УДК 519.2+517.52

В. В. Булдыгин, С. А. Солнцев

Об обобщенном суммировании случайных рядов

Одно из приложений бесконечных матриц связано с различными методами обобщенного суммирования числовых и функциональных рядов (см., например, [1]). В стохастическом анализе методы обобщенного суммирования случайных рядов также представляют интерес. Поскольку неслучайные ряды вкладываются в схему рядов с независимыми слагаемыми, то здесь, не накладывая дополнительных ограничений, нельзя ожидать особо отличных от детерминированного случая результатов. Однако при дополнительном предположении симметричности слагаемых имеют место весьма неожиданные эффекты, один из которых был установлен Ж. П. Каханом [2, гл. 2]. Ниже будет показано, что утверждение Кахана является частным случаем общей теоремы о возможности предельного перехода под знаком бесконечной суммы в двухиндексном массиве случайных элементов. Эта теорема опирается на принцип сжатия в схеме серий [3]. Кроме того, приводится утверждение об эквивалентности обобщенного суммирования рядов из независимых симметричных случайных слагаемых в классе бесконечных матриц ограниченной вариации.

Пусть $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ — сепарабельное банахово пространство; $\mathfrak{X}^N$ — пространство всех последовательностей $(x_n, n \geqslant 1) \subset \mathfrak{X}$. Пространство $\mathfrak{X}^N$ наделяем тихоновской топологией произведения пространств, сходимость в которой эквивалентна покоординатной сходимости в норме пространства $\mathfrak{X}$, и соответствующей σ-алгеброй борелевских множеств. Символом $c_0(\mathfrak{X})$ обозначим пространство сходящихся к нулю последовательностей в пространстве $\mathfrak{X}$, а символом $c(\mathfrak{X})$ — пространство сходящихся (фундаментальных) в пространстве $\mathfrak{X}$ последовательностей. Напомним, что пространства $c_0(\mathfrak{X})$ и $c(\mathfrak{X})$ являются сепарабельными банаховыми пространствами относительно нормы $\sup\limits_{n\geqslant 1} \|x_n\|$.

Пусть $(Y_{nk};\ n, k \geqslant 1)$ — двухиндексный массив $\mathfrak{X}$-значных случайных элементов. Введем два условия относительно элементов этого массива.

M_1). Для каждого $n \geqslant 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} Y_{nk}$ сходится почти наверное в норме пространства $\mathfrak{X}$. $\left(\text{В этом случае полагаем } Z_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} Y_{nk}.\right)$

M_2). Последовательности $W_k = (Y_{nk},\ n \geqslant 1)$, $k \geqslant 1$, независимы и симметричны, как случайные элементы пространства $\mathfrak{X}^N$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия M_1, M_2. Если последовательность $(Z_n,\ n \geqslant 1)$ сходится почти наверное в пространстве $\mathfrak{X}$, то*

1) *для каждого $k \geqslant 1$ $W_k \in c(\mathfrak{X})$ п. н.;*

2) *ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} Y_{\infty,k}$, где $Y_{\infty,k} = \lim\limits_{n\to\infty} Y_{nk}$ сходится почти наверное в пространстве $\mathfrak{X}$;*

3) *имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} Y_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} Y_{\infty,k} \text{ п. н.}$$

Для доказательства теоремы 1 необходимо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия M_1, M_2. Следующие предложения эквивалентны*:

А) $(Z_n,\ n \geqslant 1) \in c(\mathfrak{X})$ *п. н.*;

Б) $W_k \in c(\mathfrak{X})$ *п. н.*, $k \geqslant 1$ *и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} W_k$ *сходится почти наверное в норме пространства* $c(\mathfrak{X})$;

В) $W_k \in c(\mathfrak{X})$ *п. н.*, $k \geqslant 1$ *и выполняется соотношение*

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{M\geqslant m}\sup_{n\geqslant 1}\left\|\sum_{k=m}^{M} Y_{nk}\right\| = 0 \text{ п. н.}$$

С учетом сепарабельности пространства $c(\mathfrak{X})$ доказательство леммы 1 повторяет рассуждения, приведенные в [3, лемма 1], с заменой в соответствующих местах пространства $c_0(\mathfrak{X})$ на пространство $c(\mathfrak{X})$.

Доказательство теоремы 1. Пусть выполнено условие теоремы. Тогда утверждение 1 немедленно вытекает из условия теоремы и леммы 1. Далее, в силу предложения В леммы 1 получаем

$$0 \leqslant \varlimsup_{m\to\infty}\sup_{M\geqslant m}\left\|\sum_{k=m}^{M} Y_{\infty,k}\right\| = \varlimsup_{m\to\infty}\sup_{M\geqslant m}\varlimsup_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=m}^{M} Y_{nk}\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{m\to\infty}\sup_{M\geqslant m}\sup_{n\geqslant 1}\left\|\sum_{k=m}^{M} Y_{nk}\right\| = 0.$$

Таким образом, последовательность частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} Y_{\infty,k}$ фундаментальна почти наверное, т. е. указанный ряд сходится почти наверное в норме пространства $\mathfrak{X}$. Утверждение 2 доказано.

Переходя к доказательству утверждения 3 прежде всего заметим, что $\mathfrak{X}$-значный случайный элемент $Y_{\infty,k} = \lim_{n\to\infty} Y_{nk}$ симметричен и измерим относительно σ-алгебры, порожденной $\mathfrak{X}^N$-значным случайным элементом $W_k = (Y_{nk},\ n \geqslant 1)$. Отсюда следует, что массив $(Y_{nk} - Y_{\infty,k};\ n,\ k \geqslant 1)$ удовлетворяет условию M_2. Кроме того, из уже доказанного утверждения 2 вытекает, что каждого $n \geqslant 1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(Y_{nk} - Y_{\infty,k})$ сходится почти наверное в норме пространства $\mathfrak{X}$. Поэтому для массива $(Y_{nk} - Y_{\infty,k};\ n,\ k \geqslant 1)$ выполнено и условие M_1. Так как

$$Z_n' = \sum_{k=1}^{\infty}(Y_{nk} - Y_{\infty,k}) = Z_n - \sum_{k=1}^{\infty} Y_{\infty,k},$$

то, согласно условию теоремы, последовательность $(Z_n',\ n \geqslant 1)$ сходится почти наверное в норме пространства $\mathfrak{X}$. Применяя лемму 1 к массиву $(Y_{nk} - Y_{\infty,k};\ n,\ k \geqslant 1)$ заключаем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} W_k'$, составленный из $c_0(\mathfrak{X})$-значных случайных элементов

$$W_k' = (Y_{nk} - Y_{\infty,k},\ n \geqslant 1),\quad k \geqslant 1$$

сходится почти наверное в норме пространства $c(\mathfrak{X})$. Поскольку пространство $c_0(\mathfrak{X})$ является банаховым подпространством пространства $c(\mathfrak{X})$, то, в действительности, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} W'_k$ сходится почти наверное в норме пространства $c_0(\mathfrak{X})$, и его сумма также принадлежит пространству $c_0(\mathfrak{X})$ почти наверное. Так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} W'_k = (Z'_n,\ n \geqslant 1),$$

то

$$\lim_{n\to\infty} Z'_n = 0 \text{ п. н.}$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = \sum_{k=1}^{\infty} Y_{\infty,k} \text{ п. н.}$$

Утверждение 3, а вместе с ним и теорема 1 полностью доказаны.

Бесконечная матрица вещественных чисел $A = (a_{nk};\ n,\ k \geqslant 1)$ называется матрицей обобщенного суммирования, если для всех $k \geqslant 1$ выполняется соотношение $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 1$. Класс всех матриц обобщенного суммирования обозначим $\mathfrak{A}$. Рассмотрим формальный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, где $u_k \in \mathfrak{X}$, $k \geqslant 1$. С этим рядом при помощи матрицы A свяжем последовательность рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} u_k,\ \ n \geqslant 1. \tag{1}$$

Предположим, что все указанные в (1) ряды сходятся в пространстве $\mathfrak{X}$ и через S_n, $n \geqslant 1$ обозначим их суммы. Тогда, если последовательность $(S_n,\ n \geqslant 1)$ сходится в пространстве $\mathfrak{X}$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ называется A-суммируемым, а предел $S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_n$ называется A-суммой ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

Пусть $(X_k,\ k \geqslant 1)$ — последовательность независимых симметричных $\mathfrak{X}$-значных случайных элементов и $A = (a_{nk};\ n,\ k \geqslant 1) \in \mathfrak{A}$. Положим

$$Y_{nk} = a_{nk} X_k;\ n,\ k \geqslant 1. \tag{2}$$

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ является A-суммируемым почти наверное, то для массива $(Y_{nk};\ n,\ k \geqslant 1)$, определенного соотношениями (2), выполнены все условия теоремы 1, согласно которой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ сходится почти наверное в пространстве $\mathfrak{X}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} X_k = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \text{ п. н.}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение Кахана.

Следствие 1. *Пусть $(X_k,\ k \geqslant 1)$ — последовательность независимых симметричных $\mathfrak{X}$-значных случайных элементов и A — матрица обобщенного суммирования. Тогда, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ A-суммируем почти наверное, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ сходится почти наверное в пространстве $\mathfrak{X}$ и его сумма совпадает почти наверное с его A-суммой.*

Замечание. Утверждение следствия 1 полезно рассматривать в следующей эквивалентной формулировке. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ из независимых симметричных $\mathfrak{X}$-значных случайных элементов расходится почти наверное, то его нельзя просуммировать никакой матрицей обобщенного суммирования.

Пусть $B = (b_{nk};\ n,\ k \geqslant 1)$ — бесконечная матрица вещественных чисел. Под вариацией матрицы B понимаем величину:

$$\operatorname{Var} B = \sup_{n\geqslant 1} \sup_{m\geqslant 1} \left(\sum_{k=1}^{m-1} |b_{nk} - b_{n,k+1}| + |b_{nm}| \right).$$

Если $\operatorname{Var} B < \infty$, то говорим, что B—матрица ограниченной вариации. Заметим, что для многих методов обобщенного суммирования (например, Абеля, Бореля, Чезаро, Эйлера) соответствующие матрицы обобщенного суммирования имеют ограниченную вариацию.

Обозначим через $\mathscr{B}$ класс матриц обобщенного суммирования, имеющих ограниченную вариацию. Оказывается, что для матриц из этого класса имеет место утверждение об эквивалентности обобщенного суммирования рядов из независимых симметричных случайных элементов.

Теорема 2. *Пусть $(X_k,\ k \geqslant 1)$ — последовательность независимых симметричных $\mathfrak{X}$-значных случайных элементов. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ B'-суммируем почти наверное какой-нибудь матрицей B' из класса $\mathscr{B}$, то он B-суммируем почти наверное и любой другой матрицей B из класса $\mathscr{B}$. При этом B'- и B-суммы совпадают между собой почти наверное.*

Для доказательства теоремы 2 необходимо следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть $(Y_{nk};\ n,\ k \geqslant 1)$ — двухиндексный массив $\mathfrak{X}$-значных случайных элементов, удовлетворяющий условиям M_1, M_2; $(b_{nk};\ n,\ k \geqslant 1)$ — бесконечная матрица ограниченной вариации такая, что для любого $k \geqslant 1$*

$$(b_{nk} Y_{nk},\ n \geqslant 1) \in c(\mathfrak{X}) \text{ п. н.}$$

Тогда, если

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} Y_{nk},\ n \geqslant 1 \right) \in c(\mathfrak{X}) \text{ п. н.},$$

то

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} Y_{nk},\ n \geqslant 1 \right) \in c(\mathfrak{X}) \text{ п. н.}$$

Доказательство леммы 2 аналогично рассуждениям, приведенным в [3, теорема 1], с заменой в соответствующих местах пространства $c_0(\mathfrak{X})$ на пространство $c(\mathfrak{X})$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $B' \in \mathscr{B}$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ B'-суммируем почти наверное. Тогда согласно утверждению Кахана (следствие 1) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ сходится почти наверное и его сумма совпадает почти наверное с его B'-суммой. Возьмем теперь произвольную и отличную от B' матрицу $B = (b_{nk};\ n,\ k \geqslant 1)$ из класса $\mathscr{B}$. Положим $Y_{nk} = X_k$, $n, k \geqslant 1$ и заметим, что массив $(Y_{nk};\ n,\ k \geqslant 1)$ удовлетворяет условиям M_1, M_2. Кроме того, этот массив и матрица B удовлетворяют всем условиям леммы 2. Согласно этой лемме

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} X_k,\ n \geqslant 1 \right) \in c(\mathfrak{X}) \text{ п. н.},$$

т. е. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ B-суммируем почти наверное.

Далее, введем массив $\mathfrak{X}$-значных случайных элементов $(\tilde{Y}_{nk};\ n,\ k \geqslant 1)$, положив $\tilde{Y}_{nk} = b_{nk} X_k$; $n,\ k \geqslant 1$. Определенный таким образом массив удовлетворяет всем условиям теоремы 1 и, согласно утверждению 3 этой теоремы, имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}X_k = \sum_{k=1}^{\infty}(\lim_{n\to\infty} b_{nk}X_k) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \text{ п. н.}$$

Таким образом B-сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ совпадает почти наверное с его суммой, которая, как уже показано, совпадает почти наверное с B'-суммой этого же ряда. Теорема 2 полностью доказана.

Замечание. Простые примеры показывают, что для неслучайных рядов утверждение теоремы 2, вообще говоря, не имеет места.

Отметим также, что в вещественном случае ($\mathfrak{X} = \mathbf{R}$) в ходе доказательства теоремы 2 вместо леммы 2 можно воспользоваться теоремой Перрона [1]. Однако на бесконечномерный случай теорема Перрона непосредственно не переносится.

Следующий пример показывает, что в утверждении теоремы 2 класс матриц $\mathscr{B}$ в определенном смысле является минимальным. Во всяком случае его нельзя расширить до класса $\mathfrak{A}$ всех матриц обобщенного суммирования даже при $\mathfrak{X} = \mathbf{R}$.

Пример. Пусть $(U_m,\ m \geqslant 1)$ — последовательность матриц такая, что для каждого $m \geqslant 1$ матрица U_m представляет собой матрицу размерности $2^{m-1} \times 2^{m-1}$, элементы которой равны ± 1, причем строки матрицы попарно ортогональны и

$$\sup_m \operatorname{Var}(U_m) = \infty. \qquad (3)$$

Конкретная процедура построения таких матриц рассмотрена в [3] (пример 1).

Разобьем множество натуральных чисел N на подмножества M_m, $m \geqslant 1$, полагая

$$M_m = \{n \in N : b_m < n \leqslant b_{m+1}\},$$

где $b_1 = 0$, $b_m = \sum_{j=2}^{m} 2^{(j-1)^2}$, $m \geqslant 2$. Далее, в множестве N^2 всех пар (n, k) натуральных чисел выделим подмножество $J_m = M_m \times M_m$, $m \geqslant 1$. Построим блочно-диагональную матрицу $D = (\Delta_{nk};\ n, k \geqslant 1)$, на диагонали которой в естественном порядке расположены матрицы $(U_{m^2+1},\ m \geqslant 1)$ т. е. $(\Delta_{nk};\ (n, k) \in J_m) = U_{m^2+1}$ и $\Delta_{nk} = 0$, если $(n, k) \notin J_m$.

Рассмотрим матрицу $B = (b_{nk};\ n, k \geqslant 1)$, положив $B = C + D$, где $C = (c_{nk};\ n, k \geqslant 1)$ — нижняя треугольная матрица, составленная из единиц

$$c_{nk} = \begin{cases} 1, & \text{если } n \geqslant k; \\ 0, & \text{если } n < k. \end{cases}$$

По построению матрица B финитна по строкам. Следовательно для любой последовательности независимых симметричных случайных величин $(X_k,\ k \geqslant 1)$ ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}X_k, \quad n \geqslant 1$$

сходятся почти наверное и, кроме того,

$$\lim_{n\to\infty} b_{nk} = 1, \quad k \geqslant 1.$$

Таким образом матрица B, как и матрица C, является матрицей обобщенного суммирования. Очевидно, что $\operatorname{Var} C < \infty$. В свою очередь

$$\operatorname{Var} B = \operatorname{Var}(C + D) \geqslant \operatorname{Var} D - \operatorname{Var} C$$

и, поскольку в силу (3) $\operatorname{Var} D = \infty$, то $\operatorname{Var} B = \infty$. Следовательно, $C \in \mathscr{B}$, а $B \in \mathfrak{A} \setminus \mathscr{B}$.

Перейдем теперь к построению последовательности $(X_k,\ k \geqslant 1)$. Пусть $(\gamma_k,\ k \geqslant 1)$ — последовательность независимых $N(0,1)$-распределенных гауссовских случайных величин. Положим

$$X_k = 2^{-m^2/2} \cdot m^{-1} \cdot \gamma_k, \quad k \in M_m, \ m \geqslant 1.$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E} X_k^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k \in M_m} \mathbf{E} X_k^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \infty,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k$ сходится почти наверное, т. е. C-суммируем. Предположим, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k$ B-суммируем почти наверное. Поскольку

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} X_k = \sum_{k=1}^{n} X_k + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_{nk} X_k,$$

то из этого предположения вытекает, что последовательность гауссовских случайных величин

$$\zeta_n = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_{nk} X_k, \quad n \geqslant 1$$

сходится почти наверное. Но при $n \in M_m$,

$$\sigma_n^2 \equiv \mathbf{E} \zeta_n^2 = \sum_{k \in M_m} 2^{-m^2} \cdot m^{-2} = m^{-2}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n^2 = 0,$$

и последовательность $(\zeta_n,\ n \geqslant 1)$ обязана сходиться почти наверное к нулю. В силу попарной ортогональности строк матрицы D последовательность $(\zeta_n,\ n \geqslant 1)$ представляет собой последовательность независимых центрированных гауссовских случайных величин и, если $\lim\limits_{n \to \infty} \zeta_n = 0$ почти наверное, то согласно известному критерию [4] для любого $\varepsilon > 0$ должно выполняться соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-\varepsilon/\sigma_n^2\} < \infty.$$

Но, если $\varepsilon \in (0, \ln 2)$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-\varepsilon/\sigma_n^2\} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k \in M_m} \exp\{-\varepsilon/\sigma_k^2\} \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} 2^{m^2} \exp\{-\varepsilon m^2\} = \infty.$$

Полученное противоречие показывает, что наше предположение о B-суммируемости почти наверное ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k$ не имеет места. Таким образом ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k$ почти наверное C-суммируем, но не B-суммируем.

1. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространство последовательностей.— М. : Физматгиз, 1960.— 471 с.
2. *Кахан Ж. П.* Случайные функциональные ряды.— М. : Мир, 1973.— 302 с.
3. *Булдыгин В. В., Солнцев С. А.* Принцип сжатия и усиленный закон больших чисел для взвешенных сумм // Теория вероятностей и ее применения.— 1986.— 31, № 3.— С. 516—529.
4. *Вахания Н. Н.* Вероятностные распределения в линейных пространствах.— Тбилиси: Мецниереба, 1971.— 156 с.

Киев. политехн. ин-т

Получено 03.11.88