УДК 517.911

М. У. Ахметов, Н. А. Перестюк

Устойчивость периодических решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях

Будем рассматривать систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$dx/dt = f(t, x), \quad t \neq t_i(x), \quad \Delta x|_{t=t_i(x)} = I_i(x), \tag{1}$$

в которой $x \in \mathbb{R}^n$, функции $f(t, x)$, $I_i(x)$, $t_i(x)$ определены и непрерывны по t и x, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{Z}$. Функция $f(t, x)$ T-периодическая по t, и существует число $p \in \mathbb{N}$, для которого при всех $x \in \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{Z}$ верны равенства $I_{i+p}(x) = I_i(x)$, $t_{i+p}(x) = t_i(x) + T$.

Поверхности разрыва удовлетворяют условию единственности, которое заключается в том, что решение уравнений (1) пересекает любую из этих поверхностей не больше одного раза, а также условию $t_i(x) > t_{i-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{Z}$.

В работе исследуется вопрос об асимптотической устойчивости семейства периодических решений системы (1), зависящих от параметра $\gamma \in \mathbb{R}^m$. Предварительно доказана теорема о дифференцируемости по параметру решений системы

$$dx/dt = f(t, x, \mu), \quad t \neq t_i(x, \mu),$$
$$\Delta x|_{t=t_i(x, \mu)} = I_i(x, \mu), \tag{2}$$

где функции $f(t, x, \mu)$, $I_i(x, \mu)$ и $t_i(x, \mu)$ определены и непрерывны при всех $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$, $i \in \mathbb{Z}$ по t, x, μ, поверхности $t = t_i(x, \mu)$ удовлетворяют условию единственности и $t_i(x, \mu) > t_{i-1}(x, \mu)$ при $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$, $i \in \mathbb{Z}$.

Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием возникли как математические модели при решении практически важных задач, и сейчас теория импульсных систем находит широкое применение в нелинейной механике [1—3]. В настоящей статье полученные результаты использованы для доказательства асимптотической устойчивости периодического движения виброударной системы, описанной в [4].

Пусть $x(t)$ — решение уравнения (1) (или (2)), определенное на промежутке I (I может быть вещественной полуосью или прямой).

Будем говорить, что решение $y(t)$ этого уравнения находится в ε-окрестности решения $x(t)$, если: 1) мера симметрической разности областей существования решений x и y не больше, чем ε; 2) точки разрыва решения y расположены в ε-окрестности точек разрыва решения x; 3) для всех t, лежащих вне ε-окрестностей точек разрыва $x(t)$, справедливо неравенство $\| y(t) - x(t) \| < \varepsilon$.

Топологию, определенную при помощи ε-окрестностей, назовем B-топологией.

Решение $x(t)$ назовем B-устойчивым, если оно определено при $t \geqslant t_0$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что решение $y(t)$, удовлетворяющее условию $\| y(t_0) - x(t_0) \| < \varepsilon$, принадлежит ε-окрестности решения $x(t)$.

B-устойчивое решение является B-асимптотически устойчивым, если существует такое $\delta > 0$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\theta > t_0$ такое, что решение y, для которого $\| y(t_0) - x(t_0) \| < \delta$, принадлежит ε-окрестности решения $x(t)$ при $t \geqslant \theta$.

Можно проверить, что решение системы (2) непрерывно в B-топологии зависит от начальных данных t_0 и x_0 и параметра μ в любом компакте из $\mathbb{R}^{1+n+m}$, содержащем точку (t_0, x_0, μ), если только $t_0 \neq t_i(x_0, \mu)$ при всех $i \in \mathbb{Z}$.

Предположим теперь, что в области

$$F = \{(x, t, \mu) \,|\, \|x - x_0\| < d, \quad t_0 < t < t_0 + T, \quad \|\mu - \mu_0\| < b\}$$

функции $f(t, x, \mu)$, $I_i(x, \mu)$, $t_i(x, \mu)$ имеют непрерывные и ограниченные производные по x_j и μ_k, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$

Пусть решение $x(t) = x(t, \mu_0)$, $x(t_0) = x_0$ системы (2) определено при всех $t \in (t_0, t_0 + T)$. Решение $y(t) = x(t, \mu_0 + \Delta\mu_1)$, $\Delta\mu_1 = (\Delta\mu, 0, \ldots, 0)$ также удовлетворяет начальному условию $y(t_0) = x_0$.

Кусочно-непрерывную функцию $u(t)$ назовем B-производной решения $x(t)$ по параметру μ_1, если функция $y(t)$ расположена в θ-окрестности суммы $x(t) + \Delta\mu u(t)$, $\theta = 0(\Delta\mu)$ и, кроме того, для всех t, расположенных вне θ-окрестностей точек разрыва решения $x(t)$, верно неравенство $\|y(t) - x(t) - \Delta\mu u(t)\| < \nu$, $\nu = o(\Delta\mu)$.

Аналогично определяются B-производные по всем остальным μ_k $k = \overline{2, m}$.

Пусть τ_i, $i = \overline{1, p}$, — точки разрыва решения $x(t)$, принадлежащие промежутку $(t_0, t_0 + T)$. Обозначим

$$A(t) = \frac{\partial f(t, x(t), \mu_0)}{\partial x}, \quad P_i = V_i - W_i + \frac{\partial I_i(x(\tau_i), \mu_0)}{\partial x}(E + V_i),$$

$$g_j(t) = \frac{\partial f(t, x(t), \mu_0)}{\partial \mu_j}, \tag{3}$$

$$J_i^j = \frac{\dfrac{\partial t_i(x(\tau_i), \mu_0)}{\partial \mu_j}\left(f(\tau_i, x(\tau_i), \mu_0) - f(\tau_i, x(\tau_i +), \mu_0)\right)}{1 - \left\langle \dfrac{\partial t_i(x(\tau_i), \mu_0)}{\partial x}, f(\tau_i, x(\tau_i), \mu_0)\right\rangle} + \frac{\partial I_i(x(\tau_i), \mu_0)}{\partial \mu_j}.$$

Матрицы V_i и W_i такие, что для любого $z \in \mathbb{R}^n$

$$V_i z = \frac{\left\langle \dfrac{\partial t_i(x(\tau_i), \mu_0)}{\partial x}, z\right\rangle f(\tau_i, x(\tau_i), \mu_0)}{1 - \left\langle \dfrac{\partial t_i(x(\tau_i), \mu_0)}{\partial x}, f(\tau_i, x(\tau_i), \mu_0)\right\rangle},$$

$$W_i z = \frac{\dfrac{\partial t_i(x(\tau_i), \mu_0)}{\partial x}, z\rangle f(\tau_i, x(\tau_i +), \mu_0)}{1 - \left\langle \dfrac{\partial t_i(x(\tau_i), \mu_0)}{\partial x}, f(\tau_i, x(\tau_i), \mu_0)\right\rangle}.$$

Угловыми скобками $\langle , \rangle$ обозначено скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Если система (2) удовлетворяет всем перечисленным выше условиям, то по каждому μ_j, $j = \overline{1, m}$, существует B-производная решения $x(t)$, которая является решением линейной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием*

$$\frac{du}{dt} = A(t)u + g_j(t), \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta u|_{t=\tau_i} = P_i u + J_i^j \tag{4}$$

с начальным условием $u(t_0) = 0$.

Доказательство. Проверим справедливость теоремы при $j = 1$. Пусть θ_i — точки разрыва решения $y(t)$. Для простоты, не нарушая общности, будем полагать $\theta_i \geqslant \tau_i$ для всех i.

Обозначим $\nu(t) = y(t) - x(t) - \Delta\mu u(t)$, где $u(t)$ — решение системы (4) при $j = 1$ с начальным условием $u(t_0) = 0$.

Решения $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$ имеют интегральные представления

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau), \mu_0)\,d\tau+\sum_{t_0<\tau_i<t} I_i(x(\tau_i), \mu_0),$$

$$y(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau), \mu_0)\,d\tau+\sum_{t_0<\theta_i<t} I_i(y(\theta_i), \mu), \tag{5}$$

$$u(t)=\int_{t_0}^{t}(A(\tau)u(\tau)+g_1(\tau))\,d\tau+\sum_{t_0<\tau_i<t}(P_iu(\tau_i)+J_i^1).$$

Используя (5) и дифференцируемость функций $f(t, x, \mu)$, $I_i(x, \mu)$ и $t_i(x, \mu)$, находим, что для всех $t\bar{\in}(\tau_i, \theta_i)$ справедливо неравенство

$$\|\nu(t)\|\leqslant e^{kT}(pw(\Delta\mu)+\Delta\mu\xi(\Delta\mu)T), \tag{6}$$

где $k=\sup\limits_{t_0\leqslant t\leqslant t_0+T}\|A(t)\|$, $w=o(\Delta\mu)$, $\xi(\Delta\mu)=o(\Delta\mu)$.

Кроме того, для всех $\Delta t_i=\theta_i-\tau_i$, $i=\overline{1, p}$, верны равенства

$$\Delta t_i=\frac{\Delta\mu\left(\left\langle\frac{\partial t_i(x(\tau_i), \mu_0)}{\partial x}, u(\tau_i)\right\rangle+\frac{\partial t_i(x(\tau_i), \mu_0)}{\partial\mu_1}\right.}{1-\left\langle\frac{\partial t_i(x(\tau_i), \mu_0)}{\partial x}, f(\tau_i, x(\tau_i), \mu_0)\right\rangle}+o(\Delta\mu). \tag{7}$$

Соотношения (6) и (7) доказывают теорему при $j=1$. Таким же образом ее справедливость проверяется при всех остальных $j=\overline{2, m}$. Теорема доказана.

Предположим теперь, что в (1) функции $f(t, x)$, $I_i(x)$, $t_i(x)$ непрерывно дифференцируемы по x_k, $k=\overline{1, n}$.

Пусть уравнение (1) имеет семейство T-периодических решений $x(t, \gamma)$, зависящих от параметра γ в некотором компакте $K\subset\mathbb{R}^m$, $m<n$, имеющих внутри K по каждому γ_j, $j=\overline{1, m}$, B-производные $\varphi_j(t)=\partial x(t, \gamma)/\partial\gamma_j$. Предположим, что эти производные линейно независимы при $t=0$. Не нарушая общности, можно считать, что каждая точка $x(0, \gamma)$ не принадлежит ни одной из поверхностей разрыва вместе с некоторой своей окрестностью.

Для произвольного решения $x(t)$ системы (1) определим функцию $z(t)=x(t)-x(t, \gamma)$.

Обозначим через $\tau_i=\tau_i(\gamma)$ точки разрыва решения $x(t, \gamma)$, через θ_i — точки разрыва решения $x(t)$. Пусть $\theta_i\geqslant\tau_i$, $i=\overline{1, p}$.

Применив методику доказательства теоремы 1, можно показать, что для $t\bar{\in}(\tau_i, \theta_i)$ функция $z(t)$ сопадает с решением уравнения

$$du/dt=A(t)u+g(t, u),\quad t\neq\tau_i,\quad \Delta u|_{t=\tau_i}=P_iu+J_i(u), \tag{8}$$

в котором матрицы $A(t)$, P_i, функции $g(t, u)$, $J_i(u)$ зависят от γ. Матрицы $A(t)$ и P_i определены формулами (3), где $x(t)=x(t, \gamma)$. Выполняются условия $\|g(t, u)\|=o(\|u\|)$, $\|J_i(u)\|=o(\|u\|)$.

Следующее предложение является аналогом теоремы из [6].

Теорема 2. *Пусть при любом $\gamma\in K$ среди характеристических показателей системы*

$$dv/dt=A(t)v,\quad t\neq\tau_i,\quad \Delta v|_{t=\tau_i}=P_iv \tag{9}$$

существует $n-m$, имеющих отрицательные вещественные части.

Тогда существует вещественное многообразие $W(\gamma)$ размерности $n-m$, содержащее точку $x(0, \gamma)$, такое, что T-периодическое решение $x(t, \gamma)$ условно B-асимптотически устойчиво относительно многообразия $W(\gamma)$.

Доказательство. Согласно теореме 1 B-производные φ_j являются T-периодическими решениями системы (9). Так как функции φ_j линейно независимы при $t=0$, то они являются линейно независимыми решениями этой системы [5]. Поэтому уравнения (9) имеют характеристический показатель, равный нулю, с кратностью не меньшей чем m. Пусть эта кратность в точности равна m.

Обозначим $Y(t)$ — нормированную в нуле фундаментальную матрицу решений системы (9), C — матрицу, для которой верно равенство

$$Y(t+T)=Y(t)\,C. \tag{10}$$

Не нарушая общности дальнейших рассуждений, можно считать, что

$$C=e^{BT}, \tag{11}$$

где $B=\operatorname{diag}[0, B_1]$, B_1 — матрица размера $(n-m)\times(n-m)$, все собственные числа которой имеют отрицательные вещественные части. Обозначим $Z(t)=Y(t)\,e^{-Bt}$, $V_1(t,s)=Z(t)\operatorname{diag}[0, e^{B_1(t-s)}]\,Z^{-1}(s)$, $V_2(t,s)=Z(t)\operatorname{diag}[E, 0,]\,Z^{-1}(s)$. Из выражений для V_1 и V_2 следует, что существуют постоянные $M>1$ и $\alpha<0$, для которых при $t>s$

$$\|V_1(t,s)\|\leqslant Me^{\alpha(t-s)},\quad \|V_2(t,s)\|\leqslant M. \tag{12}$$

Можно проверить, что решение интегрального уравнения

$$\zeta(t)=Y(t)\,a+\int_0^t V_1(t,s)\,g(\zeta,s)\,ds-\int_t^\infty V_2(t,s)\,g(\zeta,s)\,ds+$$
$$+\sum_{0<\tau_i<t}V_1(t,\tau_i)\,J_i(\zeta(\tau_i))-\sum_{t<\tau_i}V_2(t,\tau_i)\,J_i(\zeta(\tau_i)) \tag{13}$$

является также решением системы (8).

С помощью (12) и свойств функций $g(t, x)$ и $J_i(x)$ методом последовательных приближений доказывается, что при достаточно малом h, $\|a\|<h$, существует решение $\zeta(t)$ уравнений (13), для которого справедливо неравенство

$$\|\zeta(t)\|<M_1\exp(\alpha t/2)$$

равномерно по t и a, $t>0$, $\|a\|<h$, $0<M_1<+\infty$.

Подставив в (13) $t=0$, получим, что $\zeta_i(0)=a_i$, если $i>m$, и $\zeta_i=\Phi_i(a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n)$, $i=\overline{1,m}$, где $\Phi_i(a_{m+1},\ldots,a_n)=o(\|a\|)$. Значит,

$$\zeta_i=\Phi_i(\zeta_{m+1}, \zeta_{m+2}, \ldots, \xi_n) \tag{14}$$

и

$$\Phi_i(\zeta_{m+1}, \zeta_{m+2}, \ldots, \zeta_n)=o(\|\zeta\|). \tag{15}$$

Соотношения (14) определяют многообразие $W(\gamma)$, любая точка $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ которого, расположенная в достаточно малой окрестности начала координат, является начальным значением решения системы (8), стремящегося к нулю при $t\to+\infty$. Отсюда и из непрерывной в B-топологии зависимости решений системы (1) от начальных данных следует доказательство утверждения теоремы.

Следствием теоремы 2 является аналог теоремы Ляпунова—Пуанкаре об асимптотической устойчивости единственного T-периодического решения системы (1).

Рассмотрим динамическую систему, исследованную в [4]. Она состоит из шарика, прыгающего на движущейся вертикально платформе. Предполагается, что платформа не реагирует на удары шарика и движется по закону $X=X_0\sin\omega t$.

Движение шарика между ударами определяется формулой $x=\frac{1}{2}gt^2+\dot{x}^0t+x^0$. В [4] доказано, что при условии

$$\omega^2>\frac{\pi g}{X_0}\,\frac{1-R}{1+R}, \tag{16}$$

где R — коэффициент восстановления, такая динамическая модель допускает два периодических движения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ с периодом, равным периоду колебаний платформы.

Предполагается, что периодические движения испытывают импульсное воздействие один раз за период, в моменты соответственно $t = \varphi_1$ и $t = \varphi_2$, $0 < \varphi_1, \varphi_2 < 2\pi/\omega$.

Используя результаты работы [4], находим, что математическая модель для исследования системы на интервале $[0, 2\pi/\omega]$ имеет вид дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$dx_1/dt = x_2, \quad dx_2/dt = -g, \quad t \neq \frac{1}{\omega}\arcsin\frac{x_1}{X_0} \equiv t_0(x), \quad \Delta x_1|_{t=t_0(x_1)} = 0,$$

$$\Delta x_2|_{t=t_0(x_1)} = (1+R)\left[X_0\omega\cos\left(\arcsin\frac{x_1}{X_0} - \dot{x}^0 + \frac{g}{\omega}\arcsin\frac{x_1}{X_0}\right], \quad (17)$$

где $\dot{x}^0$ — скорость в момент $t = 0$.

Системой уравнений в вариациях для уравнений (17) относительно решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ являются соответственно системы линейных уравнений

$$du_1/dt = u_2, \quad du_2/dt = -g, \quad t \neq \varphi_1, \quad \Delta u_1|_{t=\varphi_1} = 0, \quad \Delta u_2|_{t=\varphi_1} = b_+u_1, \quad (18)$$

и

$$du_1/dt = u_2, \quad du_2/dt = -g, \quad t \neq \varphi_2, \quad \Delta u_1|_{t=\varphi_2} = 0, \quad \Delta u_2|_{t=\varphi_2} = b_-u_1, \quad (19)$$

где

$$b_+ = \frac{(1+R)^2\omega}{\pi(1-R)} - (1+R)\omega\sqrt{\left[\frac{X_0\omega^2(1+R)}{\pi g(1-R)}\right]^2 - 1},$$

$$b_- = \frac{(1+R)^2\omega}{\pi(1-R)} + (1+R)\omega\sqrt{\left[\frac{X_0\omega^2(1+R)}{\pi g(1-R)}\right]^2 - 1}.$$

Характеристическое уравнение [5] для уравнений (18) и (19) соответственно имеет вид

$$\lambda^2 - 2\left(1 + \frac{\pi b_+}{\omega}\right)\lambda + 1 = 0 \quad (20)$$

и

$$\lambda^2 - 2\left(1 + \frac{\pi b_-}{\omega}\right)\lambda + 1 = 0. \quad (21)$$

Решая эти уравнения, получаем, что уравнение (21) не имеет корней с неположительной вещественной частью. Следовательно, решение $x_2(t)$ — неустойчивое.

Оба корня уравнения (20) имеют отрицательные вещественные части при выполнении неравенства

$$\omega^2 > \sqrt{\left[\frac{\pi g(1-R)}{X_0(1+R)}\right]^2 + \left[\frac{g}{X_0}\left(1 + \frac{1-R}{(1+R)^2}\right)\right]^2}. \quad (22)$$

Сравнивая соотношения (16) и (22), находим, что согласно аналогу теоремы Ляпунова—Пуанкаре об устойчивости периодического решения, если верно неравенство (22), то исследуемая виброударная система допускает единственное B-асимптотически устойчивое, $2\pi/\omega$-периодическое решение.

Полученный результат хорошо согласуется с выводом работы [4].

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Физматгиз, 1963.— 410 с.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Метод усреднения в системах с импульсным воздействием // Укр. мат. журн.— 1985.— 37, № 1.— С. 56—64.
3. *Бурд В. Ш.* Устойчивость при постоянно действующих возмущениях и усреднение на неограниченном интервале в системах с импульсами // Прикл. математика и механика.— 1986.— 50, № 1.— С. 50—56.

4. *Кобринский А. Е., Кобринский А. А.* Виброударные системы.— М. : Наука, 1973.— 592 с.
5. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— Киев : Изд-во Киев. ун-та, 1980.— 80 с.
6. *Розо М.* Нелинейные колебания и теория устойчивости.— М. : Наука, 1971.— 288 с.

Киев. ун-т,
Актюб. пед. ин-т

Получено 04.02.88