УДК 519.21

А. В. Свищук

Слабая сходимость полумарковских случайных эволюций в схеме усреднения (мартингальный подход)

Введение. Для дискретных, а также непрерывных полумарковских случайных эволюций (ПМСЭ) в схеме серий получено предельное представление в виде решения операторного стохастического интегрального уравнения. Слабая сходимость доказана с использованием мартингального подхода.

Слабая сходимость разрывных ПМСЭ рассматривалась в [1]. Закон больших чисел и теорема усреднения для неоднородных ПМСЭ доказаны в [2]. Стохастические интегральные представления для независимых и стационарных случайных эволюций изучались соответственно в [3, 4].

В п. 1 приводится определение дискретных ПМСЭ в схеме серий, условия и закон больших чисел для ПМСЭ (теорема 1). В п. 2 излагается доказательство теоремы 1. В п. 3 рассматриваются дискретные ПМСЭ с операторами скачков, закон больших чисел в этом случае (теоремы 2). В п. 4 приведены теоремы усреднения для непрерывных ПМСЭ.

1. Пусть $(X, \mathfrak{X})$ — измеримое пространство со счетно-порожденной σ-алгеброй $\mathfrak{X}$ и $x(t)$ — регулярный полумарковский процесс (ПМП), построенный по процессу марковского восстановления $\{x_n, \theta_n; n \geqslant 0\}$, $x_n \in X$, $\theta_n \in [0, +\infty)$; $Q(x, A, t)$ — полумарковское ядро [5], причем $P(x, A) := Q(x, A, +\infty)$ — переходные вероятности равномерно эргодической цепи Маркова $\{x_n; n \geqslant 0\}$ со стационарным распределением $\rho(A)$, $A \in \mathfrak{X}$; $G_x(t) := Q(x, X, t)$ — распределение времен пребывания в состояниях $x \in X$. На сепарабельном банаховом пространстве $(B, \mathscr{L})$ с σ-алгеброй борелевских множеств $\mathscr{L}$ рассмотрим семейство сильно непрерывных сжимающих полугрупп операторов $\{\Gamma_x(t)\, x \in X, t \geqslant 0\}$; измеримых по x, с производящими операторами $\{(\Gamma(x); x \in X\}$ с общей областью определения $B_0 \subset B$, плотной в B и не зависящей от x, причем $B_0 \subseteq \mathrm{Dom}(\Gamma^2(x))$. Через $\|\cdot\|$ обозначается норма в B.

Дискретной ПМСЭ называется

$$V_n^\varepsilon := \Gamma_{x_0}(\varepsilon\theta_1)\,\Gamma_{x_1}(\varepsilon\theta_2) \ldots \Gamma_{x_{n-1}}(\varepsilon\theta_n), \qquad n \geqslant 1. \tag{1}$$

Пусть

$$A := \int_X \rho(dx)\, m(x)\, \Gamma(x), \quad \int_X \rho(dx)\, m^2(x)\, \|\Gamma(x) f\|^2 := \rho_1 < +\infty,$$

$$\int_X \rho(dx)\, m_2(x)\, \|\Gamma(x) f\|^2 := \rho_2 < +\infty, \tag{2}$$

где

$$m(x) := \int_0^\infty t G_x(dt); \quad m_2(x) := \int_0^\infty t^2 G_x(dt), \qquad f \in B_0. \tag{3}$$

Теорема 1. *Если A — замыкаемый оператор, $m(x)$ и $m_2(x)$ равномерно по x ограничены, то $V^\varepsilon_{[t/\varepsilon]}$ слабо сходится при $\varepsilon \to 0$ к $\tilde{V}_t$:*

$$\tilde{V}_t f = f + \int_0^t \tilde{V}_s A f\, ds, \quad \forall f \in B_0, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{4}$$

Замечание. Если замыкание $\bar{A}$ оператора A порождает сильно непрерывную полугруппу на B, то $\tilde{V} = \exp\{t\bar{A}\}$.

2. Для доказательства теоремы 1 определим класс функций, на которых рассматривается сходимость ПМСЭ, а именно:

$$f^\varepsilon(z, x) := f^{(0)}(z) + \varepsilon f^{(1)}(z, x), \tag{5}$$

где $f^{(0)}(z)$ принадлежит нуль-пространству оператора $P - I$, $f^{(0)}(z) \in B_0$, P — оператор, порожденный ядром $P(x, A)$, I — единичный оператор, а $f^{(1)}(z, x)$ — решение уравнения

$$(P - I) f^{(1)}(z, x) = (-A(x) + A) f^{(0)}(z), \quad A(x) := m(x)\, \Gamma(x). \tag{6}$$

Так как $\Pi(-A(x) + A) = 0$ ввиду определения операторов $A(x)$ и A, то уравнение (6) имеет единственное решение, $\Pi f(z, x) := \int_X \rho(dx) f(z, x)$.

Рассмотрим следующее выражение:

$$M_n^\varepsilon := V_n^\varepsilon f^\varepsilon(z, x_n) - f^\varepsilon(z, x) - \sum_{j=0}^{n-1} E_\rho [V_{j+1}^\varepsilon f^\varepsilon(z, x_{j+1}) - V_j^\varepsilon f^\varepsilon(z, x_j) / \mathscr{F}_j], \tag{7}$$

которое является мартингалом относительно σ-алгебры $\mathscr{F}_n := \sigma\{\tau_0, x_0; \tau_1, x_1; \ldots; \tau_n, x_n\}$ [6]. Заметим, что

$$V_{j+1}^\varepsilon = V_j^\varepsilon + V_j^\varepsilon [\Gamma_{x_j}(\varepsilon\theta_{j+1}) - I] = V_j^\varepsilon + V_j^\varepsilon [\varepsilon\theta_{j+1}\Gamma(x_j) + o(\varepsilon)], \tag{8}$$

где $o(t) := \int\limits_0^t (t-s)\,\Gamma_x(s)\,\Gamma^2(x)\,ds$ и $\|o(t) f\| \leqslant \frac{t^2}{2}\|\Gamma^2(x) f\|$, $f \in B_0$. Учитывая (5) и (8), имеем

$$V_{j+1}^{\varepsilon} f^{\varepsilon}(z, x_{j+1}) = [V_j^{\varepsilon} + V_j^{\varepsilon}(\varepsilon\theta_{j+1}\Gamma(x_j) + o(\varepsilon))]\,[f^{(0)}(z) + \varepsilon f^{(1)}(z, x_{j+1})] =$$
$$= V_j^{\varepsilon} f^{(0)}(z) + \varepsilon V_j^{\varepsilon} f^{(1)}(z, x_{j+1}) + \varepsilon V_j^{\varepsilon}\theta_{j+1}\Gamma(x_j) f^{(0)}(z) +$$
$$+ \varepsilon^2 V_j^{\varepsilon}\theta_{j+1}\Gamma(x_j) f^{(1)}(z, x_{j+1}) + o(\varepsilon).$$

И далее

$$\sum_{j=0}^{n-1} E_\rho [V_{j+1}^{\varepsilon} f^{\varepsilon}(z, x_{j+1}) - V_j^{\varepsilon} f^{\varepsilon}(z, x_j)/\mathcal{F}_j] = \sum_{j=0}^{n-1} E_\rho [V_j^{\varepsilon} f^{(0)}(z) - V_j^{\varepsilon} f^{(0)}(z)/\mathcal{F}_j] +$$
$$+ \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} \{E_\rho [V_j^{\varepsilon} f^{(1)}(z, x_{j+1}) - V_j^{\varepsilon} f^{(1)}(z, x_j)/\mathcal{F}_j] + E_\rho [V_j^{\varepsilon}\theta_{j+1}\Gamma(x_j) f^{(0)}(z)/\mathcal{F}_j] +$$
$$+ \varepsilon E_\rho [V_j^{\varepsilon}\theta_{j+1}\Gamma(x_j) f^{(1)}(z, x_{j+1})/\mathcal{F}_j] + o(\varepsilon)\}. \tag{9}$$

Так как из (6) следует

$$E_\rho [f^{(1)}(z, x_{j+1}) - f^{(1)}(z, x_j)/\mathcal{F}_j] + E_\rho [\theta_{j+1}\Gamma(x_j) f^{(0)}(z)/\mathcal{F}_j] =$$
$$= (P - I) f^{(1)}(z, x_j) + A(x_j) f^{(0)}(z) = A f^{(0)}(z),$$

то из (9) получаем

$$M_n^{\varepsilon} = V_n^{\varepsilon} f^{\varepsilon}(z, x_n) - f^{\varepsilon}(z, x) - \sum_{j=0}^{n-1} E_\rho [V_{j+1}^{\varepsilon} f^{\varepsilon}(z, x_{j+1}) - V_j^{\varepsilon} f^{\varepsilon}(z, x_j)/\mathcal{F}_j] =$$
$$= V_n^{\varepsilon} f^{(0)}(z) - f^{(0)}(z) + \varepsilon [V_n^{\varepsilon} f^{(1)}(z, x_n) - f^{(1)}(z, x_n)] -$$
$$- \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} V_j^{\varepsilon} A f^{(0)}(z) + \varepsilon^2 \sum_{j=0}^{n-1} E_\rho [V_j^{\varepsilon}\theta_{j+1}\Gamma(x_j) f^{(1)}(z, x_{j+1})/\mathcal{F}_j] + o(\varepsilon). \tag{10}$$

Ввиду того, что M_n^{ε} — мартингал [6],

$$E_\rho\{(M_{[t/\varepsilon]}^{\varepsilon} - M_{[s/\varepsilon]}^{\varepsilon})\,\Phi_s\} = 0 = E_\rho [(V_{[t/\varepsilon]}^{\varepsilon} f^{(0)}(z) - V_{[s/\varepsilon]}^{\varepsilon} f^{(0)}(z) +$$
$$+ \varepsilon [V_{[t/\varepsilon]}^{\varepsilon} f^{(1)}(z, x_{[t/\varepsilon]}) - V_{[s/\varepsilon]}^{\varepsilon} f^{(1)}(z, x_{[s/\varepsilon]})] - \varepsilon \sum_{j=[s/\varepsilon]}^{[t/\varepsilon]-1} V_j^{\varepsilon} A f^{(0)}(z) +$$
$$+ \varepsilon^2 \sum_{j=[s/\varepsilon]}^{[t/\varepsilon]-1} E_\rho [V_j^{\varepsilon}\theta_{j+1}\Gamma(x_j) f^{(1)}(z, x_{j+1})/\mathcal{F}_j] + o(\varepsilon))\,\Phi_s] \tag{11}$$

для любой Φ_s — $\mathcal{L}/\mathcal{F}_s$-измеримой функции, $\Phi_s \in L_2(Q^{\varepsilon})$, где Q^{ε} — мера, порожденная процессом $V_{[t/\varepsilon]}^{\varepsilon}$, $\mathcal{F}_s := \sigma\{\tau_0, x_0;\ \tau_1, x_1;\ \ldots;\ \tau_n, x_n;\ \tau_n \leqslant s\}$.

Предположим, что семейство мер Q^{ε} плотно (это мы впоследствие покажем). Тогда из (11) следует

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E_\rho\{(M_{[t/\varepsilon]}^{\varepsilon} - M_{[s/\varepsilon]}^{\varepsilon})\,\Phi_s\} = 0 = E_\rho \left[\left(\tilde{V}_t f^{(0)}(z) - \tilde{V}_s f^{(0)}(z) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \int\limits_s^t \tilde{V}_u A f^{(0)}(z)\,du\right)\Phi_s\right], \tag{12}$$

так как

$$\varepsilon \sum_{j=[s/\varepsilon]}^{[t/\varepsilon]-1} V_j^{\varepsilon} A f^{(0)}(z) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int\limits_s^t \tilde{V}_u A f^{(0)}(z)\,du,$$

где $\tilde{V}_t$ — предельный для $V_{[t/\varepsilon]}^{\varepsilon}$ процесс, $f^{(0)}(z) \in B_0$.

Следовательно, из (12) следует, что $M_t := \tilde{V}_t f^{(0)}(z) - f^{(0)}(z) - \int\limits_0^t \tilde{V}_u A du$ — мартингал относительно $\mathcal{F}_t$.

Осталось показать, что семейство мер Q^ε плотно и характеристика мартингала M_t^ε сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$, поэтому и $M_t^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ [7], что дает $M_t \equiv 0$, и доказательство теоремы 1 будет закончено.

Покажем плотность мер Q^ε, отвечающих $V_{[t/\varepsilon]}^\varepsilon$. Для этого используется критерий плотности для процессов со значениями в банаховом пространстве (см. [2], теорема 3.7, [8,9]), заданных на некотором интервале $[0, T]$.

Из (7) следует

$$V_{[t/\varepsilon]}^\varepsilon f^\varepsilon(z, x_{[t/\varepsilon]}) - V_{[s/\varepsilon]}^\varepsilon f^\varepsilon(z, x_{[s/\varepsilon]}) = M_{[t/\varepsilon]}^\varepsilon - M_{[s/\varepsilon]}^\varepsilon -$$
$$- \sum_{j=[s/\varepsilon]}^{[t/\varepsilon]-1} E_\rho [V_{j+1}^\varepsilon f^\varepsilon(z, x_{j+1}) - V_j^\varepsilon f^\varepsilon(z, x_j)/\mathcal{F}_j]; \qquad s, t \in [0, T]. \tag{13}$$

Лемма 1. *Семейство $M_{[t/\varepsilon]}^\varepsilon$ плотно.*

Доказательство. Так как мартингал M_n^ε представляется в виде мартингал-разностей

$$M_n^\varepsilon = \sum_{j=0}^{n-1} [V_{j+1}^\varepsilon f^\varepsilon(z, x_{j+1}) - E_\rho [V_{j+1}^\varepsilon f^\varepsilon(z, x_{j+1})/\mathcal{F}_j]],$$

что следует из определения M_n^ε в (7), то

$$M_{[t/\varepsilon]}^\varepsilon - M_{[s/\varepsilon]}^\varepsilon = \sum_{j=[s/\varepsilon]}^{[t/\varepsilon]-1} [V_{j+1}^\varepsilon f^\varepsilon(z, x_{j+1}) - E_\rho [V_{j+1}^\varepsilon f^\varepsilon(z, x_{j+1})/\mathcal{F}_j]] =$$
$$= \sum_{j=[s/\varepsilon]}^{[t/\varepsilon]-1} [V_j^\varepsilon (f^\varepsilon(z, x_{j+1}) - Pf^\varepsilon(z, x_j)) + \varepsilon (V_j^\varepsilon (\theta_{j+1}\Gamma(x_j) f^{(0)}(z) - Af^{(0)}(z)) +$$
$$+ o(\varepsilon)(f^\varepsilon(z, x_{j+1}) - Pf^\varepsilon(z, x_j)) + \varepsilon^2 V_j^\varepsilon (\theta_{j+1}\Gamma(x_j)(f^{(1)}(z, x_{j+1}) -$$
$$- Pf^{(1)}(z, x_j))] = \varepsilon \sum_{j=[s/\varepsilon]}^{[t/\varepsilon]-1} \{V_j^\varepsilon [(f^{(1)}(z, x_{j+1}) - Pf^{(1)}(z, x_j)) +$$
$$+ (\theta_{j+1}\Gamma(x_j) - A) f^{(0)}(z) + \varepsilon (\theta_{j+1}\Gamma(x_j)(f^{(1)}(z, x_{j+1}) - Pf^{(1)}(z, x_j)))] +$$
$$+ o(\varepsilon)(f^\varepsilon(z, x_{j+1}) - Pf^\varepsilon(z, x_j))\}$$

ввиду условия (6), где $o(\varepsilon)$ определено в (8).

Пусть $R_0 := (I - P + \Pi)^{-1} - \Pi$ и $\| R_0 \| := r < +\infty$ [5]. Поэтому

$$E_\rho \{\| M_{[t/\varepsilon]}^\varepsilon - M_{[s/\varepsilon]}^\varepsilon \|^2/\mathcal{F}_s\} \leqslant 8\varepsilon (\rho_1 (8r^2 + 1) + \rho_2 + o_1(\varepsilon))(t - s), \tag{14}$$

где

$$o_1(\varepsilon) := \varepsilon^2 \Big(\int\limits_X \rho(dx) \| A(x) f^{(1)}(z, x) \|^2 + \int\limits_X \rho(dx) \| A(x) Pf^{(1)}(z, x) \|^2 \Big) +$$
$$+ o^2(\varepsilon)(\| f^\varepsilon \|^2 + \| Pf^\varepsilon \|^2) \text{ (см. (2))}.$$

Далее, $E_\rho \| M_{[t/\varepsilon]} \|^2$ ограничено, именно

$$E_\rho \| M_{[t/\varepsilon]}^\varepsilon \|^2 \leqslant 8\varepsilon T (\rho_1 (8r^2 + 1) + \rho_2 + o_1(\varepsilon)). \tag{15}$$

Поэтому из (14) и (15) следует плотность семейства $M_{[t/\varepsilon]}^\varepsilon$.

Лемма 2. *Семейство* $\sum\limits_{j=0}^{[t/\varepsilon]-1} E_\rho [V_{j+1}^\varepsilon f^\varepsilon(z, x_{j+1}) - V_j^\varepsilon f^\varepsilon(z, x_j)/\mathcal{F}_j]$ *плотно.*

Доказательство. Из разложения (9) следует

$$E_\rho \left[\Big\| \sum_{j=[s/\varepsilon]}^{[t/\varepsilon]-1} E_\rho [V_{j+1}^\varepsilon f^\varepsilon (z, x_{j+1}) - V_j^\varepsilon f^\varepsilon (z, x_j)/\mathcal{F}_j] \Big\|^2 / \mathcal{F}_s \right] \leqslant$$

$$\leqslant 4\varepsilon^2 ([t/\varepsilon] - [s/\varepsilon] - 1) \Big(2 \int_X \rho (dx) \| R_0 A (x) f^{(0)} (z) \|^2 +$$

$$+ \int_X \rho (dx) \| A (x) f^{(0)} (z) \|^2) + \varepsilon^2 \int_X \rho (dx) (\| A (x) R_0 A (x) f^{(0)} (z) \|^2 +$$

$$+ \| A (x) R_0 A f^{(0)} (z) \|^2) \leqslant 4\varepsilon (t - s) ((2r^2 + 1) \rho_1 + o_2 (\varepsilon)), \tag{16}$$

где $o_2 (\varepsilon) := \varepsilon^2 \int_X \rho (dx) (\| A (x) R_0 A (x) f^{(0)} (z) \|^2 + \| A (x) R_0 A f^{(0)} (z) \|^2 \|)$. Кроме того,

$$E_\rho \Big\| \sum_{j=0}^{[t/\varepsilon]-1} E_\rho [V_{j+1}^\varepsilon f^\varepsilon (z, x_{j+1}) - V_j^\varepsilon f^\varepsilon (z, x_j)/\mathcal{F}_j] \Big\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon T \left(\| A f^{(0)} (z) \|^2 + \int_X \rho (dx) \| A (x) f^{(0)} (z) \|^2 \right) \leqslant 4\varepsilon T \rho_1. \tag{17}$$

Из (16) и (17) и следует доказательство леммы 2.

Далее, из (13) следует, что

$$E_\rho [\| V_{[t/\varepsilon]}^\varepsilon f^\varepsilon (z, x_{[t/\varepsilon]}) - V_{[s/\varepsilon]}^\varepsilon f^\varepsilon (z, x_{[s/\varepsilon]}) \|^2 / \mathcal{F}_s] \leqslant$$

$$\leqslant 2 \Big(E_\rho [\| M_{[t/\varepsilon]}^\varepsilon - M_{[s/\varepsilon]}^\varepsilon \|^2 / \mathcal{F}_s] +$$

$$+ E_\rho \left[\Big\| \sum_{j=[s/\varepsilon]}^{[t/\varepsilon]-1} E_\rho [V_{j+1}^\varepsilon f^\varepsilon (z, x_{j+1}) - V_j^\varepsilon f^\varepsilon (z, x_j)/\mathcal{F}_j] \Big\|^2 / \mathcal{F}_s \right], \tag{18}$$

а из определения V_n^ε и $f^\varepsilon (z, x)$ вытекает ограниченность $E_\rho \| V_{[t/\varepsilon]}^\varepsilon f^\varepsilon (z, x_{[t/\varepsilon]}) \|^2$:

$$E_\rho \| V_{[t/\varepsilon]}^\varepsilon f^\varepsilon (z, x_{[t/\varepsilon]}) \|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2 \left[\| f^{(0)} (z) \|^2 + 2\varepsilon^2 \left(\int_X \rho (dx) \| R_0 A (x) f^{(0)} (z) \|^2 + \| R_0 A f^{(0)} (z) \|^2 \right) \right].$$

Из лемм 1, 2 и (18) следует плотность семейства $V_{[t/\varepsilon]}^\varepsilon f^\varepsilon (z, x_{[t/\varepsilon]})$.

Определим характеристику $\langle M_{[t/\varepsilon]}^\varepsilon \rangle$ банаховозначного мартингала $M_{[t/\varepsilon]}^\varepsilon$. Пусть $l \in B^*$ — сопряженное к B пространство. Тогда под характеристикой $\langle M_{[t/\varepsilon]}^\varepsilon \rangle$ мартингала $M_{[t/\varepsilon]}^\varepsilon$ понимается характеристика следующего случайного процесса $m_t^{l,\varepsilon} := l (M_{[t/\varepsilon]}^\varepsilon)$, $\forall\, l \in B^*$, являющегося действительнозначным мартингалом $\forall\, l \in B^*$. Значит, $\langle m_t^{l,\varepsilon} \rangle := \sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1} E_\rho [l^2 (M_i^\varepsilon - M_{i-1}^\varepsilon)/\mathcal{F}_{i-1}]$.

Заметим теперь, что если $\langle m_t^{l,\varepsilon} \rangle \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$, то $m_t^{l,\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ [7], т. е. $l (M_{[t/\varepsilon]}^\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$, $\forall\, l \in B^*$, поэтому $M_{[t/\varepsilon]}^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{w} 0$.

Докажем, что $\langle m_t^{l,\varepsilon} \rangle \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$, $\forall\, t \geqslant 0$, $\forall\, l \in B^*$. Действительно,

$$\langle m_t^{l,\varepsilon} \rangle = \sum_{j=1}^{[t/\varepsilon]-1} E_\rho [l^2 (M_i^\varepsilon - M_{i-1}^\varepsilon)/\mathcal{F}_{i-1}] = \sum_{j=1}^{[t/\varepsilon]-1} E_\rho [l^2 (V_i^\varepsilon f^\varepsilon (z, x_i) -$$

$$- V_{i-1}^\varepsilon f^\varepsilon (z, x_{i-1}) - E_\rho [V_i^\varepsilon f^\varepsilon (z, x_i) - V_{i-1}^\varepsilon f^\varepsilon (z, x_{i-1})/\mathcal{F}_{i-1}])/\mathcal{F}_{i-1}] \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{i=1}^{[t/\varepsilon]-1} E_\rho [l^2 (V_i^\varepsilon f^\varepsilon (z, x_i) - V_{i-1}^\varepsilon f^\varepsilon (z, x_{i-1})) + l^2 (E_\rho [V_i^\varepsilon f^\varepsilon (z, x_i) -$$

$$- V_{i-1}^{\varepsilon} f^{\varepsilon}(z, x_{i-1})/\mathcal{F}_{i-1}])/\mathcal{F}_{i-1}] \leqslant 2\varepsilon^2 \sum_{j=1}^{[t/\varepsilon]-1} E_{\rho} [l^2 ((V_{i-1}^{\varepsilon} \theta_i \Gamma(x_{i-1}) + O(\varepsilon)) f^{(0)}(z) +$$

$$+ (V_i^{\varepsilon} f^{(1)}(z, x_i) - V_{i-1}^{\varepsilon} f^{(1)}(z, x_{i-1}))) + l^2 (E_{\rho} [(V_{i-1}^{\varepsilon} \theta_i \Gamma(x_{i-1}) + O(\varepsilon)) f^{(0)}(z) +$$

$$+ (V_i^{\varepsilon} f^{(1)}(z, x_i) - V_{i-1}^{\varepsilon} f^{(1)}(z, x_{i-1})/\mathcal{F}_{i-1}])/\mathcal{F}_{i-1}] = 2\varepsilon^2 \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{[t/\varepsilon]-1} E_{\rho} [l^2 ((V_{i-1}^{\varepsilon} \theta_i \Gamma(x_{i-1}) + O(\varepsilon)) f^{(0)}(z) + (V_i^{\varepsilon} f^{(1)}(z, x_i) -$$

$$- V_{i-1}^{\varepsilon} f^{(1)}(z, x_{i-1}))) + l^2 (V_{i-1}^{\varepsilon} A f^{(0)}(z) + O(\varepsilon) f^{(0)}(z))/\mathcal{F}_{i-1}] \leqslant$$

$$\leqslant 4\varepsilon^2 \sum_{i=1}^{[t/\varepsilon]-1} l^2 (V_{i-1}^{\varepsilon} A f^{(0)}(z) + O(\varepsilon) f^{(0)}(z)]. \quad (19)$$

В итоге

$$|\langle m_t^{l,\varepsilon} \rangle| \leqslant 4\varepsilon^2 [t/\varepsilon] [\| A f^{(0)}(z) \| + \| O(\varepsilon) f^{(0)}(z) \|] \| l \|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 8\varepsilon t (\rho_1 + \| O(\varepsilon) f^{(0)}(z) \|^2) \| l \|^2,$$

что сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$, $\forall\, l \in B^*$, $t \geqslant 0$, где $O(\varepsilon) := o(\varepsilon)/\varepsilon$, $o(\varepsilon)$ определено в (8).

Из оценки (19) и вытекает, что характеристика мартингала $M_{[t/\varepsilon]}^{\varepsilon}$ сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Поэтому $M_{[t/\varepsilon]}^{\varepsilon} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Значит, $M_{[t/\varepsilon]}^{\varepsilon}$ сходится слабо к $M_t \equiv 0$, но $M_t \equiv 0 \equiv \tilde{V}_t f^{(0)}(z) - f^{(0)}(z) - \int_0^t \tilde{V}_u A f^{(0)}(z)\, du$. Отсюда следует, что $\tilde{V}_t$ — решение уравнения $\tilde{V}_t = I + \int_0^t \tilde{V}_u A du$ и доказательство теоремы 1 закончено.

3. Рассмотрим дискретную ПМСЭ со скачками. Пусть $\{\mathcal{D}^{\varepsilon}(x);\ x \in X\}$ — семейство линейных сжимающих операторов, допускающих разложение вида

$$\mathcal{D}^{\varepsilon}(x) = I + \varepsilon \mathcal{D}_1(x) + o(\varepsilon), \quad (20)$$

где $\{\mathcal{D}_1(x);\ x \in X\}$ — замкнутые линейные операторы с областью определения $B_0 \subset B$.

Дискретный ПМСЭ со скачками определяется соотношением

$$Y_n^{\varepsilon} := \Gamma_{x_0}(\varepsilon\theta_1) \mathcal{D}^{\varepsilon}(x_1) \Gamma_{x_1}(\varepsilon\theta_2) \ldots \Gamma_{x_{n-1}}(\varepsilon\theta_n) \mathcal{D}^{\varepsilon}(x_n), \quad n \geqslant 1. \quad (21)$$

Пусть

$$B := \int_X \rho(dx) [m(x) [\Gamma(x) + P\mathcal{D}_1(x)], \quad \int_X \rho(dx) \| \mathcal{D}_1(x) f \|^2 := d.$$

Теорема 2. *Предположим, что первые два момента $m(x)$ и $m_2(x)$ равномерно ограничены по x и оператор B — замыкаемый,* ρ_1, ρ_2, $d < +\infty$

Тогда $Y_{[t/\varepsilon]}^{\varepsilon}$ слабо сходится при $\varepsilon \to 0$ к процессу Y_t:

$$Y_t = I + \int_0^t Y_s B ds$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1 с учетом только того, что

$$Y_{n+1}^{\varepsilon} = Y_n + Y_n^{\varepsilon} [\varepsilon\theta_{n+1} \Gamma(x_n) + o(\varepsilon)] \mathcal{D}^{\varepsilon}(x_n^{\varepsilon}) + Y_n^{\varepsilon} [\varepsilon \mathcal{D}_1(x_n) + o(\varepsilon)]. \quad (22)$$

4. В этом пункте исследуются закон больших чисел (теорема 3) для непрерывных ПМСЭ. Заметим, что аналогичные задачи для разрывных ПМСЭ изучались в работе [1].

Непрерывный ПМСЭ определяется соотношением

$$C^{\varepsilon}(t) := \Gamma_{x_0}(\varepsilon\theta_1)\Gamma_{x_1}(\varepsilon\theta_2)\ldots\Gamma_{\varkappa(t/\varepsilon)}(t-\varepsilon\tau_{\nu(t/\varepsilon)}), \tag{23}$$

где $\tau_n := \sum_{k=1}^{n}\theta_k$, $\nu(t) = \max\{n : \tau_n \leqslant t\}$.

Пусть $\hat{A} = A/m$, где A определен в (3), п. 1,

$$m := \int_X \rho(dx)\, m(x).$$

Теорема 3. *Если A — замыкаемый оператор, $m(x)$ и $m_2(x)$ равномерно ограничены по $x, \rho_1, \rho_2 < +\infty$, то $C^{\varepsilon}(t)$ в (23) слабо сходится при $\varepsilon \to 0$ к $C(t)$:*

$$C(t) = I + \int_0^t C(s)\hat{A}ds. \tag{24}$$

Доказательство. Заметим, что из (23) следует представленне

$$C^{\varepsilon}(t) = V^{\varepsilon}_{\nu(t/\varepsilon)}\Gamma_{\varkappa(t/\varepsilon)}(t-\varepsilon\tau_{\nu(t/\varepsilon)}),$$

где V^{ε}_n определен в (1), п. 1.

Так как

$$C^{\varepsilon}(t) = V^{\varepsilon}_{\nu(t/\varepsilon)} + V^{\varepsilon}_{\nu(t/\varepsilon)}[\Gamma_{\varkappa(t/\varepsilon)}(t-\varepsilon\tau_{\nu(t/\varepsilon)}) - I],\ \Gamma_{\varkappa(t/\varepsilon)}(t-\varepsilon\tau_{\nu(t/\varepsilon)}) - $$
$$- I = [t-\varepsilon\tau_{\nu(t/\varepsilon)}]\,\Gamma(\varkappa(t/\varepsilon)) + o(\varepsilon),$$

и

$$[t-\varepsilon\tau_{\nu(t/\varepsilon)}]\,\Gamma(\varkappa(t/\varepsilon)) = \varepsilon[t/\varepsilon - \tau_{\nu(t/\varepsilon)}]\,\Gamma(\varkappa(t/\varepsilon))$$

сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$ из-за того, что

$$E_{\rho}[t/\varepsilon - \tau_{\nu(t/\varepsilon)}]\,\Gamma(\varkappa(t/\varepsilon)) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} t\int_X \rho(dx)\, m_2(x)\,\Gamma(x)/2m.$$

то $E_{\rho}V^{\varepsilon}_{\nu(t/\varepsilon)}[\Gamma_{\varkappa(t/\varepsilon)}(t-\varepsilon\tau_{\nu(t/\varepsilon)}) - I] \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$, если только $V^{\varepsilon}_{\nu(t/\varepsilon)}$ имеет предел при $\varepsilon \to 0$.

Но из теоремы 1 следует, что $V^{\varepsilon}_{[t/\varepsilon]}$ сходится слабо при $\varepsilon \to 0$ к $\tilde{V}_t$, где $\tilde{V}_t$ определено в (4).

Из теоремы же восстановления [10], § 5 следует, что $\nu(t/\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} t/m$ поэтому $C^{\varepsilon}(t)$ сходится слабо к $C(t)$ при $\varepsilon \to 0$, где $C(t)$ определено (24). Теорема доказана.

1. *Королюк В. С., Свищук А. В.* Слабая сходимость ПМСЭ в схеме усреднения // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1989 — Вып. 42.— С. 80—95.
2. *Королюк В. С., Свищук А. В.* Фазовое усреднение для неоднородных ПМСЭ // Укр. мат. журн.— 1989.— 41, № 2.— С. 163—170.
3. *Watkins J.* A central limit problem in random evolutions // Ann. Probab.— 1984.— 12.— P. 480—513
4. *Watkins J.* Limit theorems for stationary random evolutions // Stochast. Process and Appl.— 1985.— 19, N 2.— P. 189—224.
5. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем.— Киев : Наук. думка, 1978.— 218 с.
6. *Свищук А. В.* Мартингальный подход к ПМСЭ // Тр. науч. конф. мол. ученых (Киев, 24—26 нояб. 1986 г.).— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1987.— С. 106—108.
7. *Липцер Р., Ширяев А. Н.* Теория мартингалов.— М. : Наука, 1986.— 512 с.
8. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер.— М. : Наука, 1977.— 351 с.
9. *Kurtz T.* Semigroups of conditioned shifts and approximation of Markov processes // Ann. Probab.— 1975. — 3.— P. 618—642.
10. *Шуренков В. М.* Эргодические процессы Маркова.— М. : Наука, 1989.— 332 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 30.12.88