УДК 517.968

Л. Г. Арабаджян

О существовании нетривиальных решений некоторых линейных и нелинейных уравнений типа свертки

Введение. Задача вольтерровской факторизации оператора Винера—Хопфа (см. например, [1—5, 7, 8]) заключается в возможности представления

$$\mathcal{I} - \mathcal{K} = (\mathcal{I} - \mathcal{V}_-)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_+), \tag{1}$$

где $\mathcal{I}$ — единичный оператор, $\mathcal{K}$ — оператор Винера — Хопфа:

$$(\mathcal{K}\varphi)(x) = \int_0^\infty K(x-t)\varphi(t)\,dt, \quad K \in L_1(-\infty, \infty),$$

а $\mathcal{V}_\pm$ — вольтерровские операторы вида

$$(\mathcal{V}_+\varphi)(x) = \int_0^x V_+(x-t)\varphi(t)\,dt, \quad (\mathcal{V}_-\varphi)(x) = \int_x^\infty V_-(t-x)\varphi(t)\,dt.$$

В [3—5, 7, 8] развит метод нелинейных уравнений (НУФ), который сводит задачу факторизации (1) к вопросу разрешимости следующих нелинейных уравнений Н. Б. Енгибаряна:

$$V_\pm(x) = K(\pm x) + \int_0^\infty V_\mp(t)V_\pm(x+t)\,dt, \quad x > 0. \tag{2}$$

Такой путь позволил доказать, в частности, существование решений однородного и неоднородного интегральных уравнений Винера—Хопфа

$$f(x) = g(x) + \int_0^\infty K(x-t)f(t)\,dt, \tag{3}$$

$$S^0(x) = \int_0^\infty K(x-t)S^0(t)\,dt, \quad S^0(0) = \alpha, \quad \alpha \neq 0 \tag{4}$$

с консервативным ядром

$$0 \leqslant K \in L_1(-\infty, \infty), \quad \mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^\infty K(t)\,dt = 1. \tag{5}$$

Дальнейшее изучение факторизации (1) и свойств решений консервативных уравнений (3) и (4) дало возможность доказать нетривиальную разрешимость уравнений вида [10]

$$B_0(x) = \lambda(x)\int_0^\infty K(x-t)B^0(t)\,dt \tag{6}$$

и ассоциированных с (6) уравнений

$$B(x) = \int_0^\infty K(x-t)\lambda(t)B(t)\,dt, \tag{7}$$

где K удовлетворяет условию (5), а $0 \leqslant \lambda(x) \leqslant 1$, $(1-\lambda(x))\,x \in L_1(0, \infty)$.

Частные случаи таких уравнений рассматривались ранее в работе [11].

Работы [7—9] посвящены дальнейшему изучению и обобщению результатов работ [3—5] на векторные и кратные уравнения вида (3), (4) и факторизаций соответствующих операторов. В частности, факторизация двухмерного оператора Винера—Хопфа, рассмотренная в [9], дала возможность доказать существование положительного ограниченного решения (при $n = 2$) уравнения

$$S(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} K(x-t)\, S(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \tag{8}$$

где ядро K удовлетворяет условию (консервативности)

$$0 \leqslant K \in L_1(\mathbb{R}^n), \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(t)\, dt = 1, \tag{9}$$

при $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |t_j|\, K(t_1, \dots t_n)\, dt_1 \dots dt_n < +\infty, \quad j = 1, 2, \dots n$ и

$$\nu_j < 0, \quad j = 1, 2, \dots n, \tag{10}$$

где $\nu_j \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} t_j K(t_1, \dots t_n)\, dt_1 \dots dt_n$. (Здесь $x = (x_1, \dots x_n)$, $t = (t_1, \dots t_n)$, $dt = dt_1 \dots dt_n$, $\mathbb{R}^n_+ = [0, \infty) \times \dots \times [0, \infty)$.)

В настоящей статье будет доказано существование ограниченного решения уравнения (8), (9) при условии (10) для $n \geqslant 2$, причем будут использованы свойства решений одномерных консервативных уравнений (3) и (4).

Существование положительного решения уравнения (7) и асимптотическое поведение этого решения позволяют доказать нетривиальную разрешимость следующего нелинейного уравнения типа Гаммерштейна

$$G(x) = \int\limits_0^\infty K(x-t)\, \Psi(G(t))\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^1_+. \tag{11}$$

Здесь K симметрична ($K(-x) = K(x)$, $x > 0$) и удовлетворяет условию (5) (или (9) при $n = 1$), а функция Ψ имеет вид

$$\Psi(x) = x - \gamma(x), \quad \Psi(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^1_+,$$

причем γ обладает свойствами:

$$\gamma(0) = 0, \quad \gamma(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^1_+, \quad \gamma(x) \leqslant \frac{\rho}{x^p}, \quad p > 1, \quad \rho = \text{const}, \tag{12}$$

$$\gamma(x) \downarrow \ \text{на } [r, \infty), \quad r \geqslant 0 \text{ и } \gamma \in C[r, \infty).$$

(Параметр ρ задается априори, а r согласуется с ним (см. (33)).)

1. Кратное однородное интегральное уравнение Винера — Хопфа в консервативном случае. 1°. Приведем некоторые результаты из работ [3—6], которые необходимы в наших дальнейших рассуждениях и относятся к одномерным уравнениям (3) и (4) в случае (5).

В [6] доказано, что при $g \in L_1(0, \infty)$ существует решение уравнения (3), (5), являющееся пределом почти везде итераций

$$f_{n+1}(x) = g(x) + \int\limits_0^\infty K(x-t)\, f_n(t)\, dt, \quad f_0 = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{13}$$

В [3 — 5] изучены вопросы нетривиальной разрешимости однородного уравнения (4), (5). Доказано, в частности, что при $\exists \nu^\pm \overset{\text{def}}{=} \int\limits_0^\infty t K(\pm t)\, dt <$

$< +\infty$ и $\nu \overset{\text{def}}{=} \nu^{+} - \nu^{-}$ уравнение (4), (5) имеет нетривиальное решение, если $\nu \leqslant 0$ или $K(-x) = K(x)$, $x > 0$. Указанное решение обладает свойствами $\alpha \leqslant S^0(x) \uparrow$ по x на $[0, \infty)$, причем

а) при $\nu < 0$ решение S^0 ограничено на $[0, \infty)$;

б) при $\nu = 0$ или при $K(-x) = K(x)$, $x > 0$, справедлива асимптотика $S^0(x) \sim \dfrac{\alpha}{m} x$, $x \to \infty$, где $m = \left(\dfrac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

Для отмеченных решений f и S^0 консервативных уравнений (3) и (4) при $\nu \leqslant 0$ (или $K(-x) = K(x)$, $x > 0$) справедливо соотношение

$$\int\limits_0^x f(t)\, dt = o\left(\int\limits_0^x S^0(t)\, dt\right), \quad x \to \infty. \tag{14}$$

2°. Результаты первого пункта дополним новым фактом, относящимся к многомерному неоднородному уравнению специального вида.

Л е м м а 1. *Неоднородное консервативное уравнение Винера — Хопфа вида*

$$\varphi(x, y) = g(x) + \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty K(x - \tau, y - t)\, \varphi(\tau, t)\, d\tau dt, \tag{15}$$

при $0 \leqslant g \in L_1(0, \infty)$ и

$$\nu_1 \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{-\infty}^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty \tau K(\tau, t)\, d\tau dt < 0$$

обладает неотрицательным решением φ *из* $L_1^{\text{loc}} \times L_1^{\text{loc}}$, *причем*

$$\int\limits_0^x \varphi(\tau, y)\, d\tau = o(x), \quad x \to \infty \tag{16}$$

при фиксированном y.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Совместно с (15) рассмотрим уравнение

$$\tilde{f}(x) = g(x) + \int\limits_0^\infty \tilde{K}(x - t)\, \tilde{f}(t)\, dt, \tag{17}$$

где

$$\tilde{K}(x) = \int\limits_{-\infty}^\infty K(x, t)\, dt, \tag{18}$$

а K — ядро уравнения (15). Очевидно, что $\tilde{K}$ удовлетворяет условию (5) (консервативное ядро).

Из соотношения

$$\varphi_{n+1}(x, y) = g(x) + \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty K(x - \tau, y - t)\, \varphi_n(\tau, t)\, d\tau dt, \quad \varphi_0 = 0, \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

по индукции $\forall n$ получаем оценку

$$\varphi_n(x, y) \leqslant \tilde{f}(x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}_+^1, \tag{19}$$

где $\tilde{f}$ — решение уравнения (17).

Нетрудно заметить, что при условии $g \geqslant 0$ итерации $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ монотонно возрастают по n для $(x, y) \in \mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}_+^1$.

Из оценки (19) с учетом монотонности последовательности $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ следует существование предела $\varphi(x, y) = \lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(x, y)$. Нетрудно показать, что φ удовлетворяет уравнению (15), причем $\varphi(x, y) \leqslant \tilde{f}(x)$. Следовательно, при $\nu_1 = \int\limits_{-\infty}^\infty t\tilde{K}(t)\, dt < 0$ справедливо соотношение (16).

З а м е ч а н и е. Аналогично можно доказать существование локально интегрируемого решения φ консервативного уравнения

$$\varphi(x_1, \dots x_n) = g(x_j) + \int_0^\infty \dots \int_0^\infty K(x_1 - t_1, \dots x_n - t_n)\,\varphi(t_1, \dots t_n)\,dt_1 \dots dt_n$$

при $g \in L_1(0, \infty)$, $\nu_j < 0$, $j = 1, 2, \dots n$. (Здесь K удовлетворяет условию (9).) Для отмеченного решения φ справедливо $\int_0^{x_j} \varphi(x_1, \dots t_j \dots x_n)\,dt_j = o(x_j)$ при $x_j \to \infty$ и фиксированных значениях $x_1 \dots x_n$.

3°. Рассмотрим теперь уравнение (8), (9) при $n = 2$. При условии (10) в работе [9] доказано существование ограниченного решения этого уравнения. В целях единства изложения дадим другое доказательство этого факта.

Пусть $\tilde{S}$ — решение уравнения

$$\tilde{S}(x) = \int_0^\infty \tilde{K}(x - t)\,\tilde{S}(t)\,dt, \quad \tilde{S}(0) = 1, \tag{20}$$

где $\tilde{K}$ — консервативное ядро и определено из (18). Имеем

$$\tilde{\nu} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x\tilde{K}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xK(x, t)\,dx dt = \nu_1.$$

Так что при $\nu_1 < 0$ (и, следовательно, $\tilde{\nu} < 0$) решение $\tilde{S}$ уравнения (20) ограничено (см. п. 1°, свойство а)).

Неоднородное консервативное уравнение

$$\omega(x, y) = \int_0^\infty \tilde{S}(\tau)\,d\tau \int_y^\infty K(x - \tau, t)\,dt + \int_0^\infty \int_0^\infty K(x - \tau, y - t)\,\omega(\tau, t)\,d\tau dt \tag{21}$$

относительной искомой функции ω, со свободным членом $g(x) = \int_0^\infty \tilde{S}(\tau)\,d\tau \int_y^\infty K(x - \tau, t)\,dt$ имеет очевидное решение $\omega^{(1)}(x, y) \equiv \tilde{S}(x)$. Кроме указанного решения уравнение (21) обладает еще другим решением $\omega^{(2)}(x, y)$, которое является пределом следующих итераций:

$$\omega_{n+1}(x, y) = \int_0^\infty \tilde{S}(\tau)\,d\tau \int_x^\infty K(x - \tau, t)\,dt + \int_0^\infty \int_0^\infty K(x - \tau, y - t)\,\omega_n(\tau, t)\,d\tau dt, \tag{22}$$

$$\omega_0 = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Из соотношений (22) по индукции получаем оценку

$$\omega_n(x, y) \leqslant \tilde{S}(x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^1_+, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ввиду ограниченности функции $\tilde{S}$ ($\tilde{S}(x) \leqslant C = \mathrm{const}$, $x \in \mathbb{R}^1_+$) свободный член уравнения (21) оценивается сверху

$$\int_0^\infty \tilde{S}(\tau)\,d\tau \int_y^\infty K(x - \tau, t)\,dt \leqslant C \int_{-\infty}^{\infty} \int_y^\infty K(\tau, t)\,d\tau dt.$$

Поэтому решение $\omega^{(2)}(x, y)$ мажорируется решением уравнения (21) со свободным членом $C \int_{-\infty}^{\infty} \int_y^\infty K(\tau, t)\,d\tau dt$. Из леммы 1 следует, что при $\nu_1 < 0$

$$\int_0^y \omega^{(2)}(x, t)\,dt = o(y) \text{ при } y \to \infty$$

и фиксированном значении x. Это соотношение показывает, что решение $\omega^{(2)}$ не совпадает с $\omega^{(1)}$, причем $\omega^{(2)} \leqslant \omega^{(1)}$. Поэтому функция $\tilde{S}$:

$$\tilde{S}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \omega^{(1)}(x, y) - \omega^{(2)}(x, y) \geqslant 0, \quad \tilde{S} \neq 0,$$

удовлетворяет уравнению (8), (9) при $n = 2$, причем S — ограниченная функция.

Существование ненулевого решения уравнения (8), (9) при условиях (10) и произвольном n докажем по индукции.

Пусть это утверждение справедливо для $(n-1)$-мерных уравнений вида (8), (9) при условии (10). Докажем, что тогда n-мерные уравнения вида (8), (9) с отрицательными первыми моментами ядра K также обладают ограниченным положительным решением.

Пусть K — n-мерное консервативное ядро (т. е. удовлетворяющее условию (9)). Введем обозначение

$$\tilde{K}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x_1, \ldots, x_{n-1}, t_n)\, dt_n.$$

Очевидно, что $\tilde{K}$ является $(n-1)$-мерным консервативным ядром. Для моментов $\tilde{\nu}_j$ ядра $\tilde{K}$ имеем соотношения (используя теорему Фубини)

$$\tilde{\nu}_j \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} x_j \tilde{K}(x_1, \ldots, x_{n-1})\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} x_j K(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \stackrel{\text{def}}{=} \nu_j, \quad (23)$$

$$j = 1, 2, \ldots n - 1.$$

Из соотношений (23) с учетом $\nu_j < 0$, $j = 1, 2, \ldots n$, имеем $\tilde{\nu}_j < 0$, $j = 1, 2, \ldots, n - 1$. Поэтому $(n - 1)$-мерное уравнение вида (8), (9) с ядром $\tilde{K}$ будет иметь ограниченное решение, которое обозначим $\tilde{S}$.

Рассмотрим тогда n-мерное неоднородное консервативное уравнение относительно неизвестной функции $\tilde{\omega}(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\tilde{\omega}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \tilde{S}(t_1, \ldots, t_{n-1})\, dt_1 \ldots dt_{n-1} \int_{x_n}^{\infty} K(x_1 - t_1, \ldots, x_{n-1} - t_{n-1}, \tau_n)\, d\tau_n +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}_+^n} K(x_1 - t_1, \ldots, x_{n-1} - t_{n-1}, x_n - t_n)\, \tilde{\omega}(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n. \quad (24)$$

Уравнение (24) имеет очевидное решение

$$\tilde{\omega}^{(1)}(x_1, \ldots x_{n-1}, x_n) \equiv \tilde{S}(x_1, \ldots x_{n-1}), \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n.$$

Кроме этого решения оно обладает также другим решением $\tilde{\omega}^{(2)}$, являющимся пределом следующих итераций:

$$\tilde{\omega}_{p+1}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \tilde{S}(t_1, \ldots, t_{n-1})\, dt_1 \ldots dt_{n-1} \int_{x_n}^{\infty} K(x_1 - t_1, \ldots x_{n-1} - t_{n-1},$$

$$\tau_n)\, d\tau_n + \int_{\mathbb{R}_+^n} K(x_1 - t_1, \ldots, x_{n-1} - t_{n-1}, x_n - t_n)\, \tilde{\omega}_p(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n, \quad (25)$$

$$\tilde{\omega}_0 \equiv 0, \quad p = 0, 1, 2, \ldots.$$

Аналогично двухмерному случаю с учетом замечания к лемме 1 можно доказать, что существует предел $\tilde{\omega}^{(2)}$ итераций $\{\omega_p\}_{p=0}^{\infty}$, который удовлетворяет уравнению (24) и обладает свойствами: $\tilde{\omega}^{(2)} \leqslant \tilde{\omega}^{(1)} = \tilde{S}$ на $\mathbb{R}_+^n$ и

$$\int_0^{x_n} \tilde{\omega}^{(2)}(x_1, \ldots, x_{n-1}, \tau_n)\, d\tau_n = o(x_n) \text{ при } x_n \to \infty \text{ и фиксированном } (x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Поэтому $\tilde{\omega}^{(2)} \neq \tilde{\omega}^{(1)}$.

Таким образом, функция S:

$$S(x_1, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\omega}^{(1)}(x_1, \ldots, x_n) - \tilde{\omega}^{(2)}(x_1, \ldots, x_n)$$

положительна, ограничена на $\mathbb{R}^n_+$ и удовлетворяет уравнению (8), (9).

Нами установлена следующая теорема.

Теорема 1. *При условии* (10) *существует положительное, ограниченное на* $\mathbb{R}^n_+$ *решение* n*-мерного уравнения* (8), (9) ($n \in \mathbb{N}$).

2. Уравнение Гаммерштейна. В настоящем пункте рассматриваются вопросы нетривиальной разрешимости и асимптотического поведения решения однородного консервативного уравнения (11), (12) типа Гаммерштейна. При этом существенно используются результаты работ [3—6, 10, 11] по факторизации оператора Винера—Хопфа и соответствующих консервативных уравнений (3), (4), (7).

1°. Для дальнейших применений нам необходимы некоторые факты из работ [10, 11] по свойствам решений B^0 и B уравнений (6) и (7), в частности, некоторые оценки снизу для указанных решений при специальных видах функции λ.

Очевидно, что при $\lambda(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^1_+$ существует простая связь между функциями B^0 и B:

$$B(x) = \frac{1}{\lambda(x)} B^0(x), \quad x \in \mathbb{R}^1_+. \tag{26}$$

В работе [10] доказано существование положительного решения уравнения (6) (и, следовательно, уравнения (7), если $\lambda(x) \neq 0$) при $(1 - \lambda(x)) \times S^0(x) \in L_1(0, \infty)$, где S^0 — решение уравнения (4). В случае симметричных ядер K ($K(-x) = K(x)$, $x > 0$) решение S^0 уравнения (4) обладает свойством б) п. 1°, п. 1.

В качестве функции λ в уравнениях (6) и (7) выберем положительную на $\mathbb{R}^1_+$ функцию

$$\lambda(x) = 1 - \frac{\sigma}{(S^0(x))^{p+1}}, \quad \sigma > 0, \tag{27}$$

где S^0 — решение уравнения (4) с начальным условием $S^0(0) = 2r$, а параметры r и p определены условиями (12), σ — произвольный параметр. (Значение параметра σ будет уточнено в замечании п. 2°.) Из равенства (27) полуполучаем

$$(1 - \lambda(x)) S^0(x) = \frac{\sigma}{(S^0(x))^p} \in L_1(0, \infty). \tag{28}$$

(Последнее включение следует из свойства б) п. 1° п. 1.)

Следовательно, при условии (27) существуют положительные решения B^0 и B уравнений (6) и (7).

Оценим B^0. Из результатов [10] следует, что B можно представить в виде $B^0(x) = S^0(x) - \varphi(x)$, где S^0 — решение уравнения (4) с подходящим начальным условием (в рассматриваемом случае $S^0(0) = 2r$), а φ — некоторая положительная на $\mathbb{R}^1_+$ функция, мажорируемая минимальным положительным решением $\tilde{\varphi}$ следующего неоднородного консервативного уравнения Винера—Хопфа [5, 10]:

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{\sigma}{S_0(x))^p} + \int_0^\infty K(x-t)\,\tilde{\varphi}(t)\,dt.$$

(Здесь учтено соотношение (28).)

Используя факторизацию оператора Винера—Хопфа [3—6], решение $\tilde{\varphi}$ последнего уравнения можно представить в виде

$$\tilde{\varphi}(x) = q(x) + \int_0^x \Phi(t)\, q(x-t)\, dt, \tag{29}$$

где

$$q(x) = \sigma\left[\frac{1}{(S^0(x))^p} + \int_0^\infty \Phi(t)\,\frac{dt}{(S^0(x+t))^p}\right].$$

(В последних равенствах через Φ обозначена функция $\frac{1}{2r}(S^0(x))' \geqslant 0$. Ее существование следует из результатов [3 — 5].)

Для функции q с учетом $2r \leqslant S^0(x) \uparrow$ по x получаем оценку

$$q(x) \leqslant \sigma\left(1 + \int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{(S^0(t))^p}\, dt\right) = \sigma C_r,$$

где

$$C_r = 1 + \frac{1}{(2r)^p\,(p-1)}. \tag{30}$$

Выбор σ произволен. Выберем ее так, чтобы $q(x) \leqslant \sigma C_r = r$. Из равенства (29) получаем следующую оценку для $\tilde{\varphi}$ и, следовательно, для функции φ:

$$\varphi(x) \leqslant \tilde{\varphi}(x) \leqslant r\left(1 + \int_0^x \Phi(t)\, dt\right) = \frac{1}{2} S^0(x).$$

Поэтому для решения B^0 уравнения (6) и вместе с ним (с учетом (26) и условия $0 \leqslant \lambda(x) \leqslant 1$, $x \in \mathbb{R}^1_+$) для решения B уравнения (7) получаем оценку снизу

$$B(x) \geqslant B^0(x) = S^0(x) - \varphi(x) \geqslant \frac{1}{2} S^0(x) \geqslant r, \quad x \in \mathbb{R}^1_+. \tag{31}$$

2° Докажем, что если λ имеет представление (27), то имеют место следующие равносильные неравенства:

$$\gamma(B(x)) \leqslant (1-\lambda(x))\, B(x) \ \text{ или } \ \Psi(B(x)) \geqslant \lambda(x)\, B(x) \tag{32}$$

(Здесь γ и Ψ определены из (12), а B — решение уравнения (7).)

Действительно, учитывая (12), (31) и монотонность функции γ, имеем

$$\frac{\gamma(B(x))}{B(x)} \leqslant \frac{\gamma\left(\frac{1}{2} S^0(x)\right)}{\frac{1}{2} S^0(x)} \leqslant \frac{8\rho}{(S^0(x))^{p+1}} \leqslant \frac{\sigma}{(S^0(x))^{p+1}} = 1 - \lambda(x),$$

если только

$$\rho \leqslant \frac{1}{8}\sigma = \frac{1}{8}\frac{r}{C_r}. \tag{33}$$

Как было отмечено во введении, значение ρ априори известно, а σ и, следовательно, r выбираются так, чтобы выполнилось неравенство (33) Заметим, что $r/C_r \to \infty$ при $r \to \infty$. Так что при произвольном ρ неравенство (33) выполняется, если r — достаточно большое число

Таким образом, при подходящем выборе значения r выполняются неравенства (32).

Отметим, что во всех рассуждениях п. 2 и в самом условии (12) под r понимаются те значения этого параметра, которые удовлетворяют условию (33).

3°. Теперь докажем сходимость итераций

$$G_{n+1}(x)=\int_0^\infty K(x-t)\Psi(G_n(t))\,dt,\quad G_0(x)\equiv S^0(x),\quad n=0,1,\ldots, \tag{34}$$

где S^0 — решение уравнения (4), причем $S^0(0)=2r$.

По индукции докажем, что $G_n(x)\geqslant B(x)$, $x\in\mathbb{R}^1_+$ для $n\in\mathbb{N}$.

С учетом (32), $\Psi(x)\uparrow$ по x на $[r,\infty)$ и неравенства $S^0(x)\geqslant B(x)$ имеем

$$G_{n+1}(x)=\int_0^\infty K(x-t)\Psi(G_n(t))\,dt\geqslant\int_0^\infty K(x-t)\Psi(B(t))\,dt\geqslant$$
$$\geqslant\int_0^\infty \lambda(t)K(x-t)B(t)\,dt=B(x).$$

Из доказанного с учетом (31) следует также неравенство $G_n(x)\geqslant r$ при $x\in\mathbb{R}^1_+$ и для $n\in\mathbb{N}$.

Индукцией по n можно также доказать, что итерации $\{G_n\}_{n=0}^\infty$ монотонно убывают по n на $\mathbb{R}^1_+$.

Действительно, с учетом (12) для $n=1$ и $x\in\mathbb{R}^1_+$ имеем

$$G_1(x)=\int_0^\infty K(x-t)\Psi(S^0(t))\,dt=S^0(x)-\int_0^\infty K(x-t)\gamma(S^0(t))\,dt\leqslant S^0(x),$$

т. е. $G_1(x)-G_0(x)\leqslant 0$ на $\mathbb{R}^1_+$.

При $n\geqslant 1$ с учетом монотонности функции Ψ получаем

$$G_{n+1}(x)-G_n(x)=\int_0^\infty K(x-t)[\Psi(G_n(t))-\Psi(G_{n-1}(t))]\,dt\leqslant 0,$$

если только $G_n(x)-G_{n-1}(x)\leqslant 0$.

Таким образом, на $\mathbb{R}^1_+$ имеем

$$G(x)\downarrow\ \text{по } n \text{ и } G_n(x)\geqslant B(x)\ \text{для } n\in\mathbb{N}, \tag{35}$$

откуда следует существование $G(x)=\lim\limits_{n\to\infty}G_n(x)$.

С учетом (31), (3) и соотношения $G_0(x)\equiv S^0(x)$, $x\in\mathbb{R}^1_+$, получаем следующие оценки для предельной функции G:

$$\frac{1}{2}S^0(x)\leqslant G(x)\leqslant S^0(x),\quad x\in\mathbb{R}^1_+,\ \text{т. е. } G(x)=O(S^0(x)),\quad x\to\infty.$$

Покажем, что предельная функция G удовлетворяет уравнению (11).

С учетом монотонности последовательности $\{G_n\}_{n=0}^\infty$ по n из (34) получаем

$$G_{n+1}(x)\geqslant\int_0^\infty K(x-t)\Psi(G(t))\,dt,$$

откуда в пределе при $n\to\infty$ находим

$$G(x)\geqslant\int_0^\infty K(x-t)\Psi(G(t))\,dt. \tag{36}$$

Для фиксированного значения x с учетом непрерывности функции Ψ на $[r,\infty)$ имеем

$$K(x-t)\Psi(G_n(t))\downarrow K(x-t)\Psi(G(t)),\quad t\in[0,\infty),\quad n\to\infty,$$

причем

$$\int_0^\infty K(x-t)\Psi(G(t))\,dt\leqslant\int_0^\infty K(x-t)\Psi(G_n(t))\,dt<+\infty.$$

Из теоремы Б. Леви [12] следует

$$\int_0^\infty K(x-t)\Psi(G_n(t))\,dt \to \int_0^\infty K(x-t)\Psi(G(t))\,dt \text{ при } n\to\infty. \qquad (37)$$

Из соотношений (34) имеем

$$G(x) \leqslant \int_0^\infty K(x-t)\Psi(G_n(t))\,dt,$$

откуда с учетом (36) получаем неравенство

$$G(x) \leqslant \int_0^\infty K(x-t)\Psi(G(t))\,dt. \qquad (38)$$

Из (35) и (37) следует равенство (11) для предельной функции G.

Нами получена следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть в уравнении* (11) *ядро* K *симметрично и удовлетворяет условию* (5), *а функция* $\Psi : \Psi(x) = x - \gamma(x)$ *обладает свойствами* (12). *Тогда уравнение* (24) *обладает положительным решением* G, *причем*

$$G(x) = O(x) \quad x\to\infty.$$

Замечание. Аналогичные утверждения можно доказать для векторных уравнений типа (11) с консервативным симметричным ядром K (т. е. когда матрица-функция $K(x) = (K_{ij}(x))_{i,j=1}^m$ удовлетворяет условиям

$$0 \leqslant K_{ij} \in L_1(-\infty, \infty), \quad A \overset{\text{def}}{=} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x)\,dx\Big)_{i,j=1}^m \in k_p, \quad r(A) = 1)$$

в случае, когда вектор-функция Ψ обладает свойствами, аналогичными (12). (Здесь k_p — класс примитивных матриц, а $r(A)$ — спектральный радиус матрицы A [13]).

1. *Wiener N., Hopf E.* Über eine Klasse singulärer Integraleichungen. Sitzung.— Berlin: Akad. Wiss., 1931.— P. 696—706.
2. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве.— М. : Наука, 1967.— 448 с.
3. *Енгибарян Н. Б., Арутюнян А. А.* Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения // Мат. сб.— 1975.— 139, № 5.— С. 35—58.
4. *Енгибарян Н. Б., Арабаджян Л. Г.* О нелинейных уравнениях факторизации операторов Винера—Хопфа.— Ереван, 1979.— 27 с.— (Препринт / Ереван. ун-т; № 01).
5. *Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б.* Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ / ВИНИТИ.— 1984.— 22.— С. 175—244.
6. *Арабаджян Л. Г.* О консервативном уравнении Винера—Хопфа // Изв. АН АрмССР. Математика.— 1981.— 16, № 1.— С. 65—80.
7. *Енгибарян Н. Б.* Факторизация матриц-функций и нелинейные интегральные уравнения // Там же.— 15, № 3.— С. 233—244.
8. *Енгибарян Н. Б., Арабаджян Л. Г.* Системы интегральных уравнений Винера—Хопфа и нелинейные уравнения факторизации // Мат. сб.— 1984.— 124, № 6.— С. 189—216.
9. *Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б.* О факторизации кратных интегральных операторов Винера—Хопфа // Докл. АН СССР.— 1986.— 291, № 1.— С. 11—14.
10. *Арабаджян Л. Г.* Об одном интегральном уравнении теории переноса в неоднородной среде // Дифференц. уравнения.— 1987.— 23, № 9.— С. 1618—1622.
11. *Хачатрян М. А.* О проблеме Милна в неоднородной среде // Дифференциальные и интегральные уравнения.— Ереван, 1979.— С. 67—81.
12. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М. : Наука, 1981.— 594 с.
13. *Ланкастер П.* Теория матриц.— М. : Наука, 1978.— 256 с.

Ин-т прикл. пробл. физики АН АрмССР,
Ереван

Получено 19.10.87