УДК 532.516

В. М. Солопенко

Теорема устойчивости плоского течения Куэтта

1. Постановка задачи и общие свойства. Цель настоящей работы заключается в оценке спектра следующей задачи на собственные значения:

$$L(\alpha, \omega)\, u \equiv (D^2 - \alpha^2)(D^2 + i\omega^3 (y - c))\, u = 0, \quad u \in H^4(0, 1), \tag{1}$$

$\omega = (\alpha R)^{1/3}$, $c = c_r + i(c_i - \alpha/R)$ — спектральный параметр, фазовая скорость c_r меняется в пределах (0,1), $H^4 = \{u \mid u \in W_2^4 \cap \overset{\circ}{W}{}_2^2\}$.

Данная задача является сопряженной к задаче Орра — Зоммерфельда для плоского течения Куэтта, хорошо известной в теории гидродинамической устойчивости. Среди множества работ, посвященных этой теме, следует отметить работы [1, 2]. В первой из них была установлена асимптотическая устойчивость по числу Рейнольдса R, а во второй — показана линейная устойчивость течения для всех положительных α (волновое число) и R с помощью численной процедуры оценки логарифмической производной функции Эйри. Формальное доказательство до настоящего времени получено не было. Развиваемые ниже методы могут быть полезны для уравнений с точкой поворота и с факторизуемым оператором.

Устойчивость течения Куэтта относительно малых возмущений означает отсутствие точек спектра задачи (1) в нижней полуплоскости, т. е. отсутствие нетривиальных решений (1) при $c_i \leqslant 0$, α, $R \geqslant 0$; будет рассмотрен также предельный случай $\omega = \mathrm{const}$, $\alpha = 0$.

Поскольку коэффициенты дифференциального оператора (1) аналитичны, а граничные условия регулярны, и общей теории вытекают следующие свойства [3]: спектр задачи (1) является точечным, конечной кратности, без точек сгущения кроме бесконечности, а при $n \to \infty$ $|c_n| \to \infty$. Кроме того, для достаточно больших n $\operatorname{Re} c_n > 0$. Последнее свойство легко устанавливается с помощью энергетических оценок [4].

Для описания аналитической зависимости спектра от параметров представим оператор (1) в виде

$$L \equiv T(\beta) - \lambda l, \quad T(\beta) = T_0 + \beta V, \quad \beta = i\omega^3, \quad \lambda = i\omega^3 c;$$

$$T_0 = (D^2 - \alpha^2) D^2, \quad V = (D^2 - \alpha^2)\, y, \quad l = (D^2 - \alpha^2),$$

и обозначим через $\sigma(T(\beta))$ его спектр. Из результатов гл. XII [5] вытекает следующая лемма.

Лемма 1. *Семейство операторов $T(\beta)$ аналитично в смысле Като. В частности, если λ_0 — невырожденное собственное значение из $\sigma(T(\beta))$ кратности $m \geqslant 1$, то для достаточно малых $|\beta - \beta_0|$ существуют m собственных значений $\lambda_i(\beta) \in \sigma(T(\beta))$, $i = \overline{1, m}$, причем функции $\lambda_i(\beta)$ суть ветви одной или нескольких аналитических функций.*

Доказательство. Положим $\beta_0 = 0$. К общему случаю приводит преобразование $T_0 + \beta V = (T_0 + \beta_0 V) + (\beta - \beta_0) V$. Пусть $\lambda \notin \sigma(T_0)$. Тогда очевидно операторы в $L_2 (T_0 - \lambda V)^{-1}$ и $V (T_0 - \lambda I)^{-1}$ ограничены и компактны, а для достаточно малых β оператор $[1 + \beta V (T_0 - \lambda I)^{-1}]^{-1}$ существует и аналитичен по β. Тогда $(T_0 - \lambda I)^{-1} [1 + \beta V (T_0 - \lambda I)^{-1}]^{-1} = (T_0 + \beta V - \lambda I)^{-1}$ и последний оператор аналитичен по β, $\lambda \notin \sigma (T(\beta))$. Это означает аналитичность в смысле Като и, следовательно, справедливость утверждений леммы.

2. Оценка области резольвентности. Введем множество собственных элементов задачи

$$(D^2 - \alpha^2)^2 u_n = -\lambda_n^2 (D^2 - \alpha^2) u_n, \quad u_n \in H^4, \quad n = \overline{1, \infty}. \tag{2}$$

Лемма 2. *Система собственных элементов $\{u_n\}$ задачи (2) полна в $\overset{0}{W}{}_2^2$, ортогональна в смысле скалярного произведения $((-D^2 + \alpha^2) u, v)$ и полна в подпространстве $\tilde{H}^4 \subset H^4$ функций, удовлетворяющих условию $((D^2 - \alpha^2)^2 u, e^{\pm \alpha y})_{L_2} = 0$.*

Первая часть леммы 2 в абстрактной форме доказана в §1.2 работы [6]. Отметим, что система $\{u_n\}$ не является полной в H^4.

Учитывая, что любая собственная функция задачи (1) принадлежит $\tilde{H}^4$, можно разложить решение уравнения (1) в $\tilde{H}^4$ по базису (2). Образуя квадратичную форму из уравнения (1) с помощью скалярного произведения в L_2, применяя неравенства Гельдера и Юнга, можно установить справедливость следующей леммы.

Лемма 3. *При значении параметров в угле K $(\alpha \geqslant 0,\ R \geqslant 0)$*

$$K_0 (\alpha R < 60 \sqrt{42}) \cup (\alpha^2/R > \sqrt{2}/8) \cup (\alpha/R > (1920 \sqrt{42})^{-1/3}) \tag{3}$$

область $c_i \leqslant 0$ является областью резольвентности оператора (1).

Отметим, что применение энергетических методов [4] позволило получить в статье [2] оценки, которые в принятых нами обозначениях имеют вид $\alpha R < 9\pi^3/4$, $\alpha^2/R > \sqrt{2}/2$.

Таким образом, для устойчивости течения Куэтта достаточно установить отсутствие при $c_i \leqslant 0$ решений задачи (1) в области значений параметров $(\alpha, R) \in \Omega = K \setminus K_0$.

3. Асимптотика функций Бесселя. Следующие две функции являются частными решениями уравнения (1) (в данном пункте будем пользоваться обозначениями и представлениями работы [7]):

$$Z_{1,2}(y) = \sqrt{s}\, H_{1/3}^{(1,2)} (ps^{3/2}), \quad s = \omega (y - c), \quad p = 2/3 e^{-i3\pi/4}, \tag{4}$$

$$Z'_{1/2}(y) = \omega e^{-i3\pi/4} s H_{-2/3}^{(1,2)} (ps^{3/2}),$$

которые будем рассматривать в области значений параметров $c = c_r - i0$, $c_r \in (0, 1)$, $(\alpha, R) \in \Omega$, в частности, как следует из (3), $\omega \geqslant \omega_0 > 7{,}29$. Введя обозначение $k = \omega c_r$, заметим, что аргумент функций Бесселя при изменении y от 1 до 0 меняется вдоль лучей $\arg z = \pm 3\pi/4$ от точки $r_1 = 2/3 e^{-i3\pi/4} (\omega - k)^{3/2}$ до $r_0 = 2/3 e^{i3\pi/4} k^{3/2}$, обходя нуль справа. Таким образом, область изменения переменных является канонической для обеих функций $H_{1/3}^{(1,2)}$ (гл. 7, § 13 [7]).

Замечание. В верхней полуплоскости ($c_i > 0$), где действительно расположен спектр, такое представление невозможно,— явление Стокса обеспечивает дополнительные члены, описывающие спектр.

Вычисления $H_\nu^{(2)} (r_0)$ проводятся после применения формул перехода [7], например

$$H_{1/3}^{(2)} (r_0) = e^{i\pi/3} H_{1/3}^{(1)} (r'_0) + H_{1/3}^{(2)} (r'_0), \quad r'_0 = r_0 e^{-i\pi}, \tag{5}$$

переводящих аргумент в правую полуплоскость. Как показано в работе [7], справедливо представление

$$H_\nu^{(1,2)} (z) = \sqrt{2/\pi z} \exp [\pm zi \mp i (1 + 2\nu) \pi/4] [1 + \eta_\nu^{(1,2)} (z)], \tag{6}$$

причем остаточный член удовлетворяет интегральному уравнению

$$\eta_\nu^{(1)}(z) = \lambda_\nu I_0 + \lambda_\nu \int_z^{i\infty} [1 - e^{2i(t-z)}] t^{-2} \eta_\nu^{(1)}(t)\, dt, \tag{7}$$

$$I_0(z) = 2 \int_0^\infty \frac{e^{-2\tau} d\tau}{z + i\tau}, \ \lambda_\nu = (1/4 - \nu^2)/2i,$$

где путь интегрирования $l_0 = \{z, i\infty\}$ лежит в правой полуплоскости. Аналогичные формулы справедливы для $H_\nu^{(2)}(z)$, $\arg z \in (-\pi, \pi/2)$.

Лемма 4. *Для функций Z_2, Z_2' (4) в области Ω справедливы следующие оценки:*

$$Z_2'(0)/\omega Z_2(0) = e^{-i3\pi/4} \sqrt{k}\left[1 + \frac{i}{6} I_0(r_0') + \varepsilon_1\right], \ |\varepsilon_1| < 0{,}16, \ k \geqslant 2;$$

$$|\varepsilon_1| < 0{,}02, \ k \geqslant 3; \tag{8}$$

$$\max_{c_r \in (0,1)} (|Z_2'(1)/Z_2'(0)|, \ |Z_2(1)/Z_2(0)|) < 1{,}1 e^{-\omega^{3/2}/3}. \tag{9}$$

Доказательство. В операторной записи (7) имеет вид $\eta_\nu = \lambda_\nu I_0 + K_\nu \eta_\nu$, $K_\nu : C_0(l_0) \to C_0(l_0)$, $\|K_\nu\| < |\lambda_\nu| \dfrac{1{,}5}{|z|}$. Оценка нормы оператора следует из оценки интеграла (7), а просуммировав ряд Неймана, получим

$$\eta_\nu = \lambda_\nu I_0 + h_\nu, \ \|h_\nu\| < |\lambda_\nu| \|I_0\| \frac{1{,}5|\lambda_\nu|}{|z| - 1{,}5|\lambda_\nu|}, \tag{10}$$

причем $\|I_0\| < \sqrt{2}/|z|$, $|I_0| < \left|\dfrac{1}{z}\left(1 - \dfrac{i}{2z}\right)\right| + \dfrac{1}{\sqrt{2}|z|}$. Отношение второго члена к первому формулы (5), как следует из (6), (10), в частности, при $k \geqslant 3$ оценивается величиной $8{,}2 \cdot 10^{-3}$, а из выражений (4), (6) и (7) тогда получаем (8) при $|z| = 2k^{3/2}/3$.

Как нетрудно показать с помощью (6), величина отношений в (9) достигает максимума при $c_r = 1/2$ и оценивается через значение ω_0, а коэффициент при экспоненте учитывает остаточные члены.

Для дальнейших построений оценим интеграл

$$\omega\mathcal{J}(\omega, k) = \omega \int_0^1 Z_2(y)\, dy = e^{i3\pi/4} \int_{r_0}^{r_1} H_{1/3}^{(2)}(\tau)\, d\tau, \tag{11}$$

причем как легко найти

$$\int_{\pm i\infty}^0 H_{1/3}^{(1,2)}(\tau)\, d\tau = (-2/\sqrt{3})\, e^{\mp i\pi/6}. \tag{12}$$

Из преобразования (5) с учетом (12) следует (нуль обходится в правой полуплоскости)

$$-\int_{-i\infty}^{r_0} H_{1/3}^{(2)}(\tau)\, d\tau = 2\sqrt{3}\, e^{i\pi/6} + \int_{-i\infty}^{r_0'} H_{1/3}^{(2)}(\tau)\, d\tau + e^{i\pi/3} \int_{i\infty}^{r_0'} H_{1/3}^{(1)}(\tau)\, d\tau, \tag{13}$$

так что пути интегрирования целиком лежат в правой полуплоскости.

Лемма 5. *Для отношения функций $\mathcal{J}$ (11) и Z_2 (14) в области Ω справедливо представление*

$$\sqrt{k}\omega\mathcal{J}/Z_2(0) = e^{-i\pi/4}[1 + \varepsilon_1], \tag{14}$$

$$\varepsilon_2 = \sqrt{4\pi k^{3/2}}e^{-\sqrt{2}k^{3/2}/3}e^{i(5\pi/8-\sqrt{2}k^{3/2}/3)} + \frac{3e^{-i\pi/4}}{4k^{3/2}} + \varepsilon_3, \qquad (15)$$

$|\varepsilon_3| < 0{,}6,\ \ k\in[2,3];\ \ |\varepsilon_3| < 0{,}20,\ \ k\in[3,\omega_0/2];\ \ |\varepsilon_2| < 0{,}58,\ \ k>\omega_0/2.$

Доказательство. Согласно (6), (7) последний интеграл в формуле (13) имеет вид

$$\int\limits_{i\infty}^{r_0'} = \sqrt{2/\pi}\int\limits_{i\infty}^{r_0'} \tau^{-1/2}\exp(i\tau - i5\pi/12)(1+\lambda_{1/3}I_0 + h_{1/3}^{(1)})\,d\tau. \qquad (16)$$

Члены I_0 и $h_{1/3}^{(1)}$ с учетом (10) дают оценку ε_3 в (15). Первое слагаемое в выражении (13) соответствует первому слагаемому в (15), а второму отвечает первая поправка разложения неполной гамма-функции в интеграле (16). Отношение двух интегралов в правой части (13) идентично отношению членов формулы (5), а дополнительный интеграл с верхним пределом (11) оценивается по формуле типа (9): оба отношения имеют порядок 10^{-3}. Оценки по модулю всех слагаемых дают оценку при $k>\omega_0/2$.

4. Поведение в конечной окрестности нуля. Введем функцию $A(k)$ как решение задачи Коши

$$A''(k) = ikA(k);\ \ A(0)=1,\ \ A'(0)=\varepsilon_0 e^{-i\pi/6},\ \ \varepsilon_0 = 3^{1/3}\Gamma(2/3)\Gamma(1/3).$$

Тогда, как нетрудно убедиться,

$$n(k) \equiv iA'(k)/A(k) = -iZ_2'(0)/\omega Z_2(0). \qquad (17)$$

Положим также $m(k)\equiv I(k)/A(k)$, где $I(k)$: $I'(k)=A(k)$, $I(0)=e^{i\pi/6}\delta_0$, $\delta_0=\Gamma(2/3)/3^{1/3}$. Тогда с точностью до слагаемых вида (9) справедлива связь с выражением (14)

$$m(k) = \omega\mathfrak{I}/Z_2(0). \qquad (18)$$

Поведение функции $A'(k)/A(k) = u(k)+iv(k)$ описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} u' &= v^2 - u^2,\ \ u_0 = \varepsilon_0\sqrt{3}/2,\\ v' &= k - 2uv,\ \ v_0 = -\varepsilon_0/2, \end{aligned}\qquad k=0. \qquad (19)$$

Интегральная кривая $u+iv$ начинается в точке $\varepsilon_0 e^{-i\pi/6}$, переходит в первый квадрант, пересекает, как будет установлено ниже, луч $\pi/4$, а затем стремится к нему асимптотически, что показывает формула (8). Оценим величины $k_1: u(k_1)=0$; $k_2: u(k_2)=v(k_2)$. Обозначим $u(k) = \int\limits_0^k u(\xi)\,d\xi$, $V(k)=\int\limits_0^k v(\xi)\,d\xi$. Из первого уравнения (19) в секторе $(-\pi/6{,}0)$ следуют оценки

$$\ln(1+ku_0) < U(k) < 3/2\ln(1+2/3ku_0), \qquad (20)$$

а в секторе $(-\pi/6,\pi/2)$ сохраняется левое неравенство. Решая второе уравнение (19) относительно $v(k)$, находим

$$v(k) = e^{-U}\left[v_0 + \int\limits_0^k \xi e^{U}d\xi\right], \qquad (21)$$

откуда $\varepsilon_0/2 = \int\limits_0^k \xi\exp 2U d\xi$, а учитывая (20), выполняя квадратуры и используя численные значения $\Gamma(2/3)$, $\Gamma(1/3)$ [8, с. 54], находим

$$k_1\in[0{,}59;\,0{,}69]. \qquad (22)$$

Далее,

$$v(k_2) = \int_{k_1}^{k_2} \xi \exp 2\,[U(\xi) - U(k_2)]\,d\xi = u(k_2).$$

Учитывая неравенство (20) и оценку (22), убеждаемся, что $k_2 < 1{,}04$. Явное выражение для $m(k)$ имеет вид

$$m(k) = \exp[-U(k) - iV(k)]\left\{\delta_0 e^{i\pi/6} + \int_0^k \exp[U(\xi) + iV(\xi)]\,d\xi\right\}. \quad (23)$$

Комбинируя уравнения (19) при вычислении $|n|^2$, нетрудно получить

$$|m/n| = \frac{1}{\varepsilon_0}\left|\delta_0 e^{i\pi/6} + \int_0^k \exp(U + iV)\,d\xi\right| e^{-Q(k)},\ \ Q(k) = \int_0^k \frac{\xi v d\xi}{u^2 + v^2}. \quad (24)$$

Лемма 6. *В области $k \in (0{,}3)$ функции $n(k)$ (17) и $m(k)$ (18) удовлетворяют следующим оценкам*:

1) $\arg \overline{m} \in (-\pi/6,\ \pi/3)$; $-\mathrm{Re}\,n \geqslant \mathrm{Im}\,n \geqslant n_0 = 0{,}38$, $k \in [k_2,\ 2]$;
2) $\arg \overline{m} \in (0, \pi/2)$, $k \in (2, 3)$;
3) $|m(k)/n(k)| > |m(0)/n(0)| = \delta_0/\varepsilon_0 > 1{,}35$, $k \in (0,\ k_2)$.

Доказательство. Первая часть утверждения 1 вытекает из формулы (23), монотонного возрастания $V(k)$, $k \in [k_2, 2]$, и оценки

$$V(2) - V(k_1) < \int_{k_1}^{2}\left[\int_{k_1}^{\xi} \tau(1 + \tau u_0)^2/(1 + \xi u_0)^2\,d\tau\right]d\xi,$$

которая следует из (20), (21), что приводит с учетом (22) к оценке $V(2) < 0{,}91 < \pi/3$. Утверждение 1 следует из неравенства $u(k_2) > u_0\ /\ (1 + u_0 k_2) > 0{,}38$, формулы (17) и того факта, что $u(k)$ и $v(k)$ возрастают при $k > k_2$.

Утверждение 2 следует из оценки (14), поскольку, как легко видеть, $|\arg(1 + \varepsilon_3)|$, $|\arg(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)| < \pi/4$.

Далее, несложные выкладки позволяют найти

$$\varepsilon_0^2 \exp 2Q(k) = \varepsilon_0^2 + 2\int_0^k \xi\left[\int_{k_1}^{\xi} \tau \exp 2U d\tau\right]d\xi < \varepsilon_0^2 +$$

$$+ 2\int_0^k \xi\left[\int_{k_2}^{\xi} \tau(1 + 2\tau u_1)\,d\tau\right]d\xi,\ \ u_1 = u(k_1).$$

Кроме того, из свойств $V(k)$ следует

$$\left|1 + \frac{1}{\delta_0} e^{-i\pi/6}\int_0^k \exp(U + iV)\,d\xi\right| > |1 + e^{-i\pi/6}k|.$$

Подставив два последних неравенства в (24), докажем утверждение 3.

5. Характеристический определитель. Обозначим

$$\mathcal{J}_{1,2}^{\pm}(\alpha, \omega, k) = \int_0^1 e^{\pm\alpha(y - 1/2)} Z_{1,2}(y)\,dy,\ \ \Delta = \mathcal{J}_1^+\mathcal{J}_2^- - \mathcal{J}_1^-\mathcal{J}_2^+.$$

Как показано в [2], для отсутствия корней $\Delta = 0$ достаточно установить, что $|\mathcal{J}_2^+| < |\mathcal{J}_2^-|$ $\forall k \in (0, \infty)$, так как отсюда вытекает аналогичное неравенство для $\mathcal{J}_1^{\pm}$ и $|\Delta| > 0$. Рассматривая $\mathcal{J}_2^{\pm}$ как функцию α и дифференцируя по этому параметру, учитывая уравнение $Z''(y) + i\omega^3(y - c) \times Z(y) = 0$ и дважды интегрируя по частям, получаем систему уравнений первого порядка относительно $\mathcal{J}_2^{\pm}(\alpha)$, интегрируя которые, находим следующие нормированные выражения:

$$|\mathcal{I}^{\pm}| = e^{\pm\gamma(k-\omega/2)}\left|\frac{\omega\mathcal{I}}{Z_2(0)} + i\int\limits_0^{\gamma} e^{\mp k\xi}d\xi \times\right.$$

$$\left.\times\left[\mp\frac{Z_2'(0)}{\omega Z_2(0)}s_1^{\pm}(1+\delta_1^{\pm}) + \varkappa^{\pm}s_0^{\pm}(1+\delta_0^{\pm})\gamma\right]\right|,$$

где $s_m^{\pm} = \int\limits_0^1 e^{\mp(\sigma\xi+i\lambda\xi^3)}\xi^{1-m}d\xi\Big/\int\limits_0^1 e^{\mp\sigma\xi}\xi^{1-m}d\xi,\ \ m=0,1,$

$$\varkappa^{\pm} = \int\limits_0^1 e^{\mp\sigma\xi}\xi d\xi\Big/\int\limits_0^1 e^{\mp\sigma\xi}d\xi,$$

$$\lambda = \gamma^3/3,\ \ \gamma = (\alpha^2/R)^{1/3} \leqslant \gamma_0 = (\sqrt{2}/8)^{1/3},\ \ \sigma = k\gamma;\ \ \delta_m^{\pm}(\gamma,\omega,k) = \tag{25}$$

$$= -\frac{Z_2^{(m)}(1)}{Z_2^{(m)}(0)}\,\frac{\int\limits_0^{\gamma} e^{\mp[(k-\omega)\xi+i\xi^3/3]}\xi^{1-m}d\xi}{\int\limits_0^{\gamma} e^{\mp(k\xi+i\xi^3/3)}\xi^{1-m}d\xi},\ \ m=0,1.$$

Отношение интегралов последней формулы оценивается величиной $e^{\gamma\omega}$, что вместе с оценкой (9) дает $\max|\delta| < 1{,}1\cdot\exp(\gamma\omega - \omega^{3/2}/3) < 1{,}1\exp[-\sqrt{\alpha R}(1/3 - \sqrt{\alpha/R}) < 4\cdot 10^{-3}$ в Ω. Для краткости далее будем опускать величины δ — их значения не влияют на полученные ниже оценки. Таким образом, исследованию подлежит неравенство в обозначениях (17), (18)

$$\exp\gamma(k-\omega/2)\left|m + \frac{1}{k}(1-e^{-k\gamma})(ns_1^{+} + i\gamma\varkappa^{+}s_0^{+})\right| <$$

$$< \exp\gamma(\omega/2-k)\left|m + \frac{1}{k}(e^{k\gamma}-1)(-ns_1^{-} + i\gamma\varkappa^{-}s_0^{-})\right|. \tag{26}$$

Далее пусть $f(\gamma) = r(\gamma)\exp i\varphi(\gamma)$. Тогда

$$r^2(\gamma) - r^2(0) = 2\int\limits_0^{\gamma}\operatorname{Re}\{\bar{f}(\xi)f'(\xi)\}d\xi. \tag{27}$$

Рассмотрим вначале случай $k\in(0,3)$. Вводя переменные

$$p = \frac{1}{2}n(s_1^{-} + s_1^{+}) + \frac{1}{2}i\gamma(-\varkappa^{-}s_0^{-} + \varkappa^{+}s_0^{+}),\ \ \rho = \frac{1}{2}n(s_1^{+} - s_1^{-}) +$$

$$+\frac{1}{2}i\gamma(\varkappa^{-}s_0^{-} + \varkappa^{+}s_0^{+}), \tag{28}$$

после преобразования (27) получаем вместо (26) неравенство

$$|m|^2\operatorname{sh}\gamma(\omega-2k) - 2l\operatorname{Re}\{\bar{m}[p\operatorname{ch}\gamma(\omega-3k/2) - \rho\operatorname{sh}\gamma(\omega-3k/2)]\} +$$

$$+ l^2[|p|^2\operatorname{sh}\gamma(\omega-k) - 2\operatorname{Re}(p\rho)\operatorname{ch}\gamma(\omega-k) + |\rho|^2\operatorname{sh}\gamma(\omega-k)] > 0,$$

$$l = \gamma\operatorname{sh}\gamma k/2/\gamma k/2, \tag{29}$$

причем, как видно из (25), для параметров (28) справедливо представление

$$p = n(1+\chi_1) - \frac{1}{2}i\gamma(1-2\varkappa^{+}+\chi_2),\ \ \rho = -n\chi_3 + \frac{1}{2}i\gamma(1+\chi_4),$$

$$0 < \operatorname{Im}\chi_i < \frac{1}{2}\lambda, \ -\frac{\lambda}{2}\operatorname{Im}\chi_i < \operatorname{Re}\chi_i < 0, \ i = \overline{1, 4}, \tag{30}$$

и, следовательно, $|\chi_i| < 0{,}03$ в Ω.

Лемма 7. *При $k \leqslant 3$ в Ω выполняется неравенство* (29).

Доказательство. Пусть вначале $k \in [k_2, 3]$. Тогда третий член формы (29) положителен, поскольку $\operatorname{Re}\{n(1+\chi_1)\rho\} < 0$, и утверждение леммы следует из неравенства

$$|p|^2 \operatorname{sh}\gamma(\omega - k) > \gamma(1 - 2\varkappa^+ + |\chi_2|)|\rho| \operatorname{ch}\gamma(\omega - k),$$

которое мажорируется своим предельным случаем $\gamma = \gamma_0$ и минимальным $|n| > 0{,}36$ (см. утверждение 1 леммы 6), причем из оценки $\varkappa^+$ в (25) для данных k получаем $1 - 2\varkappa^+ < 0{,}27$.

Кроме того, $\operatorname{Re}\{\overline{m}[p - \rho \operatorname{th}\gamma(\omega - 3k/2)]\} < 0$. Действительно, из первого утверждения леммы 6 при $k \in [k_2, 2]$ в Ω $\arg(p - \rho) \in (7\pi/6, 3\pi/4)$, что вытекает из (30) с помощью оценок n_0 и $\varkappa^+$. При $k \in [2, 3]$ используем утверждение 2 леммы 6 и формулы (8), (17).

При $k \in (0, k_2)$ достаточное условие положительной определенности формы (29) имеет вид

$$|m| \operatorname{sh}\gamma(\omega - 2k) > l[|p \operatorname{ch}\gamma(\omega - 3k/2) - \rho \operatorname{sh}\gamma(\omega - 3k/2)| + \\ + |p \operatorname{ch}\gamma k/2 - \rho \operatorname{sh}\gamma k/2|].$$

Поскольку $\operatorname{Im} n > n_0$ и оценка $\varkappa^+$ для данных k усиливается, искомое неравенство следует из неравенства $|m| \operatorname{sh}\gamma(\omega - 2k) > l|n| (\operatorname{ch}\gamma(\omega - 3k/2) + \operatorname{ch}\gamma k/2)$, которое очевидно выполняется с учетом оценки 3 леммы 6 и при условиях $\gamma \leqslant \gamma_0$, $k \leqslant k_2$, $\omega \geqslant \omega_0$.

Заметим, что разделив (29) на γ и перейдя к пределу при $\gamma \to 0$, получим неравенство

$$|m|^2(\omega - 2k) - 2\operatorname{Re}(\overline{m}n) > 0, \tag{31}$$

которое при $k \in (0, 3)$ непосредственно следует из оценок, полученных при доказательстве леммы 7.

Переходя к случаю $k > 3$, умножим (26) на $\sqrt{k}\, e^{i\pi/4}$ и введем параметры $m_j = \varepsilon_2 - d_j$, $n_j = 1 + d_j$, $d_j = \varepsilon_0 + (1 + \varepsilon_0)(s_1^{\mp} - 1) \mp \gamma e^{-i\pi/4} \times \varkappa^{\mp}/\sqrt{k}\, s_0^{\mp}$, $j = 1, 2$. Здесь ε_2 определено выражениями (14), (15), а $\varepsilon_0 = i/6I_0(r_0') + \varepsilon_1$ в формуле (8). Тогда вместо (26) получим неравенство

$$|m_2 e^{\gamma(k - \omega/2)} + n_2 e^{-\gamma\omega/2}| < |m_1 e^{\gamma(\omega/2 - k)} + n_1 e^{\gamma\omega/2}|. \tag{32}$$

Лемма 8. *При $k > 3$ в Ω справедливо неравенство* (32).

Доказательство. Положим вначале $k \in (3, \omega_0/2]$. Совершив в (32) преобразование (27), получим эквивалентное неравенство

$$|n_1|^2(e^{\gamma\omega} - 1) + |n_2|^2(1 - e^{-\gamma\omega}) + 2\{\operatorname{Re}(\overline{m}_1 n_1)[e^{\gamma(\omega - k)} - 1] + \operatorname{Re}(\overline{m}_2 n_2) \times \\ \times [1 - e^{-\gamma(\omega - k)}]\} + |m_1|^2[e^{\gamma(\omega - 2k)} - 1] + |m_2|^2[1 - e^{-\gamma(\omega - 2k)}] > 0, \tag{33}$$

которое разбивается на сумму двух неравенств, и для первого индекса достаточно установить оценку (включая предельный случай $\gamma = 0$):

$$e^{\gamma k}|n_1|^2 > -2\operatorname{Re}(\overline{m}_1 n_1).$$

Это легко осуществить, если учесть оценки $|\varepsilon_0| < 0{,}080$, $|\varepsilon_2| < 1{,}05$, $\varkappa^+ < 0{,}364$, $\varkappa^- < 0{,}663$ и заметить, что $\operatorname{Re}\overline{\varepsilon}_2 > -|\varepsilon_3|$. Аналогичное утверждение для второго индекса вытекает из оценки $|n_2| > 1 - |\varepsilon_0|$.

И, наконец, в области $k > \omega_0/2$ применим в (33) неравенство Юнга для членов $(\overline{m}_j n_j)$ и разделим на общий множитель $(1 - e^{-\gamma k})$. Тогда достаточные условия справедливости (33) будут иметь вид

$$|n_1|^2 > |m_2|^2, \ |n_2|^2 > |m_1|^2 + \delta^2, \ e^{\gamma k}|n_1|^2 > |n_2|^2 - \delta^2,$$

для всех $\gamma \in [0, \gamma_0]$. Последнее неравенство весьма просто проверяется по представлению n_j, а первые два проверяются с учетом численных оценок $|\varepsilon_0| < 0{,}06$, $\varkappa^+ < 0{,}339$, $\varkappa^- < 0{,}662$ при $k = \omega_0/2$ и того факта, что величины $\varkappa^\pm / \sqrt{k}$ убывают с ростом k; здесь $\delta \in [0; 0{,}07]$.

6. Устойчивость. На основе проведенных построений устанавливаются свойства устойчивости течения Куэтта. Усилением основного результата работы [1] является следующая лемма.

Лемма 9. *При произвольном фиксированном* $\alpha > 0$ *и* $\omega \to \infty$ *имеет место следующая оценка спектра задачи* (1): $c_i > c_0/\omega$, $c_0 = c_0(\alpha)$.

Доказательство. В силу аналитичности по параметрам решений, порождающих оценки (8), (9), (14), (15) и оценку (2) леммы 6, эти оценки справедливы при $c = c_r + i\mu$, где $\mu \in [0, \mu_1]$ с достаточно малым μ_1. Данное утверждение сохраняется для оценок (1) и (3) леммы 6 с некоторым μ_2 в силу непрерывной зависимости решений системы уравнений (19) от начальных данных. Но тогда при любом k_0 в условиях леммы 9 неравенство (26) по непрерывности выполняется для любых $\tilde{k} = k + ik_i$, $k \in [0, k_0]$, $k_i \in [0, k_i^0]$, $k_i^0 = k_i^0(k_0)$. Выбирая теперь k_0 достаточно большим и используя первый член асимптотики функций Бесселя, легко показать, что неравенство (26) принимает вид

$$\exp \gamma (2k - \omega) < |1 + e^{\tilde{k}\gamma} + O(|\tilde{k}|^{-1} + \omega^{-1})|,$$

которое, очевидно, справедливо при ограниченном k_i в условиях данной леммы, так как $2k - \omega < k$. Полагая теперь $c_0 = \min(\mu_{1,2}, k_i^0/\omega)$, получаем утверждение леммы.

Теорема. *Плоское течение Куэтта устойчиво относительно бесконечно малых возмущений, т. е. спектр задачи* (1) *при произвольных* α, $R \geqslant 0$ *расположен в верхней полуплоскости. Последнее утверждение сохраняется для оператора* $L(0, \omega)$ $\mathrm{A}\omega \geqslant 0$, *отвечающего предельному случаю* $\alpha \to 0$, $\omega = \mathrm{const}$.

Доказательство. Случай $\omega = 0$, $\omega c = \mathrm{const}$ приводит к самосопряженному оператору и тривиален. Предположим, что при некотором фиксированном α найдется ω такое, что при этих параметрах существует точка спектра $c_r = c_i + ic_i$, $c_i < 0$. Тогда в силу леммы 3 $(\alpha, R) \in \Omega$ и при $\omega \to \infty$ параметры задачи будут по-прежнему принадлежать Ω. Из леммы 1 следует, что при этом $c(\omega)$ будет кусочно-аналитической и непрерывной кривой с произвольным выбором ветвей в каждой проходимой точке ветвления. Но тогда в силу леммы 9 $c(\omega)$ пересечет вещественную ось при некотором ω, что противоречит леммам 7,8.

Для предельного случая $L(0, \omega)$ заметим, что если при некотором $\omega_1 > \omega_0$ найдется точка спектра с $c_i < 0$, то, меняя непрерывно ω от ω_1 до $\omega_2 < \omega_0$, получим, что в некоторой точке ω_3 $c_i(\omega_3) = 0$. Однако в силу леммы 3 $\omega_3 \geqslant \omega_0$, а в силу формул (31), (34), (35) $\omega_3 < \omega_0$. Последнее противоречие завершает доказательство теоремы.

1. *Wasow W.* On small disturbances of plane couette flow // J. Res. Nat. Bur. Stand.— 1953.— **51**, N 4.— P. 195—202.
2. *Романов В. А.* Устойчивость плоскопараллельного течения Куэтта // Функцион. анализ и его прил.— 1973.— **7**, вып. 2.— С. 63—73.
3. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы.— М. : Наука, 1969.— 526 с.
4. *Джозеф Д.* Устойчивость движений жидкости.— М. : Мир, 1981.— 638 с.
5. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. 4. Анализ операторов.— М. : Мир, 1982.— 428 с.
6. *Солопенко В. М.* Приближенные модели динамики вязкой жидкости. Обоснование и метод расчета.— Киев : Вища шк., 1980.— 240 с.
7. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции.— М. : Наука, 1978.— 375 с.
8. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции.— М. : Наука, 1968.— 344 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 28.12.87