (Mv)^2 +$$

$$+ v^2] \, dQ \geqslant \gamma_5 \left[\int_Q (T - t)^{-2} v_t^2 dQ \right]^{1/2} \| v \|_{\tilde{H}^*_+} = \gamma_5 \| u \|_{L_2(Q)} \| v \|_{\tilde{H}^*_+}, \quad \delta > 0. \tag{24}$$

Применяя к левой части неравенства (24) обобщенное неравенство Шварца, сокращая на $\| v \|_{\tilde{H}^*_+}$ и осуществляя предельный переход, докажем неравенство (23) для всех $u(x, y, t) \in \tilde{H}_+$.

Лемма 6. *Если в области Q выполняются неравенства*

$$k(x, y, t) + tk_t(x, y, t) \geqslant \alpha_7 > 0,$$
$$q(x, y, t) - tq_t(x, y, t) \geqslant \alpha_8 > 0, \tag{25}$$

то для всех функций $v(x, y, t) \in \tilde{H}^*_+$ справедливо энергетическое неравенство

$$\| \tilde{L}v \|_{\tilde{H}_-} \geqslant \gamma_6 \| v \|_{L_2(Q)}, \quad \gamma_6 > 0. \tag{26}$$

Неравенство (26) доказывается при помощи интегрального преобразования

$$u(x, y, t) = \int_0^t \tau v(x, y, \tau)\, d\tau, \quad v(x, y, t) \in \tilde{W}^*.$$

Определение 2. *Пусть $f(x, y, t) \in L_2(Q)$. Функцию $u(x, y, t) \in \tilde{H}_+$ назовем сильным решением задачи 2, если существует последовательность $u_p(x, y, t) \in \tilde{W}$ такая, что*

$$\lim_{p\to\infty} \| u_p - u \|_{\tilde{H}_+} = \lim_{p\to\infty} \| \tilde{L}u_p - f \|_{\tilde{H}^*_-} = 0.$$

Определение 3. *Пусть $f(x, y, t) \in \tilde{H}^*_-$. Функцию $u(x, y, t) \in L_2(Q)$ назовем сильным решением задачи 2, если существует последовательность $u_p(x, y, t) \in \tilde{W}$ такая, что*

$$\lim_{p\to\infty} \| u_p - u \|_{L_2(Q)} = \lim_{p\to\infty} \| \tilde{L}u_p - f \|_{\tilde{H}^*_-} = 0.$$

Следствием лемм 3—6 является такая теорема.

Теорема 2. *Если выполняются неравенства* (22) *и* (25), *то для любой функции $f(x, y, t) \in L_2(Q)$ существует единственное сильное решение $u(x, y, t) \in \tilde{H}_+$ задачи 2 в смысле определения 2, а для любой функции $f(x, y, t) \in \tilde{H}^*_-$ существует единственное сильное решение $u(x, y, t) \in L_2(Q)$ задачи 2 в смысле определения 3.*

Аналогичные результаты справедливы для задачи 3.

Лемма 7. *Для всех функций $u(x, y, t) \in W$, $v(x, y, t) \in \tilde{W}^*$ справедливы энергетические неравенства*

$$\| Lu \|_{L_2(Q)} \geqslant \gamma_7 \| u \|_{\tilde{H}_+}, \quad \gamma_7 > 0, \tag{27}$$

$$\| Lv \|_{L_2(Q)} \geqslant \gamma_8 \| v \|_{\tilde{H}^*_+}, \quad \gamma_8 > 0. \tag{28}$$

Доказательство. Выберем такое большое число $\mu > 0$, чтобы в области Q выполнялись неравенства

$$\mu k(x, y, t) - | k_t(x, y, t) | \geqslant \alpha_9 > 0,$$
$$\mu q(x, y, t) - | q_t(x, y, t) | \geqslant \alpha_{10} > 0.$$

Интегрируя по частям выражение $2\exp(-\mu t)\, Lu \cdot u_t$, $u \in \tilde{W}$, приходим к неравенству

$$2\int_Q \exp(-\mu t)\, \tilde{L}u \cdot u_t dQ \geqslant \int_Q \exp(-\mu t)\, [(\mu k + k_t)\, u_t^2 + \mu (Mu)^2 +$$
$$+ (\mu q - q_t)\, u^2]\, dQ \geqslant \delta_1 \| u \|^2_{\tilde{H}_+}, \quad \delta_1 > 0,$$

из которого нетрудно получить неравенство (27). Неравенство (28) доказывается аналогично, путем интегрирования по частям выражения $-2 \exp(\mu t)\, \tilde{L}v \cdot v_t$, $v \in \tilde{W}^*$.

Определение 4. *Пусть $f(x, y, t) \in L_2(Q)$. Функцию $u(x, y, t) \in L_2(Q)$ назовем слабым решением задачи 2, если для любой функции $v(x, y, t) \in \tilde{W}^*$ выполняется равенство*

$$\int_Q fv\,dQ = \int_Q u\tilde{L}v\,dQ.$$

Определение 5. *Пусть $f(x, y, t) \in L_2(Q)$. Функцию $u(x, y, t) \in L_2(Q)$ назовем сильным решением задачи 2, если существует последовательность $u_p(x, y, t) \in \tilde{W}$ такая, что*

$$\lim_{p\to\infty} \| u_p - u \|_{L_2(Q)} = \lim_{p\to\infty} \| \tilde{L}u_p - f \|_{L_2(Q)} = 0.$$

Следствием леммы 7 является такое утверждение.

Теорема 3. *Для любой функции $f(x, y, t) \in L_2(Q)$ существует слабое решение $u(x, y, t) \in L_2(Q)$ задачи 2, а сильное решение $u(x, y, t) \in L_2(Q)$ этой задачи в смысле определения 5 если существует, то оно единственно и непрерывно зависит от $f(x, y, t)$.*

Аналогичные утверждения справедливы и для задачи 3.

3. Предположим теперь, что область Ω является симметричной относительно гиперплоскости $x_m = 0$ (условие осесимметричности области Ω снимается) и вместо условий (2), (3) выполняются условия

$$a^{ij}(x, y) = a^{ij}(x^*, y), \quad b(x, y) = b(x^*, y), \quad (x, y) \in \Gamma_1,$$
$$a(x, y) = a(x^*, y), \quad a^i(x, y) = a^i(x^*, y), \quad i \neq m,$$
$$a^m(x^*, y) = -a^m(x^*, y), \quad (x, y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2,$$

где $x^* = (x_1, \ldots, x_{m-1}, -x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$. Разобьем Γ_1 и Γ_2^* на следующие части

$$\Gamma_1^{(3)} = \{(x, y) \in \Gamma_1 : x_m > 0\}, \quad \Gamma_1^{(4)} = \{(x, y) \in \Gamma_1 : x_m < 0\},$$
$$\Gamma_2^{(3)} = \{(x, y) \in \Gamma_2^* : x_m > 0\}, \quad \Gamma_2^{(4)} = \{(x, y) \in \Gamma_2^* : x_m < 0\}$$

Задача 4. В области Ω найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (9) и условиям

$$u(x, y) = \omega u(x^*, y), \quad (x, y) \in \Gamma_1^{(3)}, \tag{29}$$

$$Mu(x, y) = -\omega Mu(x^*, y), \quad (x, y) \in \Gamma_1^{(4)}, \tag{30}$$

$$u(x, y) = \nu(y)\, u(x^*, y), \quad (x, y) \in \Gamma_2^{(3)}, \tag{31}$$

$$Mu(x, y) = -\nu(y)\, Mu(x^*, y), \quad (x, y) \in \Gamma_2^{(4)}, \tag{32}$$

где

$$Mu(x^*, y) = [a^{ij}(x^*, y)\, u_{x_i^*}(x^*, y)]_{x_j^*} - [a(x^*, y)\, u_y(x^*, y)]_y +$$
$$+ a^i(x^*, y)\, u_{x_i^*}(x^*, y) + b(x^*, y)\, u_y(x^*, y) + c(x^*, y)\, u(x^*, y).$$

Аналогично тому, как это сделано в п. 1, можно показать, что для любой функции $f(x, y) \in \hat{H}_-$ задача 4 имеет единственное сильное решение $u(x, y) \in \hat{H}_+$, где $\hat{H}_+$ — гильбертово пространство, полученное замыканием множества функций из $C^4(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих условиям (9), (29) — (32), по норме (10), $\hat{H}_-$ — пространство с негативной нормой, построенное по $L_2(\Omega)$ и $\hat{H}_+$. Можно также доказать разрешимость нестационарного аналога задачи 4.

1. *Маловичко В. А.* О нелокальной краевой задаче для уравнения четвертого порядка // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 6.— С. 799—801.
2. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 798 с.
3. *Ляшко И. И., Диденко В. П., Цитрицкий О. Е.* Фильтрация шумов.— Киев : Наук. думка, 1979.— 232 с.

Киев. технол. ин-т пищ. пром-сти

Получено 10.02.88