УДК 517.524

Д. И. Боднар

Признаки сходимости типа Прингсгейма для ветвящихся цепных дробей

К числу самых известных и наиболее часто используемых признаков сходимости непрерывных дробей относится теорема Прингсгейма [1, 2]. Ее существенная часть была установлена И. В. Слешинским [3]. Тице (см. [2]) усилил указанный признак сходимости в предположении, что элементами непрерывной дроби являются действительные числа. Многомерные обобщения рассматриваемой теоремы изложены в работах [4—7]. В настоящей статье будут установлены различные аналоги признаков сходимости Тице и Прингсгейма для ветвящихся цепных дробей (ВЦД).

Пусть $\mathcal{J} = \mathcal{J}(N)$ обозначает множество мультииндексов $i(k)=i_1 i_2 \ldots i_k$, где $k = 1, 2, \ldots, i_r = \overline{1, N}$, $r = \overline{1, k}$, $N \in \mathbb{N}$ фиксировано. Произвольную ВЦД

$$\alpha = b_0 + \operatorname*{D}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \tag{1}$$

с действительными элементами такими, что все $a_{i(k)} \neq 0$, $i(k) \in \mathcal{J}$, с помощью эквивалентных преобразований и переобозначений всегда можно привести к виду

$$b_0 + \operatorname*{D}_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i_k=1}^{n_{i(k-1)}} \frac{a^*_{i(k)}}{b^*_{i(k)}} + \sum_{i_k=n_{i(k-1)}+1}^{N} \frac{a^*_{i(k)}}{b^*_{i(k)}} \right), \tag{2}$$

где $n_{i(k)} \in [0, N]$ — целые числа, $a^*_{i(k)} < 0$, если $i_k \leqslant n_{i(k-1)}$, и $a^*_{i(k)} > 0$, если $i_k > n_{i(k-1)}$; для каждого $i(k) \in \mathcal{J}$ существует $j(k) \in \mathcal{J}$, что $a^*_{i(k)} = a_{j(k)}$, $b^*_{i(k)} = |b_{j(k)}|$, причем сумма, у которой верхний индекс меньше нижнего, считается равной нулю. Не ограничивая общности, предположим, что (1) уже приведена к виду (2). Обозначим $i_0 = 0$, $a'_{i(k)} = |a_{i(k)}|$. Пусть для всех допустимых наборов мультииндексов выполняются неравенства

$$\gamma_{i(k)} = b_{i(k)} - n_{i(k-1)} \varepsilon_{i(k)} a'_{i(k)} - \delta_{i(k)} \geqslant 0, \quad i(k) \in \mathcal{J}, \tag{3}$$

где

$$\delta_{i(k)} = \begin{cases} 1, & \text{если } n_{i(k)} > 0, \\ 0, & \text{если } n_{i(k)} = 0, \end{cases} \qquad \varepsilon_{i(k)} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_{i(k)} < 0, \\ 0, & \text{если } a_{i(k)} > 0. \end{cases}$$

Каждое звено ВЦД (1) $b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{a_{i(k+1)}}{b_{i(k+1)}}$, где $k = 0$ или $a_{i(k)} > 0$, заменим равным ему выражением

$$\alpha_{i(k)} = b_{i(k)} - \delta_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{n_{i(k)}} \frac{1/n_{i(k)}}{1 + \dfrac{n_{i(k)} a'_{i(k+1)}}{b_{i(k+1)} - n_{i(k)} a'_{i(k+1)}}} + \sum_{i_{k+1}=n_{i(k)}+1}^{N} \frac{a'_{i(k+1)}}{b_{i(k+1)}}.$$

Аналогичную процедуру проделаем и с каждым новообразованным звеном

$$b_{i(k+1)}-n_{i(k)}a'_{i(k+1)}+\sum_{i_{k+2}=1}^{N}\frac{a_{i(k+2)}}{b_{i(k+2)}}.$$

При этом (1) преобразуется в ВЦД с неотрицательными элементами, которую обозначим $\alpha_{\text{пр}}$. В одномерном случае $\alpha_{\text{пр}}$ является растяжением дроби α. При $N>1$ в последовательностях аппроксимант ВЦД α и $\alpha_{\text{пр}}$ нет, вообще говоря, совпадающих элементов, а $\alpha_{\text{пр}}$ является растяжением α только тогда, когда все $a_{i(k)}<0$, $i(k)\in\mathcal{J}$. Чтобы избежать неопределенностей 0/0 в процессе вычисления аппроксимант $\alpha_{\text{пр}}$ достаточно потребовать выполнения строгого неравенства в (3) для тех наборов мультииндексов $i(k)$, для которых $a_{i(k)}>0$.

Лемма 1. *Пусть*

$$F_m=d_0+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{m}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{c_{i(k)}}{d_{i(k)}},\quad \hat F_m=d_0+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{m}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{c_{i(k)}}{\hat d_{i(k)}}$$

— две ВЦД с действительными неотрицательными элементами, причем первая принимает конечное значение и при некотором r и всех допустимых наборах индексов $\hat d_{i(r)}\geqslant d_{i(r)}$, а также $\hat d_{i(k)}=d_{i(k)}$ во всех остальных случаях.

Тогда значение второй дроби конечно и $(-1)^r(\hat F_m-F_m)\geqslant 0$.

Теорема 1. *Пусть элементами ВЦД (1) являются действительные числа, удовлетворяющие условиям: $a_{i(k)}\neq 0$, $i(k)\in\mathcal{J}$, справедливы неравенства (3). Если преобразованная ВЦД $\alpha_{\text{пр}}$, построенная согласно описанному выше алгоритму, сходится, то дробь α сходится и к тому же пределу.*

Доказательство теоремы. Обозначим через f_k и g_k k-е подходящие дроби α и $\alpha_{\text{пр}}$ соответственно. Рассмотрим фигурную подходящую дробь $\tilde g_k$ преобразованной ВЦД, содержащую только те звенья $\alpha_{\text{пр}}$, размер мультииндексов элементов которых не больше k. Методом математической индукции легко доказать, что $\tilde g_k=f_k$. Из определения сходимости $\alpha_{\text{пр}}$ следует, что начиная с некоторого номера k_0 значения всех g_k конечны. Пусть m_k — минимальная длина веток в $\tilde g_k$, $s=\left[\frac{m_k-1}{2}\right]$ и $k>k_0$. Очевидно $m_k\geqslant k$. Дробь $\tilde g_k$, $k>k_0$, можно записать в виде g_{2s+1}, если вместо частных знаменателей последних тупиковых звеньев $d_{i(2s+1)}$ в g_{2s+1} взять некоторые числа $\hat d_{i(2s+1)}\geqslant d_{i(2s+1)}$ или ∞. Используя лемму, справедливую, как легко заметить, и в случае, когда некоторые $\hat d_{i(r)}=\infty$, если $r=m$ нечетное и F_{m-1} конечно, заключаем, что $\tilde g_k\leqslant g_{2s+1}$. На основании свойства вилки имеем $\tilde g_k\geqslant g_{2s}$. Из этих неравенств следует утверждение теоремы.

Используя признаки сходимости ВЦД с неотрицательными элементами [7] и теорему 1, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть для ВЦД (1), элементами которой являются действительные числа, выполняются условия: все $a_{i(k)}\neq 0$, $i(k)\in\mathcal{J}$, справедливы неравенства (3), причем $\gamma_{i(k)}>0$, $n_{i(k-1)}<i_k\leqslant N$.*

Тогда ВЦД (1) сходится, если расходится ряд $\sum_{k=2}^{\infty}z_k=\infty$, где

$$z_k=\min(\xi_{k-1},\eta_{k-1},\zeta_k),$$

$$\xi_k=\min\left(\frac{\gamma_{i(m)}}{n_{i(m-1)}a'_{i(m)}}:i(m)\in\mathcal{J}_{m,n}^{2m-k-1},\ m=\overline{\left[\frac{k}{2}\right]+1,\,k}\right),$$

$$\eta_k = \min\left(\gamma_{i(m)} n_{i(m)} : i(m) \in \mathcal{J}_m^{2m-k},\ m = \overline{\left[\frac{k+1}{2}\right],\ k}\right),$$

$$\zeta_k = \min\left(\frac{\gamma_{i(m-1)}\gamma_{i(m)}}{a'_{i(m)}} : i(m) \in \mathcal{J}_{m,N}^{2m-k},\ m = \overline{\left[\frac{k}{2}\right]+1, k}\right)$$

и $\mathcal{J}_m^r$ обозначает множество всех мультииндексов $i(m)$, r индексов которых удовлетворяют неравенствам $n_{i(s-1)} < i_s \leqslant N$, остальные $m-r$ индексов — неравенствам $1 \leqslant i_s \leqslant n_{i(s-1)}$, $\mathcal{J}_{m,N}^r$ — подмножество $\mathcal{J}_m^r$, у которого заранее известно, что последний индекс i_m удовлетворяет неравенству $n_{i(m-1)} < i_m \leqslant N$, а $\mathcal{J}_{m,n}^r = \mathcal{J}_m^r \setminus \mathcal{J}_{m,N}^r$, причем каждое из указанных множеств индексов является пустым, если хотя бы одно из характеризующих его неравенств противоречиво.

Аналогичным образом устанавливается сходимость ВЦД (1) при выполнении условий

$$\Gamma_{i(k)} = b_{i(k)} - \varepsilon_{i(k)} a'_{i(k)} - n_{i(k)} \geqslant 0, \quad i(k) \in \mathcal{J}, \tag{4}$$

где параметры имеют тот же смысл, что и в неравенствах (3). Здесь необходимо применить алгоритм, предложенный в [8], только начиная с первого этажа ВЦД (1).

Методом математической индукции легко доказывается следующая лемма.

Лемма 2. *Справедливы многомерные аналоги формулы Эйлера тождественного преобразования ряда в непрерывную дробь*

$$N\left(N + \underset{k=1}{\overset{n}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-a_{i(k)}}{a_{i(k)}+N}\right)^{-1} = \left[1 + \frac{a_{i(1)}}{N}\left[1 + \frac{a_{i(2)}}{N} \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left[1 + \ldots + \frac{a_{i(n-1)}}{N}\left[1 + \frac{a_{i(n)}}{N}\right]\ldots\right]\right.\right], \tag{5}$$

$$\left(1 + \underset{k=1}{\overset{n}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-a_{i(k)}}{Na_{i(k)}+1}\right)^{-1} = [1 + Na_{i(1)}[1 + Na_{i(2)}[1 + \ldots + Na_{i(n-1)} \times$$

$$\times [1 + Na_{i(n)}]\ldots], \tag{6}$$

где $n = 1, 2, \ldots,$ $a_{i(k)} \in \mathbb{C}$, $i(k) \in \mathcal{J}$, и каждое выражение в квадратных скобках обозначает среднее гармоническое, т. е.

$$[c_{i(k)}] = N\left(\sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{c_{i(k)}}\right)^{-1}. \tag{7}$$

Теорема 3. *Пусть элементами ВЦД (1) являются вещественные числа, удовлетворяющие условиям: все $a_{i(k)} \neq 0$, $i(k) \in \mathcal{J}$, справедливы неравенства (3), причем $\gamma_{i(k)} > 0$ для каждого значения мультииндекса $i(k)$, для которого $a_{i(k)} > 0$.*

Тогда, если ВЦД (1) сходится, то для ее значения z справедливы оценки: $z > b_0$ в предположении, что $a_{i(1)} > 0$, $i_1 = \overline{1, N}$, или $z \geqslant b_0 - 1$ в случае существования i_1, $1 \leqslant i_1 \leqslant N$, такого, что $a_{i(1)} < 0$. Причем $z = b_0 - 1$ тогда и только тогда, когда все $a_{i(k)} < 0$, $i(k) \in \mathcal{J}$, $b_{i(k)} = Na'_{i(k)} + 1$ и

$$\lim_{k\to\infty} [1 + Na'_{i(1)}[1 + Na'_{i(2)}[1 + \ldots + Na'_{i(k-1)}[1 + Na'_{i(k)}]\ldots] = \infty, \tag{8}$$

где каждое выражение в квадратных скобках обозначает среднее гармоническое (7).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сохраняя обозначения, предложенные при доказательстве теоремы 1, и учитывая приведенные в конце этой теоремы оценки, имеем $g_1 \geqslant f_n \geqslant g_0$, $n = 1, 2, \ldots$. Таким образом, $z \geqslant b_0$, если $\alpha_{i(1)} > 0$, $i_1 = \overline{1, N}$, и $z \geqslant b_0 - 1$, если существует такое i_1, что $a_{i(1)} < 0$. Исследуем возможность равенства $z = b_0$ в первом случае. Для этого введем обозначения $Q_{i(p)}^{(m)} = b_{i(p)} + \underset{k=p+1}{\overset{m}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}$, $i(p) \in \mathcal{J}$, $p < m$. Тогда из условия $z - b_0 = \lim_{m\to\infty} \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a'_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(m)}} = 0$ с учетом того, что все $Q_{i(1)}^{(m)} \geqslant 0$, заключаем, что для каждого i_1, $i_1 = \overline{1, N}$, $\lim_{m\to\infty} Q_{i(1)}^{(m)} = +\infty$. Последнее возможно лишь тогда, когда существует индекс i_2 такой, что $a_{i(2)} > 0$ и $\lim_{m\to\infty} Q_{i(2)}^{(m)} = 0$. Так как $Q_{i(2)}^{(m)} \geqslant b_{i(2)} - \delta_{i(2)}$, то необходимо $\gamma_{i(2)} = b_{i(2)} - \delta_{i(2)} = 0$, что противоречит условиям теоремы. Исследуем возможность равенства во втором случае. Имеем $A_m - B_m = 1 + \varepsilon_m$, где $A_m = \sum_{i_1=1}^{n_0} \frac{a'_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(m)}}$, $B_m = \sum_{i_1=n_0+1}^{N} \frac{a'_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(m)}}$, $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$. Если $n_0 < N$, то для $m \geqslant 2$ существует константа $K > 0$, не зависящая от m, такая, что $B_m \geqslant K$. Следовательно, $A_m \geqslant 1 + K + \varepsilon_m$. С другой стороны, $A_m \leqslant 1$, так как $Q_{i(1)}^{(m)} \geqslant b_{i(1)} \geqslant n_0 a'_{i(1)}$, $i_1 = \overline{1, n_0}$. Полученные оценки для A_m при достаточно большом m противоречивы. Поэтому $n_0 = N$. В этом случае $Q_{i(1)}^{(m)} \geqslant N a'_{i(1)}$, $i_1 = \overline{1, N}$, и равенство $\lim_{m\to\infty} \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a'_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(m)}} = 1$ возможно только тогда, когда для каждого i_1, $i_1 = \overline{1, N}$, $\beta_{i(1)} = \lim_{m\to\infty} \left(b_{i(1)} - N a'_{i(1)} + \sum_{i_2=1}^{N} \frac{a_{i(2)}}{Q_{i(2)}^{(m)}} \right) = 0$. Если все $a_{i(2)} > 0$, $i_2 = \overline{1, N}$, то $\beta_{i(1)} > b_{i(1)} - N a'_{i(1)} \geqslant 0$, что невозможно. Поэтому для каждого i_1, $i_1 = \overline{1, N}$, существует i_2, $1 \leqslant i_2 \leqslant N$, такое, что $a_{i(2)} < 0$. Тогда с учетом неравенств (3) и оценки $0 = \beta_{i(1)} \geqslant b_{i(1)} - N a'_{i(1)} - 1$ имеем, что для каждого i_1, $i_1 = \overline{1, N}$, $b_{i(1)} = N a'_{i(1)} + 1$ и $\lim_{m\to\infty} \sum_{i_2=1}^{N} \frac{a_{i(2)}}{Q_{i(2)}^{(m)}} = -1$. Повторяя аналогичные соображения, приходим к ВЦД $\underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{-a'_{i(k)}}{N a'_{i(k)} + 1}$. В силу (6) она принимает значение -1 тогда и только тогда, когда выполняются условия (8).

С учетом (5) можно доказать аналогичную теорему в предположении, что для ВЦД (1) выполняются неравенства (4).

Т е о р е м а 4. *Пусть члены звеньев ВЦД*

$$\underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} \tag{9}$$

— комплексные числа, удовлетворяющие условиям

$$|b_{i(k)}| \geqslant N |a_{i(k)}| + 1, \quad i(k) \in \mathcal{J}. \tag{10}$$

Тогда ВЦД (9) сходится и ее значение z принадлежит области $|z| \leqslant 1$, причем $|z| = 1$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (8), где, как и раньше, $a'_{i(k)} = |a_{i(k)}|$; существует φ, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, такое, что для произвольного i_1, $i_1 = \overline{1, N}$, $a_{i(1)} b_{i(1)}^{-1} |a_{i(1)}|^{-1} |b_{i(1)}| = \exp(i\varphi)$; $|b_{i(k)}| = N |a_{i(k)}| + 1$, $i(k) \in \mathcal{J}$, и $a_{i(k+1)} b_{i(k)}^{-1} b_{i(k+1)}^{-1} < 0$, $k \geqslant 1$, $i(k) \in \mathcal{J}$. При выполнении этих условий имеем $z = \exp(i\varphi)$.

Доказательство. Сходимость ВЦД (9) и ее область значений рассмотрены в [7]. Исследуем возможность равенства $|z| = 1$. Введем обозначения

$$Q_{i(r)} = \beta_{i(r)} + \underset{k=r+1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{\beta_{i(k-1)} \beta_{i(k)} b_{i(k-1)}^{-1} b_{i(k)}^{-1} a_{i(k)}}{\beta_{i(k)}}, \quad i(k) \in \mathcal{J},$$

где $\beta_{i(r)} = |b_{i(r)}|$, $b_{i(0)} = 1$. Имеем

$$\left| \sum_{i_1=1}^{N} \frac{\beta_{i(1)} b_{i(1)}^{-1} a_{i(1)}}{Q_{i(1)}} \right| = 1. \tag{11}$$

Так как $|Q_{i(1)} - \beta_{i(1)}| \leqslant 1$, то $|Q_{i(1)}| \geqslant \beta_{i(1)} - 1 \geqslant N |a_{i(1)}|$ и поэтому равенство (11) имеет место только тогда, когда $Q_{i(1)} = N |a_{i(1)}|$ и $a_{i(1)} b_{i(1)}^{-1} \times |a_{i(1)}|^{-1} |b_{i(1)}| = \exp(i\varphi)$, $i_1 = \overline{1, N}$. Так как $\beta_{i(1)} - Q_{i(1)} = \beta_{i(1)} - N |a_{i(1)}| = -\sum_{i_2=1}^{N} \frac{\beta_{i(1)} \beta_{i(2)} b_{i(1)}^{-1} b_{i(2)}^{-1} a_{i(2)}}{Q_{i(2)}} \leqslant 1$, то с учетом (10) $|b_{i(1)}| = N |a_{i(1)}| + 1$ и $\sum_{i_2=1}^{N} \frac{\beta_{i(1)} \beta_{i(2)} b_{i(1)}^{-1} b_{i(2)}^{-1} a_{i(2)}}{Q_{i(2)}} = -1$. Это возможно только тогда, когда для всех допустимых наборов индексов $Q_{i(2)} = N |a_{i(2)}|$ и $b_{i(1)}^{-1} b_{i(2)}^{-1} a_{i(2)} < 0$ и т. д. Учитывая (6), легко завершаем доказательство теоремы.

1. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения.— М.: Мир, 1985.— 414 с.
2. *Perron O.* Die Lehre von Kettenbruchen.— Stuttgart: Teubner, 1957.— Bd 2.— 524 s.
3. *Слешинский И. В.* О сходимости непрерывных дробей // Зап. мат. отд-ния о-ва естество-испытателей.— 1889.— **10**.— С. 201—255.
4. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике.— М. : Наука, 1983.— 312 с.
5. *Недашковский Н. А.* О сходимости и вычислительной устойчивости ветвящихся цепных дробей некоторых типов // Мат. методы и физ.-мех. поля.— 1984.— Вып. 20.— С. 27—31.
6. *Кучминская Х. И.* О достаточных условиях сходимости двумерных цепных дробей // Там же.— С. 19—23.
7. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби.— Киев: Наук. думка, 1986.— 176 с.
8. *Боднарчук П. И.* Некоторые преобразования ветвящихся цепных дробей // Мат. методы и физ.-мех. поля.— 1975.— Вып. 2.— С. 153—155.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики
АН УССР, Львов

Получено 18.03.88