УДК 517.51

М. И. Ганзбург

О наилучшем приближении суммы элементов и одной теореме Ньюмена—Шапиро

1. Пусть F — нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_F$ и B — подпространство F. Для $f \in F$ положим

$$E(f, B, F) = \inf_{g \in B} \|f - g\|_F. \qquad (1)$$

В настоящей статье рассматривается задача: при каких условиях на элементы $f_k \in F$, $1 \leqslant k \leqslant N$, $N \geqslant 2$, выполнено равенство

$$E\left(\sum_{k=1}^{N} f_k, B, F\right) = \sum_{k=1}^{N} E(f_k, B, F). \qquad (2)$$

В работе получены критерии выполнения равенства (2) либо его интегрального аналога (теоремы 1, 2, следствие 1). В качестве следствия приведен известный результат Ньюмена и Шапиро [1] о справедливости (2) в случае приближения функций m переменных вида $\sum_{k=1}^{m} \psi_k(x_k)$ обобщенными многочленами в равномерной метрике. Показано, что вариант теоремы Ньюмена — Шапиро в случае приближения в интегральной метрике уже не имеет места (следствие 3). Доказан также аналог теоремы Ньюмена—Шапиро для приближения целыми функциями экспоненциального типа (теорема 3). Доказательство этого результата основано на новом предельном соотношении для наилучших полиномиальных приближений непрерывных функций (теорема 4).

2. Как обычно, F^* обозначает сопряженное пространство, $B^\perp = \{\varphi \in F^* : \varphi(g) = 0 \quad \forall g \in B\}$. Пусть $G_\varepsilon(f) = \{\varphi \in B^\perp : \|\varphi\|_{F^*} = 1, \quad \varphi(f) \geqslant E(f, B, F) - \varepsilon\}$, $\varepsilon \geqslant 0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для выполнения равенства* (2) *необходимо и достаточно, чтобы* $\forall \varepsilon > 0 \ \bigcap_{k=1}^{N} G_\varepsilon(f_k) \neq \varnothing$.

Доказательство. Обозначим $If = \sum_{k=1}^{N} f_k$.

Если выполнено (2), то в силу теоремы двойственности для наилучших приближений (см., например [2, с. 141]) имеем $G_\varepsilon(If) \neq \varnothing$, $\varepsilon > 0$, и $\forall \varphi \in G_\varepsilon(If)$ получаем

$$\sum_{k=1}^{N} \varphi(f_k) \geqslant E(If, B, F) - \varepsilon = \sum_{k=1}^{N} E(f_k, B, F) - \varepsilon. \qquad (3)$$

Используя неравенства $\varphi(f_k) \leqslant E(f_k, B, F)$, $1 \leqslant k \leqslant N$, и (3), имеем

$$\varphi(f_k) \geqslant E(f_k, B, F) - \varepsilon, \quad 1 \leqslant k \leqslant N. \qquad (4)$$

Следовательно, $\varphi \in \bigcap_{k=1}^{N} G_\varepsilon(f_k)$, и необходимость теоремы доказана.

Пусть теперь $\varphi \in \bigcap_{k=1}^{N} G(f_k)$. Тогда выполнены равенства (4) и справедливы неравенства

$$E(If, B, F) \leqslant \sum_{k=1}^{N} E(f_k, B, F) \leqslant \sum_{k=1}^{N} \varphi(f_k) + N \cdot \varepsilon \leqslant E(If, B, F) + N\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда следует справедливость равенства (2), и теорема доказана.

Пусть Q — пространство с положительной мерой μ и $f_\lambda : Q \to F$ — непрерывная векторозначная функция. Далее пусть $If = \int\limits_Q f_\lambda d\mu(\lambda)$ — интеграл со свойствами: $If \in F$ и $\varphi(If) = \int\limits_Q \varphi(f_\lambda)\, d\mu(\lambda) \quad \forall\, \varphi \in F^*$. Такой интеграл существует, например, в случае компактного Q [3, с. 90].

Скажем, что F и B удовлетворяют условию E, если $\forall f \in F$ существует элемент $g_0 = g_0(f) \in B$, для которого в (1) достигается нижняя грань.

Элемент g_0 называется элементом наилучшего приближения из B для f в метрике F и обозначается $T(f)$. Скажем, что F и B удовлетворяют условию C, если для любой непрерывной $f_\lambda : Q \to F$ существует функция $T(f_\lambda) : Q \to B$, непрерывная по λ.

Если F и B удовлетворяют условиям E и C, то утверждение теоремы 1 можно обобщить и уточнить. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Если F и B удовлетворяют условиям E и C, то для выполнения равенства*

$$E(If, B, F) = \int\limits_Q E(f_\lambda, B, F)\, d\mu(\lambda) \tag{5}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\bigcap\limits_{\lambda \in Q \setminus E_0} G_0(f_\lambda) \neq \varnothing$ для некоторого $E_0 \subset Q$ $\mu E_0 = 0$.

Доказательство. Если выполнено (5), то в силу условия E и критерия элемента наилучшего приближения (см., например, [2, с. 150]) имеем $G_0(If) \neq \varnothing$ и $\forall \varphi \in G_0(If)$ получаем

$$\int\limits_Q \varphi(f_\lambda)\, d\mu(\lambda) = E(If, B, F) = \int\limits_Q E(f_\lambda, B, F)\, d\mu(\lambda). \tag{6}$$

Из (6) следует существование множества $E_0 \subset Q$, $\mu E_0 = 0$, такого, что

$$\varphi(f_\lambda) = E(f_\lambda, B, F) \quad \forall\, \lambda \in Q \setminus E_0. \tag{7}$$

Следовательно, $\varphi \in \bigcap\limits_{\lambda \in Q \setminus E_0} G_0(f_\lambda)$, и необходимость теоремы доказана.

Если $\varphi \in \bigcap\limits_{\lambda \in Q \setminus E_0} G_0(f_\lambda)$, то выполнены равенства (7).

Кроме того согласно условиям E и C существует непрерывная $g_\lambda = Tf_\lambda$, следовательно, конечен интеграл Ig [3, с. 90], и мы имеем

$$E(If, B, F) \leqslant \| If - Ig \|_F \leqslant \int\limits_Q E(f_\lambda, B, F)\, d\mu(\lambda) = \varphi(If) \leqslant E(If, B, F).$$

Отсюда следует справедливость равенства (5), и теорема доказана.

Выбирая в качестве Q отрезок натурального ряда $\{k\}_{k=1}^N$, $\mu(k) = 1$, $1 \leqslant k \leqslant N$ условие C в этом случае выполнено тривиально), из теоремы 2 получаем такое следствие.

Следствие 1. *Если F и B удовлетворяют условию E, то для выполнения равенства (2) необходимо и достаточно, чтобы $\bigcap\limits_{k=1}^N G_0(f_k) \neq \varnothing$.*

В ряде случаев полезно следующее утверждение.

Лемма 1. *Если F и B удовлетворяют условию E и выполнено равенство (2), то в качестве $T\left(\sum\limits_{k=1}^N f_k\right)$ можно взять элемент $\sum\limits_{k=1}^N T(f_k)$.*

Доказательство. Имеют место неравенства

$$E\left(\sum_{k=1}^N f_k, B, F\right) \leqslant \left\| \sum_{k=1}^N (f_k - T(f_k)) \right\|_F \leqslant \sum_{k=1}^N E(f_k, B, F) = E\left(\sum_{k=1}^N f_k, B, F\right)$$

и лемма доказана.

Замечание 1. Пример гильбертова пространства показывает, что обратное утверждение, вообще-то говоря, неверно.

3. Пусть X_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, — хаусдорфовы пространства; $X_0 = X_1 \times \ldots \times X_m$ — декартово произведение X_k, $1 \leqslant k \leqslant m$; $C(X_k)$ — пространство непрерывных на X_k функций f с нормой $\|f\|_{C(X_k)} = \sup\limits_{y_k \in X_k} |f(y_k)|$, $0 \leqslant k \leqslant m$; μ_k — положительная мера на X_k, $1 \leqslant k \leqslant m$; $\mu_0 = \mu_1 \times \ldots \times \mu_m$ — мера на X_0; $L_q(\Sigma_k, X_k, \mu_k)$ — банахово пространство измеримых по мере μ_k функций с конечной нормой $\|f\|_{L_q(\Sigma_k, X_k, \mu_k)} = \left(\int\limits_{X_k} |f|^q \, d\mu_k\right)^{1/q}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, где Σ_k — семейство измеримых по мере μ_k подмножеств X_k, $0 \leqslant k \leqslant m$; B_k — n_k-мерное подпространство $C(X_k)$ (или $L_1(\Sigma_k, X_k, \mu_k)$), $1 \leqslant k \leqslant m$.

Далее пусть $\{g_{i,k}\}_{i=1}^{n_k}$ — базис B_k, $1 \leqslant k \leqslant m$; B_0 — n-мерное подпространство $C(X_0)$ (или $L_1(\Sigma_0, X_0, \mu_0)$) элементов вида

$$P(y) = P(y_1, \ldots, y_m) = \sum_{\substack{1 \leqslant i_k \leqslant n_k \\ 1 \leqslant k \leqslant m}} c_{i_1, \ldots, i_m} \prod_{k=1}^{m} g_{i_k, k}(y_k),$$

где $c_{i_1, \ldots, i_m}$ — действительные числа и $n = \prod\limits_{k=1}^{m} n_k$.

Следствие 2 (Ньюмен, Шапиро [1]). *Пусть $g_{1,k} \equiv 1$, X_k — компакт, $1 \leqslant k \leqslant m$, и $B_0 \subset C(X_0)$. Тогда справедливы утверждения:*

а) *если $f_k \in C(X_k)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, то для функции $f_0(y) = \sum\limits_{k=1}^{m} f_k(y_k)$ имеет место равенство*

$$E(f_0, B_0, C(X_0)) = \sum_{k=1}^{m} E(f_k, B_k, C(X_k));$$

б) *существует элемент наилучшего приближения из B_0 для f_0 в метрике $C(X_0)$ вида $T(f_0) = \sum\limits_{k=1}^{m} T(f_k)$, где $T(f_k) \in B_k$ — элемент, наименее уклоняющийся от f_k в $C(X_k)$, $1 \leqslant k \leqslant m$.*

Доказательство. Пусть $\mu_k = \mu_k^+ - \mu_k^-$ — существующая согласно критерию элемента наилучшего приближения в $C(X_k)$ (см., например, [2, с. 157]) мера, сосредоточенная на множестве $M_k = M_k^+ \cup M_k^-$, $\operatorname{card} M_k \leqslant n + 1$, со свойствами: $\mu_k \in B_k^\perp$, $\operatorname{var} \mu_k = 1$,

$$\int\limits_{X_k} (f_k - T(f_k)) \, d\mu_k^\pm = \pm \operatorname{var} \mu_k^\pm E(f_k, B_k, C(X_k)). \tag{8}$$

Здесь μ_k^+, $-\mu_k^-$ — соответственно положительная и отрицательная составляющие меры μ_k, $\operatorname{supp} \mu_k^\pm = M_k^\pm$, $1 \leqslant k \leqslant m$.

Мера $\bar{\mu}_0 = \beta(\mu_1^+ \times \ldots \times \mu_m^+ - \mu_1^- \times \ldots \times \mu_m^-)$, где $\beta > 0$ выбрано из условия $\operatorname{var} \bar{\mu}_0 = 1$, определена на X_0 и сосредоточена на множестве $(M_1^+ \times \ldots \times M_m^+) \cup (M_1^- \times \ldots \times M_m^-)$. Легко проверить условие $\bar{\mu}_0 \in B_0^\perp$, а из равенства (8) следует соотношение

$$\int\limits_{X_0} f_k(y_k) \, d\bar{\mu}_0(y) = E(f_k, B_k, C(X_k)), \quad 1 \leqslant k \leqslant m.$$

Следовательно, $\bar{\mu}_0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{m} G_0(h_k)$, где $h_k(y) = f_k(y_k)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, и, применяя теорему 1, получаем справедливость утверждения а).

Чтобы доказать утверждение б), достаточно заметить, что из критерия элемента наилучшего приближения в $C(X_0)$ вытекает равенство $T(h_k) = T(f_k)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, и применить лемму 1. Следствие доказано.

Скажем, что конечномерное подпространство $B \subset L_1(\Sigma, X, \mu)$ удовлетворяет условию S, если из принадлежности $f \in B^\perp$, $\mu(\operatorname{supp} f) > 0$, следует существование множеств $E_i \in \Sigma$, $\mu(E_i) > 0$, $i = 1, 2$, таких, что $f > 0$ на E_1 и $f < 0$ на E_2.

Следствие 3. *Пусть подпространства $B_k \subset L_1(\Sigma_k, X_k, \mu_k)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, удовлетворяют условию S. Тогда для любых $f_k \in L_1(\Sigma_k, X_k, \mu_k)$, $f_0(y) = \sum_{k=1}^{m} f_k(y_k)$ равенство*

$$E(f_0, B_0, L_1(\Sigma_0, X_0, \mu_0)) = \sum_{k=1}^{m} E(f_k, B_k, L_1(\Sigma_k, X_k, \mu_k)) \tag{9}$$

выполняется в том и только в том случае, если существует натуральное k_0, $1 \leqslant k_0 \leqslant m$, такое, что $f_k \in B_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, $k \neq k_0$.

Доказательство. Обозначим $h_k(y) = f_k(y_k)$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Множества функционалов $G_0(h_k)$ имеют вид

$$G_0(h_k) = \{\operatorname{sign}_{\psi_k}(h_k - T(h_k)) : \|\psi_k\|_{L_\infty(\Sigma_0, X_0, \mu_0)} \leqslant 1\}, \quad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

где $\operatorname{sign}_\psi h \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \operatorname{sign} h, & h \neq 0, \\ \psi, & h = 0. \end{cases}$

В силу критерия элемента наилучшего приближения в $L_1(\Sigma_0, X_0, \mu_0)$ [2, с. 156] имеем $T(h_k) = T(f_k)$, $1 \leqslant k \leqslant m$.

Предположим теперь, что выполнено (9). Тогда в силу следствия 1 существуют ψ_k^0, $\|\psi_k^0\|_{L_\infty(\Sigma_k, X_k, \mu_k)} \leqslant 1$, $1 \leqslant k \leqslant m$, такие, что $\forall\, y \in X_0$ за исключением множества μ_0 — меры нуль имеем

$$H_k(y) = H_j(y), \quad 1 \leqslant j, \quad k \leqslant m, \tag{10}$$

где $H_k(y) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{sign}_{\psi_k^0}[f_k(y_k) - T(f_k)(y_k)]$. Если существуют j, k, $1 \leqslant j < k \leqslant m$, такие, что $f_j \notin B_j$, $f_k \notin B_k$, то в силу критерия элемента наилучшего приближения в $L_1(\Sigma_k, X_k, \mu_k)$ имеем $H_j \in B_j^\perp$, $H_k \in B_k^\perp$.

Используя условие S, получаем, что существует множество E_0, $\mu_0 E_0 > 0$, на котором $H_j > 0$, $H_k < 0$, что противоречит равенству (10). Следствие доказано.

Замечание 2. Условие S выполнено, например, в случаях, если B содержит константу или базис B состоит из неотрицательных функций.

Замечание 3. Следующий пример показывает, что в случае приближения в $L_1(\Sigma_0, X_0, \mu_0)$ равенство $T(f_0) = \sum_{k=1}^{m} T(f_k)$, $m > 1$, не всегда справедливо. Пусть $X_k = [-1, 1]$, μ_k — мера Лебега, $f_k(y_k) = y_k^2$, B_k состоит из констант, $1 \leqslant k \leqslant m$. Тогда $T(f_k) = 4^{-1}$, $1 \leqslant k \leqslant m$, $T(f_0) = (2^{m-1}/\omega_m)^{2/m} \neq m/4$ при $m > 1$ (это следует из трансцендентности числа $2^{m-1}/\omega_m$, $m > 1$), где ω_m — объем m-мерного шара единичного радиуса.

4. Пусть R^m — m-мерное евклидово пространство; $B_{\sigma,m}$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$, — класс целых функций m переменных экспоненциального типа σ [4, с. 99]; $\mathcal{P}_{\mu n, m}$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$, $\mu_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$, — класс алгебраических многочленов m переменных степени $\leqslant \mu_i n$ по i-й переменной, $1 \leqslant i \leqslant m$; $\Pi_\gamma = \{y \in R^m : |y_i| \leqslant \gamma_i, \ 1 \leqslant i \leqslant m\}$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, $\gamma_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Имеет место теорема.

Теорема 3. *Для функции $f_0(y) = \sum_{k=1}^{m} f_k(y_k)$, где $f_k \in C(R^1)$, справед-*

ливы равенства

$$E(f_0, B_{\sigma,m}, C(R^m)) = \sum_{k=1}^{m} E(f_k, B_{\sigma_k,1}, C(R^1)) = \left\| f_0 - \sum_{k=1}^{m} g_k \right\|_{C(R^m)}, \quad (11)$$

где $E(f_k, B_{\sigma_k,1}, C(R^1)) = \| f_k - g_k \|_{C(R^1)}$, $1 \leqslant k \leqslant m$ *(существование элементов наилучшего приближения доказано, например, в* [4, с. 181]).

Ввиду отсутствия эффективных критериев элементов наилучшего приближения из $B_{\sigma_k,1}$ в $C(R^1)$ использовать следствие 1 для доказательства равенств (11) не удается. Доказательство теоремы 3 основано на следующем результате, представляющем и самостоятельный интерес.

Теорема 4. *Пусть* $f \in C(R^m)$ *и* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *последовательность чисел, удовлетворяющих условиям*: а) $0 \leqslant \lambda_n \leqslant n$, $n = 1, 2, \ldots$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n n^{-\delta} > 0$, *где* $\delta \in (1/3, 1)$; в) $\lambda_n = o(n)$, $n \to \infty$. *Тогда для* $\gamma = (\mu_1/\sigma_1, \ldots, \mu_m/\sigma_m)$ *справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} E(f, \mathcal{P}_{\mu n,m}, C(\Pi_{(n-\lambda_n)\gamma})) = E(f, B_{\sigma,m}, C(R^m)). \quad (12)$$

В случае $m = 1$, $\lambda_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, равенство (12) для почти всех $\sigma_1 > 0$ доказано С. Н. Бернштейном [5]. Другой вариант равенства (12) получен автором [6].

5. Для доказательства теоремы 4 нам понадобится следующий результат.

Лемма 2. *Если* λ_n, $n = 1, 2 \ldots$, *удовлетворяет условиям теоремы* 4, *то для* $g \in B_{\sigma,m} \cap C(R^m)$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} E(g, \mathcal{P}_{\mu n,m}, C(\Pi_{(n-\lambda_n)\gamma})) = 0. \quad (13)$$

Доказательство. Для $g \in B_{\sigma,1} \cap C(R^1)$ известно неравенство [5]

$$E\left(g, \mathcal{P}_{\mu n,1}, C\left(\frac{-n+\lambda_n}{\sigma/\mu}, \frac{n-\lambda_n}{\sigma/\mu}\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant (n/\lambda_n)^{1/2} \exp(-(2/3)\mu\lambda_n^{3/2} n^{-1/2}) \| g \|_{C(R^1)}. \quad (14)$$

В силу условия б) имеем $\lambda_n \geqslant C_1 n^{-\delta}$, где $\delta \in (1/3, 1)$ (все константы C_i не зависят от n и ε). Тогда из (14) следует неравенство

$$E\left(g, \mathcal{P}_{\mu n,1}, C\left(\frac{-n+\lambda_n}{\sigma/\mu}, \frac{n-\lambda_n}{\sigma/\mu}\right)\right) \leqslant C_2 \exp(-C_3 n^{\beta}) \| g \|_{C(R^1)}, \quad (15)$$

где $\beta = 3\delta/2 - 1/2 > 0$. Обозначив $e_\tau(t) = \exp(i\tau t)$, $\Phi_x(y) = \prod\limits_{i=1}^{m} e_{x_i}(y_i)$, $x \in \Pi_\sigma$, $y \in \Pi_{(n-\lambda_n)\gamma}$, из (15) имеем

$$E(\Phi_x, \mathcal{P}_{\mu n,m}, C(\Pi_{(n-\lambda_n)\gamma})) \leqslant \left\| \Phi_x(y) - \prod_{i=1}^{m} P_i(y_i) \right\|_{C(\Pi_{(n-\lambda_n)\gamma})} \leqslant C_4 \exp(-C_5 n^{\beta}). \quad (16)$$

Здесь $P_i \in \mathcal{P}_{\mu_i n,1}$ — многочлен наилучшего приближения для e_{x_i} в метрике $C((-n+\lambda_n)\mu_i/\sigma_i, (n-\lambda_n)\mu_i/\sigma_i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Воспользовавшись представлением Пэли — Винера для $g \in B_{\sigma,m} \cap L_2(R^m)$ (см., например, [4, с. 109]), имеем из (16)

$$E(g, \mathcal{P}_{\mu n,m}, C(\Pi_{(n-\lambda_n)\gamma})) \leqslant \left(\prod_{i=1}^{m} \sigma_i\right)^{1/2} \max_{x\in\Pi_\sigma} E(\Phi_x, \mathcal{P}_{\mu n,m}, C(\Pi_{(n-\lambda_n)\gamma})) \leqslant$$

$$\leqslant C_6 \exp(-C_5 n^{\beta}). \quad (17)$$

Далее $\forall g \in B_{\sigma,m} \cap C(R^m)$, $\forall \varepsilon > 0$ функция $g_1(y) = g((1-\varepsilon)y) \times \times \prod_{i=1}^{m}((\sin \varepsilon\sigma_i y_i)/(\varepsilon\sigma_i y_i))$ принадлежит $B_{\sigma,m}$ и $\|g_1\|_{L_2(R^m)} \leqslant C_7 \varepsilon^{-m/2} \|g\|_{C(R^m)}$. Далее имеем

$$\|g - g_1\|_{C(\Pi_{(n-\lambda_n)\gamma})} \leqslant \|g((1-\varepsilon)\cdot) - g(\cdot)\|_{C(\Pi_{(n-\lambda_n)\gamma})} +$$

$$+ m \max_{1\leqslant i\leqslant m} \|1 - (\sin(\varepsilon(n-\lambda_n)\tau))/(\varepsilon(n-\lambda_n)\tau)\|_{C(-\mu_i,\mu_i)} \|g\|_{C(R^m)} = I_1 + I_2 \quad (18)$$

Из неравенства $\tau - \sin\tau \leqslant \tau^3/6$, $\tau > 0$, получаем

$$I_2 \leqslant C_8 \varepsilon^2 n^2 \|g\|_{C(R^m)}. \quad (19)$$

Для оценки I_1 используем неравенство Бернштейна

$$I_1 \leqslant \max_{R^m} \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial g}{\partial y_i} \right)^2 \right)^{1/2} (n-\lambda_n)\,\varepsilon \left(\sum_{i=1}^{m} (\mu_i/\sigma_i)^2 \right)^{1/2} \leqslant C_9 \varepsilon \cdot n \|g\|_{C(R^m)}. \quad (20)$$

Из неравенств (17) — (20) получаем ($0 < \varepsilon < 1$)

$$E(g, \mathcal{P}_{\mu n,m}, C(\Pi_{(n-\lambda_n)\gamma})) \leqslant C_{10} (\varepsilon n + \varepsilon^2 n^2 + \varepsilon^{-m/2} \exp(-C_5 n^{\beta})) \|g\|_{C(R^m)}. \quad (21)$$

Минимизируя правую часть (21) по $\varepsilon \in (0, 1)$, получаем справедливость равенства (13) $\forall g \in B_{\sigma,m} \cap C(R^m)$.

6. Доказательство теоремы 4. Пусть $f \in C(R^m)$ и $g \in B_{\sigma,m}$ таковы, что $E(f, B_{\sigma,m}, C(R^m)) = \|f - g\|_{C(R^m)}$. Тогда в силу соотношения (13) имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} E(f, \mathcal{P}_{\mu n,m}, C(\Pi_{(n-\lambda_n)\gamma})) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} E(f-g, \mathcal{P}_{\mu n,m}, C(\Pi_{(n-\lambda_n)\gamma})) +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} E(g, \mathcal{P}_{\mu n,m}, C(\Pi_{(n-\lambda_n)\gamma})) \leqslant E(f, B_{\sigma,m}, C(R^m)). \quad (22)$$

Пусть теперь $P_n(y) = \sum_{\max_i(\alpha_i/\mu_i)\leqslant n} C_\alpha y_1^{\alpha_1} \ldots y_m^{\alpha_m}$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ — мультииндекс, многочлен, удовлетворяющий равенству

$$E(f, \mathcal{P}_{\mu n,m}, C(\Pi_{(n-\lambda_n)\gamma})) = \|f - P_n\|_{C(\Pi_{(n-\lambda_n)\gamma})}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

В силу известного неравенства [7] имеем

$$|C_\alpha| \leqslant 2 \prod_{i=1}^{m} \sigma_i^{\alpha_i} n^{\alpha_i} (n-\lambda_n)^{-\alpha_i} (\alpha_i!)^{-1} \max_{\Pi_{(n-\lambda_n)\gamma}} |P_n| \leqslant$$

$$\leqslant 4 \prod_{i=1}^{m} \sigma_i^{\alpha_i} n^{\alpha_i} (n-\lambda_n)^{-\alpha_i} (\alpha_i!)^{-1} \|f\|_{C(R_m)}.$$

Отсюда для любого $z = (z_1, \ldots, z_m)$ из m-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^m$ получаем ($k = 1, 2, \ldots, n = 1, 2, \ldots$)

$$\Bigl| \sum_{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = k} C_\alpha z_1^{\alpha_1} \ldots z_m^{\alpha_m} \Bigr| \leqslant 4 \frac{(1 + \lambda_n/(n-\lambda_n))^k \left(\sum_{i=1}^{m} \sigma_i |z_i| \right)^k}{k!} \cdot \|f\|_{C(R^m)}. \quad (23)$$

Пусть теперь последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что существует предел $D = \lim_{k\to\infty} E(f, \mathcal{P}_{\mu n_k,m}, C(\Pi_{(n_k-\lambda n_k)\gamma}))$. В силу леммы 2.4 из [6] и неравенств (23) следует, что существуют подпоследовательность (без потери общности считаем, что она совпадает с $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$) и целая функция g такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} P_{n_k} = g$ равномерно на любом компакте $\mathbb{C}^m$. Кроме того, из (23) и условия в) следует, что $\forall \varepsilon > 0$ предельная функция удовлетворяет неравенству

$$|g(z)| \leqslant 4 \|f\|_{C(R^m)} \exp\left((1+\varepsilon)\sum_{i=1}^{m} \sigma_i |z_i|\right),$$

а следовательно, $g \in B_{\sigma,m}$. Тогда имеем

$$D = \lim_{k\to\infty} \|f - P_{n_k}\|_{C(\Pi_{(n_k-\lambda_{n_k})\gamma})} = \|f - g\|_{C(R^m)} \geqslant E(f, B_{\sigma,m}, C(R^m)).$$

Отсюда следует неравенство

$$\varliminf_{n\to\infty} E(f, \mathcal{P}_{\mu n,m}, C(\Pi_{(n_k-\lambda_{n_k})\gamma})) \geqslant E(f, B_{\sigma,m}, C(R^m)). \tag{24}$$

Из неравенств (22), (24) получаем справедливость теоремы 4.

7. Доказательство теоремы 3. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ та же последовательность, что и в теореме 4. В силу следствия 2 для $h_k(y) = f_k(y_k)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, имеем

$$E\left(\sum_{k=1}^{m} h_k, \mathcal{P}_{\mu n,m}, C(\Pi_{(n-\lambda_n)\gamma})\right) = \sum_{k=1}^{m} E(h_k, \mathcal{P}_{\mu n,m}, C(\Pi_{(n-\lambda_n)\gamma})) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} E\left(f_k, \mathcal{P}_{\mu_k n,1}, C\left(-\frac{n-\lambda_n}{\sigma_k/\mu_k}, \frac{n-\lambda_n}{\sigma_k/\mu_k}\right)\right). \tag{25}$$

Переходя к пределу в (25) при $n \to \infty$ и используя равенство (12), получаем справедливость левого соотношения (11). Правое равенство (11) следует теперь из леммы 1. Теорема доказана.

1. *Newmen D. J., Shapiro H. S.* Some theorems on Čebyšev approximation // Duke Math. J.— 1963.— **30**, N 4.— P. 673—681.
2. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений.—М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976.— 304 с.
3. *Рудин У.* Функциональный анализ.— М. : Мир, 1975.— 443 с.
4. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М. : Наука, 1977.— 455 с.
5. *Бернштейн С. Н.* О наилучшем приближении непрерывных функций на всей вещественной оси при помощи функций данной степени V.— Собр. соч.: В 4-х т.— М. : Изд-во АН СССР, 1954.— Т. 2.— С. 390—395.
6. *Ганзбург М. И.* Многомерные предельные теоремы теории наилучших полиномиальных приближений // Сиб. мат. журн.— 1982.— **23**, № 3.— С. 30—47.
7. *Бернштейн С. Н.* О некоторых элементарных экстремальных свойствах многочленов нескольких переменных.— Собр. соч.: В 4-х т.— М. : Изд-во АН СССР, 1954.— Т. 2.— С. 433—436.

НПО «Черметмеханизация», Днепропетровск

Получено 27.01.88