УДК 517.9

Я. С. Барис, О. Б. Лыкова

Интегральные многообразия и принцип сведения в теории устойчивости. I

Основополагающие результаты по исследованию критических случаев в теории устойчивости принадлежат А. М. Ляпунову [1]. В этих исследованиях центральное место занимает принцип сведения. Применительно к системе уравнений вида

$$dx/dt = Ax + X(x, y), \quad dy/dt = By + Y(x, y)$$

($\operatorname{Re} \sigma(A) = 0$, $\operatorname{Re} \sigma(B) < 0$) он заключается в том, что формулируются условия, при выполнении которых задача об устойчивости нулевого решения этой системы сводится к задаче об устойчивости нулевого решения уравнения $dx/dt = Ax + X(x, \varphi(x))$, в котором вектор-функция $y = \varphi(x)$ задает некоторое интегральное многообразие (ИМ) или приближенное ИМ.

В [2] Н. Н. Боголюбов сформулировал общий принцип сведения в качественной теории дифференциальных уравнений, позволяющий исследование дифференциальной системы высокого порядка сводить на интегральном многообразии к исследованию системы более низкого порядка.

Таким образом, был указан один из путей к решению проблемы размерностей, возникшей в связи с тем, что многие задачи практики приводят к рассмотрению дифференциальных систем высокого порядка, трудно поддающихся качественному и аналитическому исследованию.

После работ А. М. Ляпунова и Н. Н. Боголюбова исследования в этом направлении проводились многими авторами [3—11].

Настоящая работа посвящена дальнейшему развитию этих исследований.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$dx/dt = X(t, x, y), \quad dy/dt = Y(t, x, y), \tag{1}$$

заданную на произведении $I \times R^m \times V$, где интервал $I \subseteq R$, область $V \subseteq R^n$.

Под интегральным многообразием системы дифференциальных уравнений, как и принято, будем понимать некоторое многообразие M в расширенном фазовом пространстве этой системы, обладающее тем свойством, что любая интегральная кривая системы, имеющая с M хотя бы одну общую точку, полностью ему принадлежит.

Мы будем рассматривать для системы (1) интегральные многообразия, заданные непрерывной вектор-функцией $y = \varphi(t, x)$ и обозначать их в виде

$$\mathfrak{M} = \{(t, x, y) : y = \varphi(t, x), t \in I, x \in R^m\}. \tag{2}$$

Под локальным интегральным многообразием системы (1) будем понимать многообразие вида

$$\mathfrak{M}_л = \{(t, x, y) : y = \varphi(t, x), t \in I, \| x \| < r\}, \tag{3}$$

обладающее тем свойством, что любая интегральная кривая системы (1), имеющая с $\mathfrak{M}_л$ хотя бы одну общую точку, принадлежит $\mathfrak{M}_л$ до тех пор, пока $\| x(t) \| < r$ [3, 7, 12].

Под приближенным с невязкой $(0, b(t, x))$ интегральным многообразием [13—15] системы (1) будем понимать интегральное многообразие системы

$$dx/dt = X(t, x, y), \quad dy/dt = Y(t, x, y) + b(t, x).$$

Непрерывно дифференцируемая вектор-функция $y = \Phi(t, x)$ задает приближенное с невязкой $(0, b(t, x))$ интегральное многообразие системы (1), если она удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} X(t, x, \Phi) = Y(t, x, \Phi) + b(t, x). \tag{4}$$

В [16—18] нами развита схема исследования интегрального многообразия, включающая в себя алгоритм построения приближенного интегрального многообразия и его математическое обоснование, которое сводится к доказательству теоремы существования и получению соответствующей оценки погрешности.

Введем ряд определений, связанных со свойством устойчивости интегральных многообразий. Для этого вместо I введем в рассмотрение интервал $I_+ \supset [0, \infty)$ и обозначим $x(t)$, $y(t)$ — произвольное решение системы (1), $\bar{x}(t)$, $\varphi(t, \bar{x}(t))$ — решение системы (1), лежащее на многообразии $\mathfrak{M}$.

Определение 1. *Интегральное многообразие* (2) *называется локально устойчивым, если для каждого* $\varepsilon > 0$, $\tau \geqslant t_0$ *и любого решения* $x(t)$ $y(t)$ *системы* (1) *существует* $\delta > 0$ *такое, что, если* $\| x(\tau) \| + \| y(\tau) \| < \delta$, *то найдется решение* $\bar{x}(t)$, $\varphi(t, \bar{x}(t))$, *лежащее на* $\mathfrak{M}$ *и такое, что для всех* $t > \tau$ *выполняются неравенства* $\| x(t) - \bar{x}(t) \| < \varepsilon$, $\| y(t) - \varphi(t, \bar{x}(t)) \| < \varepsilon$.

Определение 2. *Интегральное многообразие* (2) *называется локально притягивающим, если для любого* $\tau \geqslant t_0$ *и любого решения* $x(t)$, $y(t)$ *существует* $\Delta > 0$ *такое, что, если* $\| x(\tau) \| + \| y(\tau) \| < \Delta$, *то найдется решение* $\bar{x}(t)$, $\varphi(t, \bar{x}(t))$, *лежащее на* $\mathfrak{M}$ *и удовлетворяющее соотношениям* $\| x(t) - \bar{x}(t) \| \to 0$, $\| y(t) - \varphi(t, \bar{x}(t)) \| \to 0$, $t \to \infty$.

Определение 3. *Интегральное многообразие* (2) *называется локально асимптотически устойчивым, если оно локально устойчивое и локально притягивающее.*

Определение 4. *Интегральное многообразие* (2) *называется локально неустойчивым, если оно не является локально устойчивым.*

Целесообразность введенных понятий локальной (асимптотической) устойчивости и локальной неустойчивости видна из приводимой ниже теоремы.

Будем рассматривать систему (1), имеющую интегральное многообразие (2), на котором рассмотрение системы (1) сводится к рассмотрению уравнения

$$dx/dt = X(t, x, \varphi(t, x)). \tag{5}$$

Имеет место следующая теорема (обобщенный принцип сведения).

Теорема 1. *Пусть система* (1) *имеет решение* $x = 0$, $y = 0$ *и интегральное многообразие* (2), *при этом* $\varphi(t, x) \to 0$ *при* $x \to 0$ *равномерно по* $t \geqslant t_0$.

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Если интегральное многообразие* (2) *локально устойчиво, а нулевое решение* $x = 0$ *уравнения* (5) *устойчиво, то нулевое решение* $x = 0$, $y = 0$ *системы* (1) *устойчиво.*

2. *Если интегральное многообразие* (2) *локально асимптотически устойчиво, а нулевое решение* $x = 0$ *уравнения* (5) *асимптотически устойчиво, то нулевое решение* $x = 0$, $y = 0$ *системы* (1) *асимптотически устойчиво.*

3. *Если интегральное многообразие* (2) *локально неустойчиво или решение* $x = 0$ *уравнения* (5) *неустойчиво, то нулевое решение* $x = 0$, $y = 0$ *системы* (1) *неустойчиво.*

Доказательство. Докажем вначале утверждение 1. Для этого возьмем произвольное решение $z(t) = (x(t), y(t))$ системы (1) и любые $\varepsilon > 0$, $\tau > 0$.

Требуется доказать существование $\delta > 0$ такого, чтобы из неравенства

$$\| z(\tau) \| < \delta \tag{6}$$

вытекало неравенство

$$\| z(t) \| < \varepsilon \tag{7}$$

для всех $t \geqslant \tau$.

Возьмем некоторое положительное $\mu < \varepsilon$. Так как интегральное многообразие (2) локально устойчиво, то существует $\delta > 0$ и решение $\bar{z}(t) = (\bar{x}(t), \varphi(t, \bar{x}(t)))$ системы (1), где $\bar{x}(t)$ — решение уравнения (5), такие, что, если $\| z(\tau) \| < \delta$, то $\| z(t) - \bar{z}(t) \| < \mu$ при всех $t \geqslant \tau$. Отсюда и из неравенства

$$\| z(t) \| \leqslant \| z(t) - \bar{z}(t) \| + \| \bar{z}(t) \|$$

вытекает неравенство

$$\| z(t) \| \leqslant \mu + \| \bar{z}(t) \|. \tag{8}$$

Остается доказать, что

$$\| \bar{z}(t) \| \leqslant \varepsilon - \mu. \tag{9}$$

Для доказательства заметим вначале, что

$$\| \bar{z}(\tau) \| \leqslant \| \bar{z}(\tau) - z(\tau) \| + \| z(\tau) \| < \mu + \delta.$$

Величину $\mu + \delta$ можно предполагать сколь угодно малой, так как мы вправе взять $\mu > 0$ как угодно малым, и этому μ соответствует достаточно малое $\delta \leqslant \mu$. Учитывая этот факт, а также устойчивость нулевого решения уравнения (5), приходим к заключению, что можно указать μ, δ, $\delta_1 > 0$ ($\mu + \delta < \delta_1$) такие, что если $\| z(\tau) \| < \delta_1$, то будет справедливо неравенство (9). Таким образом, для заданного $\varepsilon > 0$ найдено $\delta > 0$ такое, что из неравенства (6) вытекает неравенство (7) для всех $t \geqslant \tau$.

Докажем утверждение 2. Согласно доказанному выше, нулевое решение $z = 0$ устойчиво. Докажем, что это решение является притягивающим, т. е. покажем, что существует $\Delta > 0$ такое, что из неравенства

$$\| z(\tau) \| < \Delta \tag{10}$$

вытекает соотношение

$$\| z(t) \| \to 0, \quad t \to \infty. \tag{11}$$

Так как

$$\| z(t) \| \leqslant \| z(t) - \bar{z}(t) \| + \| \bar{z}(t) \|, \tag{12}$$

то достаточно доказать существование такого $\Delta > 0$, что из неравенства (10) вытекают соотношения

$$\| z(t) - \bar{z}(t) \| \to 0, \quad \| \bar{z}(t) \| \to 0, \quad t \to \infty \tag{13}$$

Поскольку интегральное многообразие $\mathfrak{M}$ — локально притягивающее, то существуют такие $\Delta_1 > 0$ и решение $\bar{z}(t)$, лежащее на $\mathfrak{M}$, что из неравенства $\| z(\tau) \| < \Delta_1$ вытекает соотношение (10).

Нулевое решение $\bar{x} = 0$ уравнения (5) асимптотически устойчиво (а следовательно, притягивающее) и $\varphi(t, x) \rightrightarrows 0$ при $x \to 0$. Поэтому существует такое $\Delta_2 > 0$, что из неравенства $\| \bar{z}(\tau) \| < \Delta_2$ вытекает второе из соотношений (13).

Таким образом, существует $\Delta = \min\{\Delta_1, \Delta_2\}$ такое, что из (13) вытекает (11).

Переходим к доказательству третьего утверждения. Заметим вначале, что из неустойчивости нулевого решения $\bar{x}(t) = 0$ уравнения (5) вытекает неустойчивость нулевого решения $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ системы (1).

Остается рассмотреть случай, когда интегральное многообразие $\mathfrak{M}$ локально неустойчиво, а нулевое решение $\bar{x}(t) = 0$ уравнения (5) устойчиво.

С этой целью запишем неравенство

$$\| z(t) \| \geqslant \| z(t) - \bar{z}(t) \| + \| \bar{z}(t) \|.$$

Из устойчивости нулевого решения $\bar{x}(t) = 0$ уравнения (5) и условия $\varphi(t, x) \rightrightarrows 0$ при $x \to 0$ вытекает, что норма любого решения $\bar{z}(t)$ как угодно мала при $t > \tau$, если только она достаточно мала при $t = \tau$. Так как интегральное многообразие $\mathfrak{M}$ локально неустойчиво, то норма разности $z(t) - \bar{z}(t)$ не является как угодно малой при всех $t \geqslant \tau$, если она при $t = \tau$ как угодно мала, но отлична от нуля. Поэтому норма $z(t)$ не является сколь угодно малой при всех $t \geqslant \tau$, если норма $z(\tau)$ как угодно мала и положительна. А это означает, что нулевое решение системы (1) неустойчиво. Теорема доказана.

Проиллюстрируем введенные определения и теорему 1 на простейшем примере интегрируемой системы линейных уравнений

$$dx/dt = ax + y, \quad dy/dt = by, \tag{14}$$

где a, b — некоторые постоянные. Полагаем $a \neq b$. Эта система обладает интегральным многообразием $\mathfrak{M} : y = 0$, на котором исходная система (14) сводится к уравнению

$$dx/dt = ax. \tag{15}$$

Для произвольного решения $x(t)$, $y(t)$ $(x(0) = x_0, y(0) = y_0)$ системы (14) и решения на $\mathfrak{M} : y = 0$, удовлетворяющего начальному условию $\bar{x}_0 = x_0 - \dfrac{y_0}{b - a}$, нетрудно получить неравенства

$$| x(t) - \bar{x}(t) | \leqslant \left| \frac{y_0}{b-a} \right| e^{bt}, \quad | y(t) | \leqslant | y_0 | e^{bt}.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $b \leqslant 0$ и выполняется неравенство $| x_0 | + | y_0 | < \delta$. Тогда имеем

$$| x(t) - \bar{x}(t) | + | y(t) | \leqslant \delta \left(1 + \frac{1}{| b - a |} \right). \tag{16}$$

Выберем теперь $\delta > 0$ такое, чтобы выполнялось неравенство $\delta \left(1 + \dfrac{1}{| b - a |} \right) < \varepsilon$. При таком выборе δ из неравенства (16) вытекает неравенство $| x(t) - \bar{x}(t) | + | y(t) | < \varepsilon, \quad t > 0$.

Мы положили здесь $\tau = 0$. Аналогичное утверждение имеет место для любого $\tau > 0$.

Отсюда следует, что интегральное многообразие $\mathfrak{M} : y = 0$ будет *локально* устойчивым, если $b \leqslant 0$.

Пусть теперь $a = b$. Тогда произвольное решение системы (14) имеет вид

$$x(t) = e^{at}(x_0 + y_0 t),$$
$$y(t) = e^{bt} y_0.$$

Легко получить неравенства

$$|x(t) - \bar{x}(t)| \leqslant |e^{at}|\,|x_0 + y_0 t - \bar{x}_0|,\ |y(t) - \bar{y}(t)| \leqslant e^{bt}|y_0|.$$

Определим $\bar{x}_0$ из условия $\bar{x}_0 = x_0$. Тогда получим

$$|x(t) - \bar{x}(t) \leqslant |e^{at}|\,|y_0 t|, \quad |y(t) - \bar{y}(t)| \leqslant e^{bt}|y_0|.$$

Так как $a = b$, то отсюда следует, что интегральное многообразие $\mathfrak{M}: y = 0$ локально устойчиво при $b \leqslant 0$.

Пусть интегральное многообразие $\mathfrak{M}$ локально устойчиво. Если, кроме того, при $t \to +\infty$ каждая интегральная кривая, которая является графиком произвольного решения $x(t)$, $y(t)$, притягивается к интегральной кривой на многообразии, которая является графиком решения $\bar{x}(t)$, $\varphi(t, \bar{x}(t))$, то интегральное многообразие $\mathfrak{M}$ называется локально асимптотически устойчивым. В рассматриваемом случае это будет, если $b < 0$.

В качестве применения теоремы 1 исследуем устойчивость нулевого решения системы (14).

Вначале рассмотрим случай, когда интегральное многообразие $\mathfrak{M}: y = 0$ локально устойчиво, т. е. $b \leqslant 0$. На $\mathfrak{M}$ система (14) сводится к уравнению (15).

Нулевое решение этого уравнения устойчиво, если $a \leqslant 0$. Следовательно, согласно теореме 1 нулевое решение $x = 0$, $y = 0$ системы (14) устойчиво, если $a \leqslant 0$, $c \leqslant 0$.

Пусть теперь $a < 0$, $c < 0$. Тогда $\mathfrak{M}: y = 0$ локально асимптотически устойчиво и нулевое решение $x = 0$ уравнения (15) асимптотически устойчиво. Следовательно, нулевое решение системы (14) асимптотически устойчиво.

Если же $a > 0$ или $c > 0$, то нулевое решение системы (14) неустойчиво.

Итак, для применения теоремы 1 следует решить три задачи.

I. Найти интегральное многообразие (2) данной системы (1), удовлетворяющее условию $\varphi(t, x) \rightrightarrows 0$ при $x \to 0$.

II Выяснить, будет ли данное интегральное многообразие локально (асимптотически) устойчивым или неустойчивым.

III. Если интегральное многообразие локально (асимптотически) устойчиво, то решить задачу об устойчивости нулевого решения уравнения (5).

Так как размерность (векторного) уравнения (5) ниже размерности системы (1), то решение задачи III значительно проще, чем решение исходной задачи.

Чтобы уменьшить трудности, связанные с задачей II, следует установить признаки локальной (асимптотической) устойчивости и локальной неустойчивости интегрального многообразия.

Что касается задачи I, то в некоторых случаях достаточно вместо локального интегрального многообразия рассматривать приближенное локальное ИМ $y = \Phi(t, x)$, удовлетворяющее условию $\Phi(t, x) \rightrightarrows 0$ при $x \to 0$.

Для построения приближенных локальных ИМ можно применить развитые нами методы [16—18]

Таким образом, возникает вопрос, когда для решения задачи об устойчивости можно локальное ИМ заменить некоторым приближенным локальным ИМ

$$\mathfrak{M}_{\text{пр}}: y = \Phi(t, x), \tag{17}$$

и вместо уравнения

$$dx/dt = X(t, x, \varphi(t, x)) \tag{18}$$

на локальном ИМ рассматривать уравнение

$$dx/dt = X(t, x, \Phi(t, x)). \tag{19}$$

Уравнение (18) можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} X(t, x, \Phi(t, x)) + R(t, x), \tag{20}$$

где

$$R(t, x) = X(t, x, \varphi(t, x)) - X(t, x, \Phi(t, x)).$$

Требуется установить условия, при которых задачи об устойчивости для уравнений (19) и (20) эквивалентны. Иначе говоря, требуется решить задачу о сохранении устойчивости при постоянно действующих возмущениях [19].

Из приведенных рассуждений и теоремы 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть относительно системы* (1) *выполняются условия.*

1. *Существует локальное ИМ системы* (1), *удовлетворяющее условию* $\varphi(t, x) \rightrightarrows 0,\ x \to 0$.

2. *Построено приближенное локальное ИМ* (17) *системы* (1).

3. *Задачи об устойчивости для уравнений* (19) *и* (20) *эквивалентны.*

Тогда имеют место следующие утверждения.

1. *Если приближенное ИМ* (17) *локально* (*асимптотически*) *устойчиво, и нулевое решение уравнения* (19) (*асимптотически*) *устойчиво, то нулевое решение данной системы* (1) *также* (*асимптотически*) *устойчиво.*

2. *Если приближенное локальное ИМ* (17) *локально неустойчиво или нулевое решение уравнения* (19) *неустойчиво, то нулевое решение данной системы неустойчиво.*

Остановимся на вопросе о том, как решать задачи, сформулированные в условиях теоремы 2.

Задачи о том, как доказать существование локального ИМ и построить приближенное локальное ИМ, решались в [17].

Рассмотрим вопрос о проверке условия 3. Путь к решению этой задачи указан в [19].

Предположим, что для невозмущенного уравнения (19) удалось доказать существование функции Ляпунова $V(t, x)$, удовлетворяющей условиям какой-либо теоремы Ляпунова об устойчивости. Если возмущения $R(t, x)$ таковы, что производная $dv(t, x)/dt$ функции $V(t, x)$ в силу уравнения (20) обладает теми же свойствами, что и производная $dV_0(t, x)/dt$ в силу уравнения (19), то характер устойчивости решения $x = 0$ уравнения (19) сохраняется и для уравнения (20).

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения.— М.; Л.: Наука, 1950.—383 с.
2. *Боголюбов Н Н.* О некоторых статистических методах в математической физике.— Львов: Изд-во АН УССР, 1945.— 137 с.
3. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М. : Наука, 1973.— 512 с.
4. *Лыкова О. Б.* Принцип сведения в банаховом пространстве // Укр. мат. журн.— 1971.— 23, № 4.— С. 464—471.
5. *Самойленко А М.* Изучение динамических систем с помощью знакопостоянных функций // Там же.— 1972.— 24, № 3.— С. 374—384.
6. *Лыкова О. Б.* О принципе сведения для дифференциального уравнения с неограниченными операторными коэффициентами // Там же.— 1975.— **27**, № 2.— С. 240—243.
7. *Плисс В. А.* Принцип сведения в теории устойчивости // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1964.— 28.— С. 911—924.
8. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1977.— 303 с.
9. *Барис Я. С.* Принцип сведения в задаче об условной устойчивости // Мат. физика.— 1979.— Вып. 26.— С. 3—6.
10. *Валеев К. Г., Финин Г. С.* Построение функций Ляпунова.— Киев : Наук. думка, 1981.— 412 с.

11. *Валеев К. Г., Жаутыков О. А.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений.— Алма-Ата: Наука, 1974.— 415 с.
12. *Лыкова О. Б.* К теории локальных интегральных многообразий // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1980.— № 3.— С. 19—28.
13. *Барис Я. С. Лыкова О. Б.* Приближенные интегральные многообразия систем дифференциальных уравнений.— Киев, 1979.— 19 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 79.8).
14. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* О приближенных интегральных многообразиях систем нелинейных дифференциальных уравнений.— Киев, 1980.— 31 с.— (Препринт // АН УССР. Ин-т математики. 80.5).
15. *Бакай А. С., Степановский Ю. П.* Адиабатические инварианты.— Киев : Наук. думка, 1981.— 283 с.
16. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Об асимптотических разложениях инвариантных многообразий. I // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 4.— С. 411—418.
17. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Об асимптотических разложениях инвариантных многообразий. II // Там же.— 1988.— **40**, № 6.— С. 709—716.
18. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Об асимптотических разложениях инвариантных многообразий. III // Там же.— 1989.— **41**, № 8.— С. 1033—1041.
19. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения.— М. : Наука, 1966.— 576 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 13.12.88